PERIODICA POLYTECHNICA SER. ARCHITECTURE VOL. 35, NOS. 1-2, PP. 19-30 (1991)

KONSTRUKTION DER KONTUREN SPEZIALER GERADER UND SCHIEFER KREISKONOIDEN

A. HORN

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 20. April, 1991.

Abstract

Contruction of the contour of special straight and oblique circular conoids

The study describes the special case of the circular conoids for which the tangent planes of the generatrices varying from point to point are constructable. In this case, for the orthogonal projections, on the isometric and perspective figures one can construct that point of a generatrix where the tangent plane becomes a projection plane in the chosen representation system and at the same time it is the contour-point of the generatrix. The solution of the problem is illustrated with figures.

Einleitung

Wird eine geradlinige, schiefe Fläche mit Hilfe ihrer drei Leitkurven in der Weise angegeben, daß von den letzteren zwei Geraden sind — eine im Endlichen, die andere im Unendlichen — und die dritte eine beliebige algebraische Kurve sein kann, erhält man ein Konoid. Steht die Gerade im Endlichen senkrecht auf dieses Ebenenbüschel der durch ein paralleles Ebenenbüschel bestimmten, unendlich entfernten Geraden, so wird das entstandene Konoid ein gerades Konoid sein, wenn nicht, dann ein schiefes Konoid. Ist die dritte Leitkurve ein Kreis, und ist die Gerade im Endlichen parallel zu der Ebene des Kreises, und wird durch das unendlich entfernte Ebenenbüschel die Ebene des Kreises in Geraden geschnitten, die auf die Geraden im Endlichen senkrecht stehen, so können mit Hilfe des Verfahrens, das im weiteren dargelegt werden soll, die in beliebigen Projektionen erscheinenden Konturkurven des geraden und des schiefen Kreiskonoids mit Hilfe der Konturpunkte der Erzeugungslinien des Konoids konstruiert werden.

Jene Bedingung, daß die die Fläche bestimmende Gerade im Endlichen zu der Ebene des Kreises parallel sein müsse, bringt es mit sich, daß die zu der Ebene des Kreises — im weiteren des Grundkreises — parallelen

Schnitte des in dieser Weise bestimmten Kreiskonoids, affine Entsprechende des Kreises, Ellipsen sein werden. So kann in jedem beliebigen Punkte derselben die Berührungsebene konstruiert werden. Damit läßt sich eine beliebige Erzeugungslinie des Kreiskonoids entlang unter den von Punkt zu Punkt veränderlichen Berührungsebenenbüscheln auf der Erzeugungslinie jene Ebene bestimmen, die — in eine beliebige Richtung projiziert — zur Projektionsebene wird, und deren Berührungspunkt von der Projektionsrichtung der Fläche her betrachtet — in seiner Kontur den Konturpunkt der verwendeten Erzeugenden ergibt.

Die Bedingung aber, daß das zu der unendlich entfernten Geraden gehörende, parallele Ebenenbüschel die Ebene des Grundkreises in Geraden schneiden müsse, die auf die Geraden im Endlichen senkrecht stehen, wird deshalb gefordert, weil die zu dem Grundkreis parallelen Schnitte des Konoids nur in diesem Falle durch schiefe Projektion in eine Schar affiner Ellipsen auf einer einzigen Achse in der Grundkreisebene gewandelt werden können; weitere Mitglieder dieser Schar sind auch die Projektionen des auf die Konoidfläche fallenden Abschnitts des Kreises und der zu dem Kreis parallelen Geraden.

Die Tangentialebenen eine beliebige Erzeugende des Konoids entlang

Eine beliebige Erzeugende des Konoids entlang ändert sich die Tangentialebene von Punkt zu Punkt. Um die notwendigen Zusammenhänge zu verstehen, betrachten wir *Abb. 1.*

Hier ist ein gerades Kreiskonoid mit den drei charakteristischen Projektionen, in Draufsicht, Vorderansicht und Seitenansicht dargestellt. Die beiden letzteren sind parallel zu den zwei Symmetrieebenen des Konoids, von denen die erstere die erste Projektionsebene der Geraden e, die andere auf e senkrecht ist, und durch den Mittelpunkt des Grundkreises durchgeht. In der Abbildung sind auch die horizontalen Konoidschnitte in 1/4, 1/2 und 3/4 Höhe über der Grundkreisebene der Geraden e, die Ellipsen e_3, e_2 und e_1 dargestellt. Bei diesen Schnitten bleiben die zu e parallelen Durchmesser — die großen Achsen — im Verhältnis zu dem Durchmesser e' des Grundkreises und zu dem auf die Konoidfläche fallenden Abschnitt der Leitgeraden zwischen den Erzeugungslinien 1–1' und 5–5' — den „einfachen" Erzeugungslinien — von unveränderter Länge, während die zu der Ebene der Seitenansicht parallelen Durchmesser — die kleinen Achsen — zwischen den drei durch Punkte bezeichneten Erzeugendenpaaren der Fläche von dem Grundkreis k an gegen e ansteigend zur Höhe verhältnisgleich abnehmen. So mimmt der Durchmesser in 1/4 der

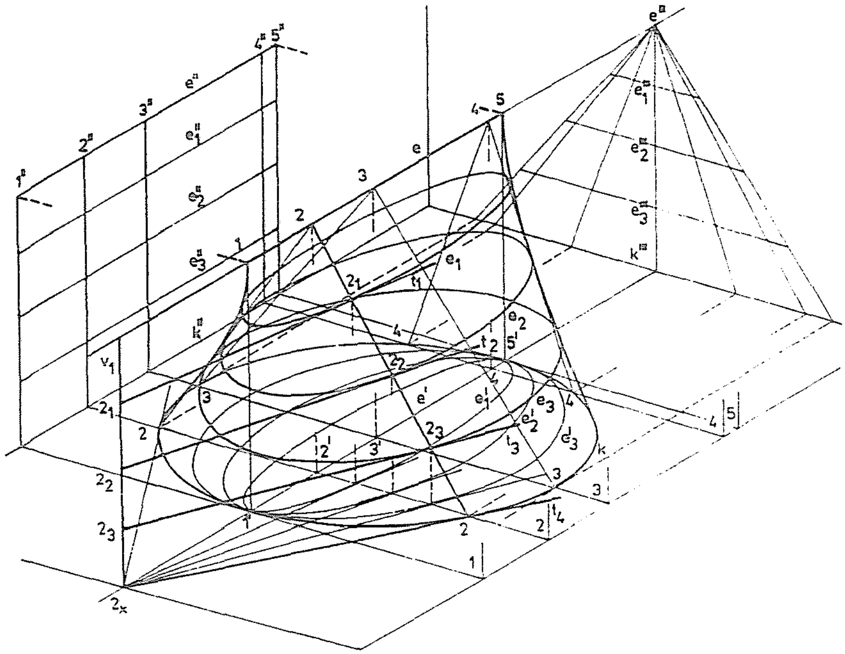

Abb. 1

Höhe zwischen k und e um ein Viertel seiner ursprünglichen Länge ab, um gleich 3/4 dieser ursprünglichen Länge zu sein. Das ist auch aus der auf e senkrechten Seitenansicht ersichtlich.

Da mit dem fortlaufenden Anstieg die kleinen Achsen der in größerer Höhe befindlichen Ellipsenschnitte fortlaufend abnehmen, lassen sich bei dem in der Abbildung gezeigten Flächenabschnitt zwischen e und k die einzelnen Horizontalschnitte durch stetige affine Zusammendrückung des Kreises k und verhältnisgleiche Anhebung desselben ableiten. So stellt der Grundriß der Schnitte eine einzige, mit dem Kreis k affine Ellipsenschar dar, wobei e' die Affinitätsachse darstellt, und deren Richtung auf a' senkrecht ist.

Es sei noch bemerkt, daß das Gesagte für die ganze Fläche, also auch für den Bereich unter dem Kreis k gültig ist, wo die zu e parallelen Durchmesser der Schnitte auch weiterhin unveränderter Länge sind, die auf e senkrechten Durchmesser aber von dem Grundkreis abwärts fortschreitend proportional zunehmen. Dadurch wechseln im Falle dieser Schnitte — im Vergleich zu denen über dem Kreis — die großen und die kleinen Achsen die Plätze. Wird die Fläche über e auf die dritte, zu der Grundkreisebene parallele Symmetrieebene gespiegelt, wiederholt sich alles spiegelgleich. Durch die auf eine Oberflächenerzeugende fallenden Punkte der obengenannten Horizontalschnitte wird die Horizontalprojektion der Erzeugenden gebildet. Diese läßt sich auch aus der Zusammendrückung des Kreises k senkrecht auf $e\prime$ ableiten. In diesen Punkten wird durch die Berührungslinien der Horizontalschnitte mit der im Grundriß, im auf dem Kreis k liegenden Punkt der Erzeugenden von dem in $e\prime$ ausgeschnittenen Punkt aus ein Strahlenbüschel gebildet. In der Abbildung wurde auf der sichtbaren Hälfte des geraden Kreiskonoids, in dem auf der Erzeugenden 2–2 des Grundkreises liegenden Punkt die Berührungslinie t_4 konstruiert, durch die in $e\prime$ mit der Kreisberührungslinie der Punkt 2 ausgeschnitten wurde, der bei den Berührungslinien die Erzeugende entlang deren gemeinsamen Schnittpunkt, mit anderen Worten ausgedrückt, deren Pendelpunkt darstellt. Die Berührungslinien selbst verlaufen parallel über ihrem Grundriß, wobei sie durch ihre Projektion die eigene Erzeugende schneiden.

Auf der sichtbaren Hälfte des dargestellten Flächenteils die Erzeugende 2–2 entlang von e gegen k fortschreitend wird durch die Projektion der Berührungslinien der Horizontalschnitte ein spitzer Winkelbereich zwischen $e\prime$ und t_4 ausgefüllt. Die sichtbare Erzeugungslinie 2–2 entlang, von dem Kreis k abwärts fortschreitend fällt der Grundriß der Berührungslinien der Horizontalschnitte die Erzeugende 2–2 entlang von 2_x ausgehend in den spitzen Winkelbereich zwischen den in t_4 und 2_x auf $e\prime$ gestellten zwei Senkrechten. Will man nun im Abschnitt über e des nicht sichtbaren Flächenteils der obengenannten Erzeugenden 2–2 die Berührungslinien der Horizontalschnitte konstruieren — in der Abbildung ist auch das nicht dargestellt —, so läßt sich das durch Spiegelung des obengenannten Strahlenbüschels in $e\prime$ in der Grundrißebene machen; darüber verlaufen parallel zu ihrem Grundriß die Berührungslinien, wobei sie ihre Erzeugende schneiden. So wird im Falle einer beliebigen Erzeugenden durch die Berührungslinien der Schnitte in den in die Erzeugende fallenden Punkten der Horizontalschnitte mit ihren in der Grundrißebene befindlichen Projektionen ein den Pendelpunkt der Projektionen der zu der Erzeugenden gehörenden Berührungslinien kreuzendes, volles Strahlenbüschel gebildet durch das die Ebene der Projektion ganz ausgefüllt wird. Im Raume interpretiert bedeutet das, daß sich eine Erzeugende entlang die Berührungsebenen an der Erzeugenden um 180° drehen.

Davon weichen die Erzeugenden in den Symmetrieebenen — die Erzeugende 1–1$\prime$, die beiden Erzeugenden 3–3 und die Erzeugende 5–5$\prime$ — ab, wo die Berührungsebene — in voller Länge der Erzeugenden die Oberfläche berührt und auf die Symmetrieebene auf der Erzeugenden senkrecht steht.

Der früher benutzte Ausdruck „einfache“ Erzeugende bedeutet, daß durch die Mitglieder des parallelen Ebenenbüschels an der unendlich weit entfernten Leitgeraden beim Schneiden des Grundkreises je zwei Punkte ausgeschnitten werden, so daß sich in diesen je zwei Erzeugenden befinden, während jene zwei von den Mitgliedern des Ebenenbüschels, durch die der Grundkreis berührt wird, und die nur je eine Erzeugende enthalten, einfache Erzeugenden genannt werden.

Konstruktion der Kontur eines durch senkrechte Projektionen angegebenen Konoids

Abb. 2 zeigt das in *Abb. 1* bereits dargestellte gerade Kreiskonoid in zwei Bildebenen. Im zweiten Bild dieser Darstellung wird die Konturkurve der Fläche in Vorderansicht über die Konturpunkte ihrer Erzeugenden konstruiert. Wegen der getrennten Draufsicht und Vorderansicht wurden die üblichen „und"-Bezeichnungen weggelassen.

Die drei Leitkurven der Fläche sind der Kreis k, die zu der Ebene des Kreises parallele Gerade e und die unendlich weit entfernte Schnittlinie der auf die Gerade senkrechten ersten Projektionsebenen. Werden durch zwei beliebige Mitglieder dieses Projektionsebenenbüschels der Kreis in zwei Punkten, die Gerade e in einem Punkt geschnitten, erhält man von der Konoidfläche zwei Erzeugenden, die sich in e schneiden. Diese gezeichnet, erhält man die Erzeugungslinien 1–1, 2–2, ... 8–8, deren zweiter Konturpunkt gesucht wird. Werden diese verbunden, erhält man im zweiten Bild die zweite Konturkurve des Konoids.

Die einzelnen Erzeugenden sind in Vorderansicht die Berührungslinien der gesuchten Konturkurve, in denen der Berührungspunkt den zweiten Konturpunkt der Erzeugungslinien darstellt. Dieser wird sich in dem Punkte befinden, wo die Berührungsebene die zweite Projektionsebene ist, d.h. auf die zweite Bildebene senkrecht steht. Da in einem beliebigen Oberflächenpunkt des Kreiskonoids dessen Berührungsebene durch ihre durch den Punkt durchgehende Erzeugende und durch die Berührungslinie ihres Horizontalschnittes in diesem Punkte bestimmt wird, kann der Konturpunkt nur dort liegen, wo die Berührungslinie des Horizontalschnittes auf die für Herstellung der Kontur vorgesehene Bildebene der Projektion senkrecht steht. In diesem Falle wird an der gegebenen Erzeugenden durch die Berührungslinie von Projektionsstrahlrichtung des Horizontalschnittes — zusammen mit der Erzeugenden — eine Berührungsebene in Projektionsebenenlage bestimmt, deren Berührungspunkt der Konturpunkt der vorgesehenen Erzeugenden ist.

Wählen wir die Erzeugungslinie 5–5, in deren auf den Grundkreis fallendem Punkt durch die Berührungslinie t_5 des Grundkreises im ersten Bilde von e der Punkt 5_x ausgeschnitten wird; von dem durch diesen Punkt

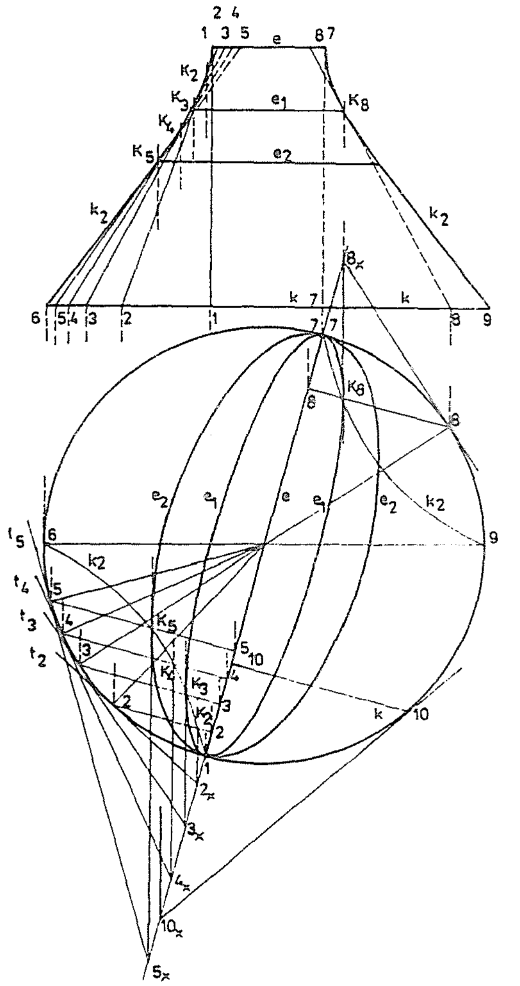

Abb. 2

durchgehenden zweiten Projektionsstrahl wird im Grundriß der Erzeugungslinie 5–5 der Grundriß des zweiten Konturpunktes k_5 der Erzeugenden ausgeschnitten. Von hier aus wird mit Hilfe eines Ordners auf die Vorderansicht der Erzeugenden 5–5 deren Konturpunkt K_5 projiziert. In der Abbildung wurde auch die Konstruktion des zweiten Konturpunktes der Erzeugenden 2–2, 3–3, 4–4 und 8–8 dargestellt. Durch die in dieser Weise konstruierten Punkte und ihre Erzeugungslinien werden die Punkte und Berührungslinien der gesuchten zweiten Konturkurve geliefert, durch deren Verbindung die gestellte Aufgabe erfüllt ist.

Die auf e fallenden Punkte der Erzeugenden 1–1 und 7–7 sind deren Konturpunkte, weil diese Punkte am linken und rechten Rande des auf die Fläche fallenden Abschnitts der Geraden e liegen. Die zweiten Konturpunkte 6 und 9 des Grundkreises k sind ebenfalls Punkte der zweiten Konturkurve. Werden die ersten Bilder der Konturpunkte verbunden, erhält man die Draufsicht auf die zweite Kontur.

Liegt der zweite Projektionsstrahl, der von Punkt 10 aus gezeichnet wird, den man mit Hilfe der Berührungslinie t_{10} in dem auf der Grundkreislinie liegenden Punkt der Erzeugenden 10–10 konstruiert hatte, außerhalb des spitzen Winkelbereichs von e und t_4, so fällt der zweite Konturpunkt dieser Erzeugenden außerhalb des vorhandenen Flächenstückes.

Konstruktion einer Konturkurve in der Axonometrie

In *Abb. 3* wird die Konstruktion der Konturkurve in Axonometrie durchgeführt. Dieses Verfahren wird bei den Erzeugenden 2–2 und 4–4 gezeigt.

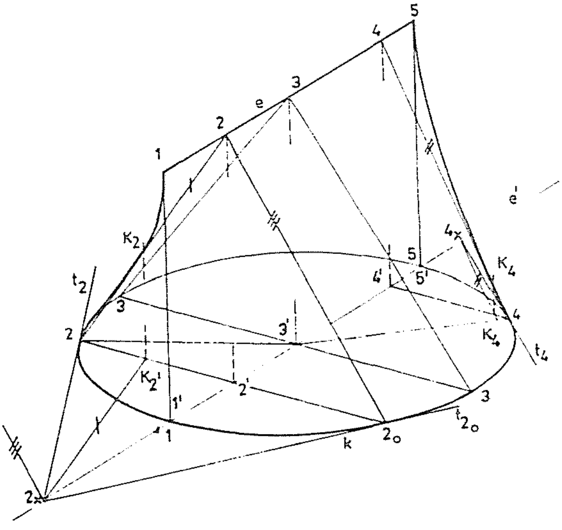

Abb. 3

Bei der Erzeugenden 2–2 wird jener Punkt der Konturpunkt sein, wo die Berührungsebene eine axonometrische Projektionsebene darstellt. In diesem Falle befindet sich die Erzeugungslinie a mit der Berührungslinie des sie schneidenden Horizontalschnittes gerade in Deckung, der Horizontalschnitt scheint also im Bilde gleicher Richtung, wie die Erzeugende zu sein.

So wird in Punkt 2 des Grundkreises die Berührungslinie t_2 des Kreises konstruiert, durch die in $e\prime$ der Pendelpunkt 2_x ausgeschnitten wird. Durch den Punkt 2_x wird eine Berührungslinie gezeichnet, die parallel zu der Erzeugenden 2–2 zu sein scheint, durch die im Grundriß 2–$2\prime$ der Erzeugenden $K_2\prime$, der Grundriß des Konturpunktes der Erzeugenden ausgeschnitten wird. Diese vertikal projiziert, erhält man den Konturpunkt K_2 der Erzeugenden.

Die Punkte 1 und 5 von e sind — wie bereits früher festgestellt wurde — ebenfalls Punkte der Kontur. Die Erzeugenden der in dieser Weise konstruierten Konturpunkte stellen aber die zu dem Konturpunkt gehörende Berührungslinie der Konturkurve dar.

Auch hier sei bemerkt, daß wird im Punkte 2_0 der Erzeugungslinie 2–2_0 durch den mit Hilfe der Berührungslinie t_{20} des Kreises ausgeschnittenen Punkt 2_x zu der Erzeugenden 2–2_0 eine parallele Gerade gezeichnet, die außerhalb des spitzwinkligen Winkelbereichs $e\prime t_{20}$ liegt, wird sich dann der Konturpunkt jener Erzeugenden nicht in dem dargestellten Flächenteil befinden.

Konstruktion der Kontur in der Perspektive

In *Abb. 4* wurden die Konturpunkte der Erzeugungslinien 1–1 und 2–2 konstruiert. Im Falle von 1–1 wurden als Ausgangspunkt im gedrehten und im perspektivischen Grundriß die Pendelpunkte (1_x) und 1_x konstruiert.

In der Perspektive wird im Falle einer einzigen Erzeugenden der Konturpunkt dort liegen, wo die Berührungsebene die Erzeugende entlang eine zentrale Projektionsebene ist. Das bedeutet, daß die Erzeugende und ihre Berührungslinie in dem auf die Erzeugende fallenden Punkte des Horizontalschnittes gesuchter Höhe gerade in Deckung sind.

Diese Konstruktion läßt sich in zweifacher Weise durchführen.

Im ersteren Falle wird die bereits axonometrisch gezeigte Konstruktion in Drehung durchgeführt. Da die gesuchte horizontale Berührungslinie mit der Erzeugungslinie 1–1 in Deckung sein muß, muß sie gegen den Richtpunkt I_1 streben, der in der Horizontlinie durch das perspektivische Bild der Erzeugenden ausgeschnitten wird. Die hierher strebenden Geraden sind die Mitglieder einer parallelen Geradenschar, deren Richtung zu der Richtung der Verbindungsgeraden $I_1(C)$ parallel ist. Wird zu dieser durch Punkt (I_x) eine parallele Gerade gezeichnet, so wird durch diese im gedrehten Grundriß der Erzeugenden (1) $(1\prime)$ der Grundriß des gesuchten Konturpunktes $(K_1\prime)$ ausgeschnitten. Dieser wird von (C) aus auf den perspektivischen Grundriß der Erzeugenden 1–$1\prime$ projiziert, von wo man

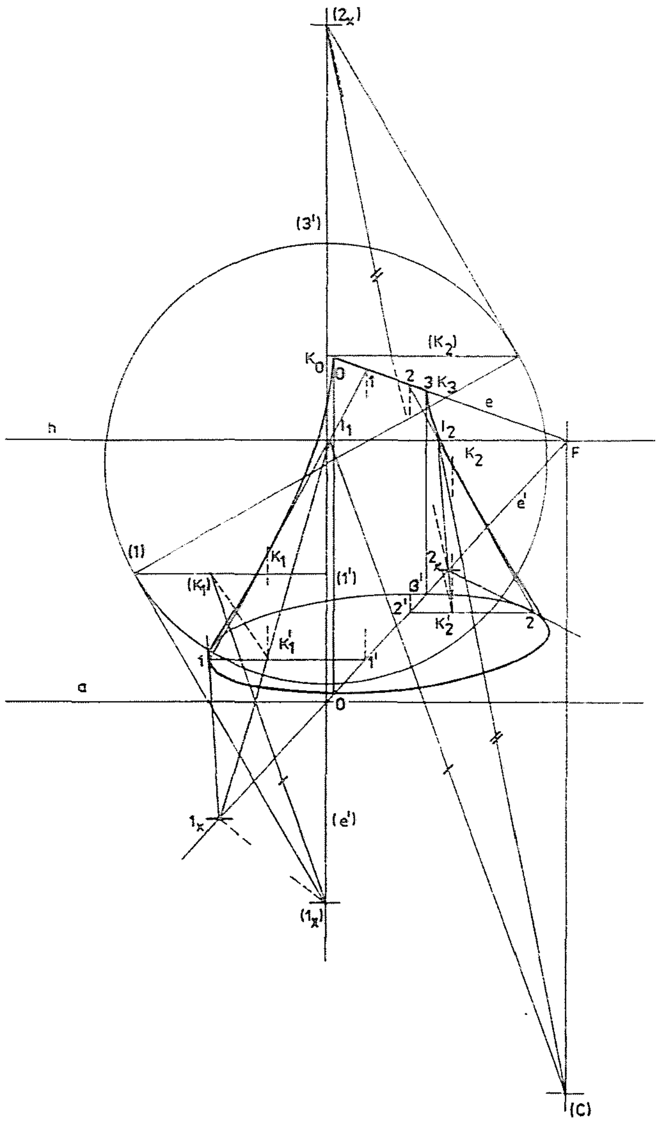

Abb. 4

— mit Hilfe eines Ordners projiziert — die Kontur $(K_{1'})$ der Erzeugenden 1–1 erhält.

Das zweite Verfahren ist von dem üblichen abweichend, jedoch wesentlich einfacher. Da die nach I_1 strebende horizontale Berührungslinie von dem Punkt 1_x ausgehen muß, so hat man bereits durch Verbinden der genannten beiden Punkte K_1' erhalten, deren Ordner in der Erzeugenden 1–1 K_1 ergibt. Die Konturpunkte der Erzeugungslinie 2–2 werden in der gleichen Weise konstruiert.

Konstruktion der Kontur eines schiefen Kreiskonoids

Die dargelegte Konstruktion ist hier nur brauchbar, wenn die Gerade e parallel zu der Ebene des Kreises k ist, und wenn durch die parallele Schar der auf e nicht mehr senkrechten Ebenen, die sich in einer unendlich weit entfernten Geraden schneiden, die Ebene des Kreises in auf e senkrechten Geraden geschnitten wird. In diesem Falle sind die „einfachen Erzeugenden" 0–0 und 10–10 — wie es *Abb. 5* zeigt — parallel zueinander. Dadurch wird ermöglicht, daß in Richtung dieser beiden Erzeugenden die Horizontalschnitte des schiefen Konoids auf die Grundkreisebene projiziert werden, wobei alle mit ihren großen Achsen in den Durchmesser e_0 des Grundkreises fallen, der parallel zu e ist. Wird diese schiefe Projektion berücksichtigt, ist der Verlauf der Konstruktion gleich dem in *Abb. 2* im Falle des geraden Konoids dargelegten.

In *Abb. 5* wurde die Konstruktion der Erzeugenden mit Hilfe paralleler Ebenen durchgeführt, in deren erstem Bilde der Endpunkt der durch gleiche Ziffern bezeichneten, aus e ausgeschnittenen Erzeugenden in einer Entfernung t von der mit der Ebene des Kreises gebildeten Schnittlinie befindet. Werden diese verbunden, ergeben sie das Erzeugungslinienpaar des Konoids.

In *Abb. 5* wurden zuerst der erste Konturpunkt der Erzeugenden 6–6 ... 10–10 und der Geraden im ersten Bilde konstruiert. So wurde mit Hilfe der die Erzeugende 8– 8 schneidenden Grundkreis-Berührungslinie t_8 in der Geraden des zu e parallelen Durchmessers e_0 des Grundkreises der Pendelpunkt 8_x ausgeschnitten, der die genannte schiefe Projektion von e in der Grundkreisebene ist. Hier wird im ersten Bild jener Punkt die Kontur sein, bei dem die Berührungsebene erste Projektionsebene ist. In diesem Falle kommt aber im in die Erzeugungslinie fallenden Punkte des Horizontalschnittes die Berührungslinie des Schnittes im ersten Bild mit der Erzeugenden in Deckung. Wird daher durch 8_x eine parallele Gerade zu dem ersten Bild der Erzeugenden 8–8 gezeichnet, so wird durch diese in der schiefen Projektion der Erzeugenden 8–8 — die auf e_0 senkrecht steht — der Punkt K_{8_0}, die schiefe Projektion des ersten Konturpunktes der Erzeugenden 8–8 ausgeschnitten. Wird letztere in der durch Pfeile bezeichneten schiefen Projektionsrichtung auf die Erzeugende 8–8 rückprojiziert, erhält man deren ersten Konturpunkt K_8. In der Abbildung wurde auch die ähnliche Konstruktion der sonstigen ersten Konturpunkte angegeben.

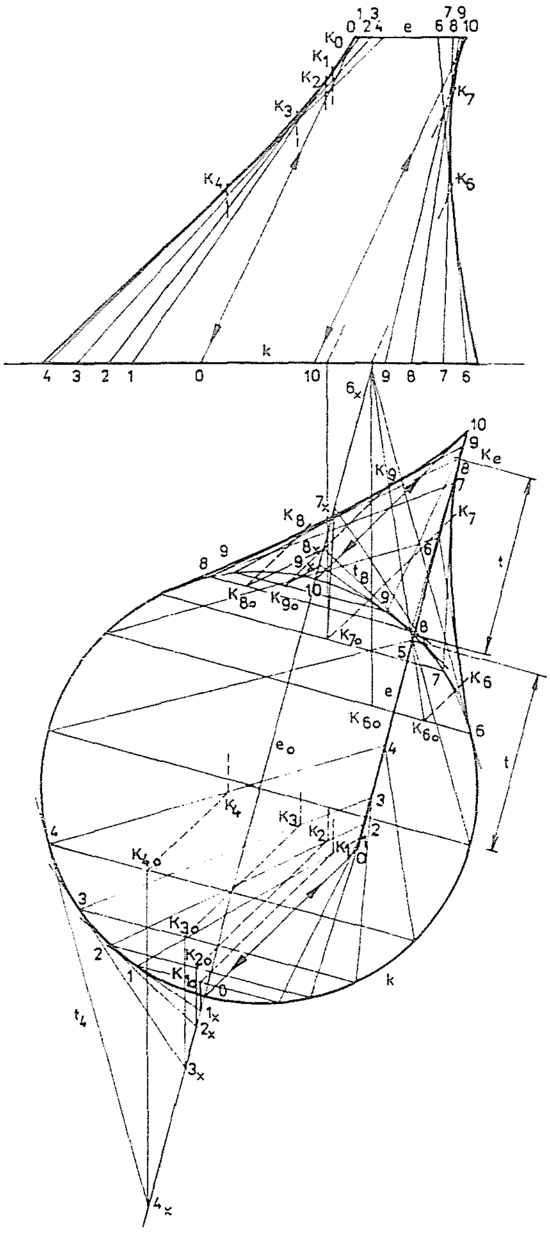

Abb. 5

Der Konturpunkt K_e der Geraden e wurde mit Hilfe des Schnittpunktes konstruiert, der durch die mit dederer in Deckung befindliche Erzeugende und durch e gebildet wird. Diese Erzeugende geht von dem Punkt des Grundkreises aus, der mit e in Deckung ist. Wird von dem scheinbaren Schnittpunkt ausgehend die Entfernung t aufgemessen, erhält man in e deren Konturpunkt K_e.

In der Vorderansicht wurden auch die zweiten Konturpunkte der Erzeugenden 1–1 ... 4–4, ferner 6–6 und 7–7 konstruiert, wo die Berührungsebenen zweite Projektionsebenen darstellen, welche die auf die zweite Bildebene senkrechte Projektionsrichtung enthalten. Wird durch den zu der Erzeugenden 4–4 gehörenden Pendelpunkt 4_x ein zweiter Projektionsstrahl gezeichnet, schneidet dieser in der auf e_0 senkrechten schiefen Projektion der Erzeugenden den Punkt K_{40} aus, der die schiefe Projektion des gesuchten Konturpunktes in der Grundebene ist. Diesen durch schiefe Projektion auf die Erzeugende 4–4 projiziert, erhält man im ersten Bild deren zweiten Konturpunkt K_4. Von hier aus mit Hilfe eines Ordners projiziert, erhält man in der Vorderansicht den gesuchten zweiten Konturpunkt K_4.

Es sei weiterhin bemerkt, daß man den zweiten Konturpunkt der die Richtung der schiefen Projektion bestimmenden Erzeugenden 0–0 und 10–10 aufgrund des in *Abb. 2* bereits gesagten durch e erhält. Die diese entlang bis ans Ende unveränderten Berührungsebenen sind nämlich keine zweiten Projektionsebenen, die Endpunkte des auf das Konoid fallenden Abschnitts von e fallen aber auf diese beiden Erzeugenden, die damit Punkte der Kontur darstellen. Das gezeigte Verfahren ist auch für die Konstruktion der Eigenschattengrenze — als Kontur von Lichtstrahlrichtung — bei beliebigem Lichtstrahl geeignet.

Address:

Dr. Antal HORN
Lehrstuhl für Darstellende Geometrie
Technische Universität
H–1521, Budapest, Ungarn