PERIODICA POLYTECHNICA SER. ARCHITECTURE VOL. 35, NOS. 1-2, PP. 31-38 (1991)

BESTIMMUNG DER SENKRECHTEN PROJEKTIONEN SYMMETRISCHER GEWÖLBE, DURCH KONSTRUKTION ANHAND EINER EINZIGEN PHOTOAUFNAHME

A. HORN

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 20. April, 1991.

Abstract

Determination of perpendicular projections of symmetric vaults by construction from one photogtaph

Two methods are presented for the solution of the problem while the vaults of the Vladislav Hall of the Old Palace of Prague Castle will be reconstructed which are halved longitudinally by a vertical symmetry plane.

For the first method the starting point is the direction point of the crossing lines of the hall which is also that of the connection lines of the symmetrical elements of the vaults. Their halving points fall in the symmetry plane which can first be constructed on ground plan and then in the space on the photograph. It is followed by the determination of the heights of the points and their equal distances in which way all the substantial and general points can be reconstructed.

For the second one mirroring the center and the picture to the symmetry plane they are doubled and the ground plane and the heights of the object points can be constructed by forward sectioning. On the mirror image only the picture framework will be symmetric, the notations of the points will be unchanged because the right hand points are seen on the right side on both pictures.

Einleitung

Die senkrechten Projektionen von Gewölben mit Symmetrieebenen können auch anhand einer einzigen Photoaufnahme konstruiert werden. In diesem Falle wird die Rekonstruktion der dargestellten Figuren gerade durch die Symmetrieebene ermöglicht, u.zw. durch zwei verschiedene Überlegungen, auf sehr verschiedene Art und Weise.

Sind die inneren Daten der von dem Gewölbe gemachten Photoaufnahme — der Hauptpunkt F der Aufnahme, nämlich die senkrechte Projektion des Projektionszentrums C der Kamera in der Ebene der Aufnahme, und die Länge der Strecke CF, — der Distanz d — bekannt, so kann die

Rekonstruktion konstruiert werden, wenn nicht, so ist die Bestimmung derselben die erste Aufgabe.

Konstruktion der inneren Daten eines Photos

Abb. 1 zeigt das Gewölbe von einzigartiger Schönheit im gotischen Rittersaal, dem Ladislaus-Saal im königlichen Schloß in Prag, der in der Mitte in Längsrichtung durch eine senkrechte Ebene in zwei symmetrische Hälften geteilt ist. Die Aufnahme wurde nicht mit Hilfe einer photogrammetrischen Kamera gemacht, an der die inneren Daten des Bildes angegeben sind, nur mittels eines einfachen Photoapparats, daher werden hier die inneren Daten aus dem Photo durch Konstruktion ermittelt. In dieser Weise können in einem ähnlichen Fall auch Aufnahmen benutzt werden, die mit einem unbekannten Apparat gemacht wurden.

Der unbekannte Hauptpunkt F befindet sich im Mittelpunkt des ganzen Bildfeldes. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn die Aufnahme mit einer Spezialkamera gemacht wurde, bei der sich das Linsensystem parallel zu der Ebene des Photos auch in zwei aufeinander senkrechten Richtungen verschieben läßt.

Nun wurde parallel zu der Saaltiefe der Richtpunkt I_x der Längskante im Schnittpunkt der Kanten dieser Richtung konstruiert. Da in der Aufnahme die Bilder der vertikalen Kanten parallel sind, ist auch die Bildebene der Aufnahme vertikal. Daher geht durch I_x eine horizontale Linie, die Horizontlinie hindurch, in der auch F liegt.

Da die Bildebene zu dem Saalquerschnitt nicht parallel ist — I_x nicht in F fällt — muß auch noch der Richtpunkt I_y der zu dem Saalquerschnitt parallelen Geraden konstruiert werden. Da die hierher gehörende Gerade horizontal ist, fällt ihr Richtpunkt ebenfalls in h, und wird durch jede beliebige Gerade der einander an der rechten und linken Seite entsprechenden, sinngemäß symmetrischen Punktpaare in h ausgeschnitten, Solche sind die Geraden A_0B_0, D_0E_0, M_0N_0. Von uns wurde die letztere benutzt. Die Richtpunkte I_x und I_y wurden durch die durch das Zentrum hindurchgehenden, aufeinander senkrechten, horizontalen Geraden bei der Aufnahme in der Bildebene ausgeschnitten. Wird daher die waagerechte Horizontebene um h in die Bildebene gedreht, und in die Strecke I_xI_y — als Durchmesser — ein Kreis gezeichnet, wird dieser auf der in Punkt F auf h gestellten Senkrechten die Umgedrehte (C) des Projektionszentrums C ausschneiden. Die Strecke $(C)F$ ist der gesuchte Bildabstand, die Distanz d.

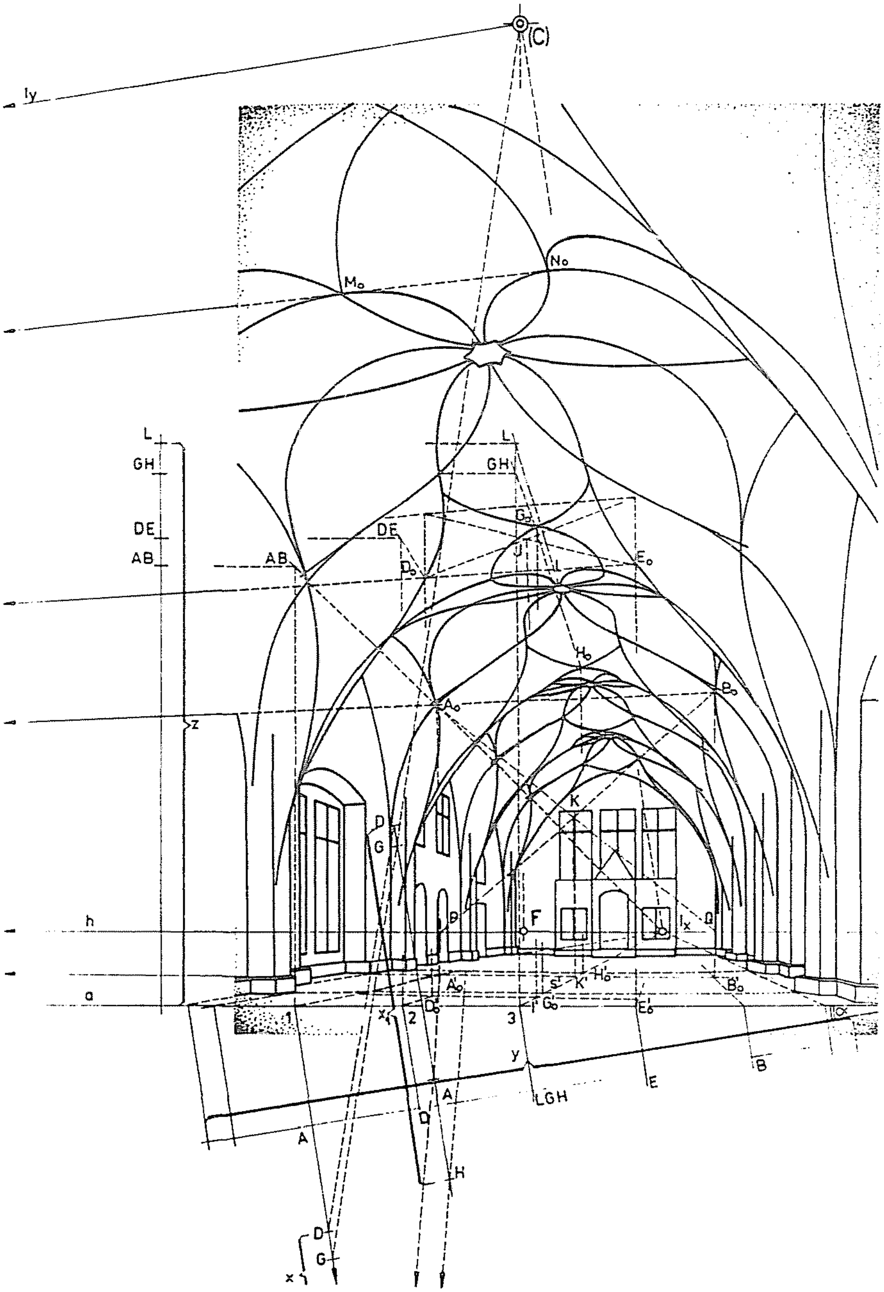

Abb. 1

Rekonstruktion anhand eines einzigen Bildes

Im Besitz der inneren Daten, der Entfernungen F und CF, wird als Ausgangspunkt der Wiederherstellung der Rekonstruktion — im Bilde — unter und parallel zu h — die Grundlinie a angenommen, die die Schnittlinie der bei der Wiederherstellung benutzten Bildebene mit dem Saalfußboden ist. Mit dem senkrechten Abstand zwischen h und a wird auch der Maßstab der Rekonstruktion festgelegt, da dieser bei der Wiederherstellung den Abstand zwischen Fußboden und Horizontebene darstellt, wobei in letzterer bei der Aufnahme der optische Mittelpunkt C der Kamera enthalten war. Die Abmessungen des in dieser Weise rekonstruierten Gebildes verhalten sich zu den wirklichen Abmessungen, wie der Abstand $a - h$ zu der Entfernung zwischen der Grundebene und dem Projektionszentrum der Kamera. Durch Änderung dieses Verhältnisses lassen sich Projektionen beliebigen Maßstabes herstellen.

Nun kann die Rekonstruktion im gewünschten Maßstab ausgeführt werden. Die Photos der im Laufe der Konstruktionen benutzten Punkte wurden durch deren Grundrisse durch $0'$ bezeichnet. Die in der Wirklichkeit nicht existierenden $0'$, jedoch bei den Konstruktionen benutzten Punkte wurden durch Buchstaben bezeichnet oder beziffert.

Die Schnittpunkte A_0 und B_0 der Gewölberippen stellen ein symmetrisches Punktpaar dar, dessen Verbindungsgerade nach I_y strebt. Der Halbierungspunkt der Geraden fällt in die Symmetrieebene des Saales. Weil sich das wegen der unterschiedlichen Verkürzungen der beiden Hälften direkt nicht ergibt, wird für die Herstellung der Mittelpunkt K des Oblongums A_0B_0QP benutzt, dessen Grundriß K' in den Grundriß s' der Symmetrieebene des Saales fällt. s' geht durch 3 Punkte hindurch, die auch das Bild der auf den Saalfußboden fallenden Strecke der Grundlinie halbieren, nach I_x. In der Geraden $K'I_y$ liegen A_0' und B_0'. Im Besitz des Grundrisses der genannten Punkte ist im weiteren nur deren gleiche Höhe zu bestimmen. Das geschieht bei A. Es werden parallele waagerechte Geraden gezeichnet, die über A_0' und A_0 nach I_x streben. Deren senkrechte Entfernung ist gleich der Höhe der genannten Punkte; diese Höhe ergibt sich in der Rekonstruktionsbildebene auf a — unter Berücksichtigung des Maßstabs zwischen den Punkten 1 und A — in der ursprünglichen Größe. Die allgemeinen Punkte D und E wurden in ähnlicher Weise mit Hilfe des Punktes J rekonstruiert; diese wurden durch eine nach I_y strebende beliebige Gerade angegeben. Der Grundriß der von vornherein in Symmetrieebene befindlichen Punkte G, H und L ergibt sich in s'; die Höhe derselben erhält man in der durch die mit der Rekonstruktionsbildebene gebildeten 3 Punkte hindurchgehende, senkrechte Schnittlinie der Symmetrieebene, wenn diese von I_x aus darauf projiziert werden.

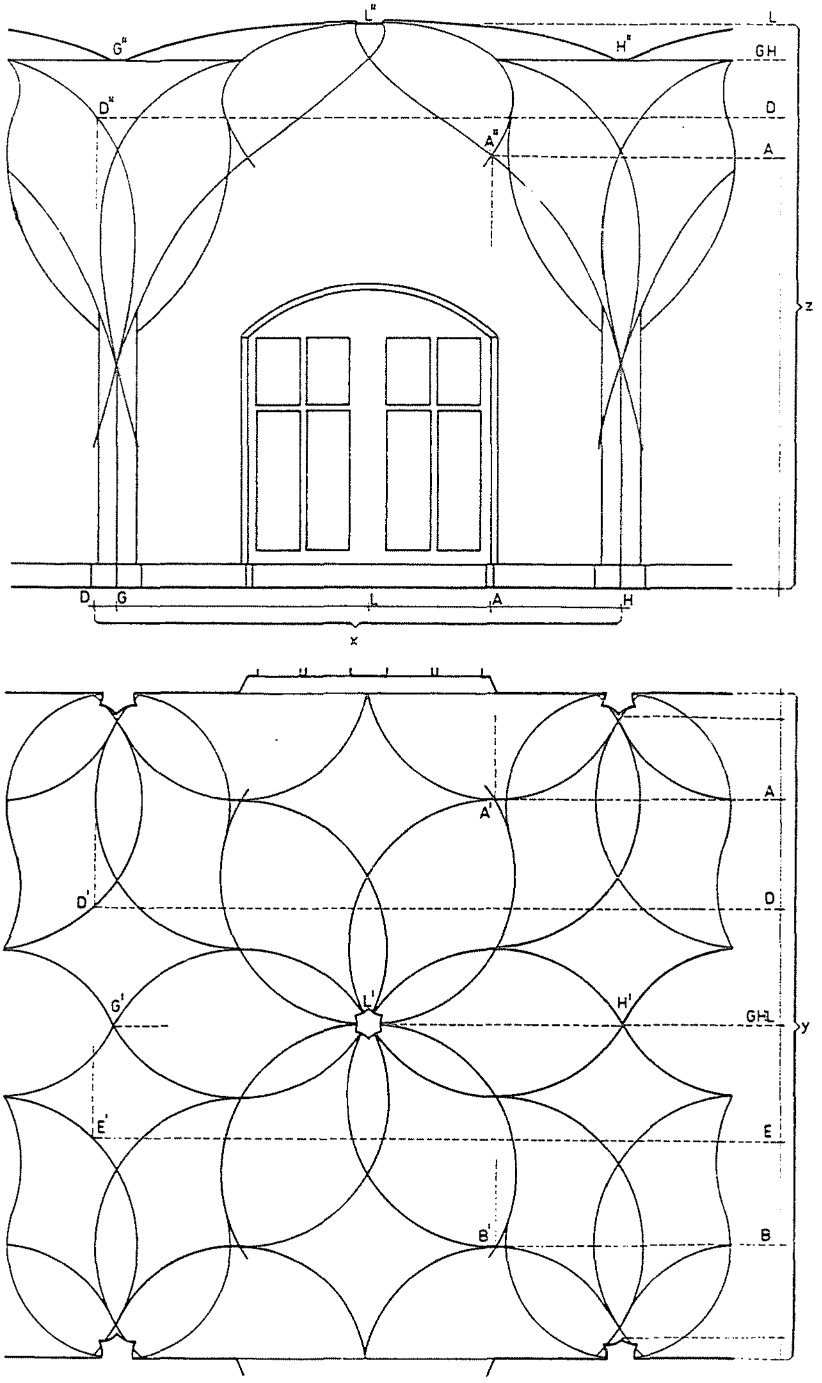

Abb. 2

Darauf folgend wird der rekonstruierte Grundriß der genannten Punkte konstruiert. Im Bilde werden durch die mit der Grundlinie a gebildeten Schnittpunkte der nach I strebenden Grundrißgeraden Geraden gezeichnet, die parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung $(C)I_x$ sind, sodann erhält man — von deren perspektivem Bild, von (C) aus projiziert, deren umgedrehten — rekonstruierten — Grundriß. Das wurde hier nicht dargestellt, weil es außerhalb des zur Verfügung stehenden Bereichs fallen würde. Deshalb wurde die Lage der Punkte in x-Richtung, gegen die Tiefe des Raumes mit Hilfe des gegen I_y strebenden Ordners von y-Richtung der Punkte auf die Geraden I_y übertragen, sodann wurde deren Schnittpunkt von (C) aus auf die Umgedrehte der Geraden I_x projiziert. Auch in dieser Weise konnte nur das Verhältnis von x-Richtung der Punkte D, G bestimmt werden. Deshalb wurde statt der Punktreihe x mit Bezeichnung die zu dieser parallele bezeichnete Punktreihe x_1 in 2/3 der Entfernung derselben von (C) konstruiert, wo bereits die Entfernung, in x-Richtung der Punkte D, G, A, H konstruiert werden konnte, selbstverständlich in 2/3 Länge der wirklichen Strecken. Der anderthalbfache Wert der die Länge der eben erhaltenen Punktreihe bestimmenden Strecken ergibt die Abmessungen des rekonstruierten Grundrißes in x-Richtung.

Die Rekonstruktion in y-Richtung ergibt sich aus der Entfernung der von der Grundlinie ausgehenden Geraden von $(C)I_x$ Richtung — der Ordner. Die in *Abb. 2* bei dem rekonstruierten Grundriß und der Seitenfassade verwendeten Punktreihen von x, y und z-Richtung dienen zur leichteren Orientierung.

Wegen des mehrfachen Symmetrieverhältnißes genügt es, die Rekonstruktion im Bereich zwischen einem Fensterfeld und der Symmetrieebene des benachbarten Gewölbekämpferpfeilers in der einen Saalhälfte durchzuführen.

Rekonstruktion mit Hilfe zweier Bilder

Das zweite Verfahren stimmt im Prinzip mit der Rekonstruktion unter Anwendung mehrerer Bilder überein. Das Wesentliche ist daran. daß wird der Standpunkt der gegenwärtigen Aufnahme auf die den Saal halbierende Symmetrieebene gespiegelt, man einen Standtpunkt erhält, bei dem die von dort gemachten Aufnahmen infolge der Symmetrie genaue Spiegelbilder der gegenwärtigen Aufnahme sein würden, in denen nur die Buchstabenbezeichnungen der symmetrisch angeordneten Punktpaare gewechselt werden müßten, da auch weiterhin Punkt A von B nach links, E von D nach rechts liegen würde.

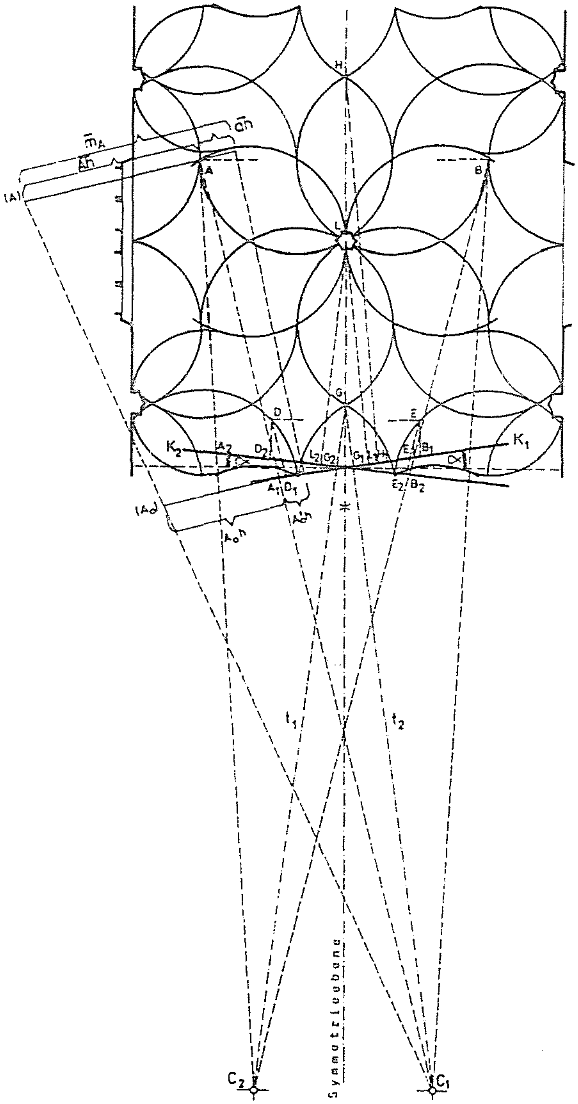

Abb. 3

Wie es die *Abb. 3* zeigt, werden durch den Grundriß K_1' der Originalaufnahmne und den Grundriß K_2' der gespiegelten Aufnahme mit der Grundlinie a gleiche Winkel gebildet, die mit dem durch die gekennzeichnete Gerade der Punktreihe y des Grundrißes und durch die Grundlinie a gebildeten Winkel in *Abb. 1* übereinstimmen. Werden in den hier in Geraden gesehenen, senkrechten Aufnahmen die Projektionen der in *Abb. 1* rekonstruierten Punkte dargestellt, erhält man bei dem rechtsseitigen Originalbild die Punkte $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ..., selbstverständlich nicht in alphabetischer Reihenfolge, und in der gespiegelten Aufnahme die Projektionen der Punkte $A_1B_1C_1$ ... in der Form, daß die mit ihren Originalpunkten verbundenen, gespiegelten Punkte zu der Grundlinie a parallele Geraden ergeben. Ferner wird von F_1 und F_2 aus senkrecht auf die Bilder die Distanz $(C)F$ ausgemessen, und somit erhält man die Projektionszentren C_1 und C_2. Diese ergeben zusammen mit dem zu ihnen gehörenden Bild die beiden Projektionskegel des dargestellten Gebildes, durch deren zu einem Punkt gehörende Projektionsstrahlen aneinander der Grundriß des Punktes ausgeschnitten wird. Somit wird durch den Pojektionsstrahl C_1A_1 im Projektionsstrahl C_2A_2 der Grundriß des Punktes A ausgeschnitten. Die Grundriße der sonstigen Punkte werden in der gleichen Weise konstruiert. Als die Höhe des Punktes A konstruiert wird, wird die senkrechte erste Projektionsebene des Projektionsstrahles C_1A_1 um den Grundriß C_1A herum in die waagerechte Horizontebene gedreht. Die vertikalen Höhen erscheinen nun senkrecht auf die Gerade C_1A_1. Wird von den auf die Punkte A und A_1 des Grundrißes gestellten Senkrechten bei A_1 von A_1 aus in der Photoaufnahme die Höhe über h des Punktes A_0 aufgetragen, und von C_1 aus auf die bei A befindlichen Senkrechte projiziert, erhält man die Strecke $A(A)$, die die Höhe von A über der Horizontebene ist. In gleicher Weise projiziert, ergibt A'_0h, unter Berücksichtigung des Maßstabes der Rekonstruktion, die Entfernung der Grundlinie a und der Horizontebene in h. Die beiden Werte zusammen geben die Höhe des Punktes über der Fußbodenoberkante an. Die Konstruktion der Höhe der übrigen Punkte stimmt mit der dargelegten Konstruktion überein.

Werden die rekonstruierten Punkte mit dem in den Photos gesehenen übereinstimmend verbunden, erhält man die senkrechten Projektionen des rekonstruierten Gebildes. Die Punkte können je nach Bedarf beliebig vermehrt werden. Dadurch lassen sich auch die Raumkurven in den Projektionen genauer konstruieren.

Address:

Dr. Antal HORN
Lehrstuhl für Darstellende Geometrie
Technische Universität
H-1521, Budapest, Ungarn