ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДЯЩИХ СУММЫ СЛУЧАЙНОГО КОЛИЧЕСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ

М. ОВСЕЙЧИК*

Я. КОЧИШ

Центр по применению Вычислительной Техники
Будапештского Технического Университета

Поступило: 15 июл 1987

Представлено: д.-ом И. Кырти

Abstract

The article presents an application of generating functions for sums of random numbers of random variables to branching processes. Basing on alternative realisation time analyses of an investment project a number of dependences have been found out. An application of the PERT and CPM methods to the problem of the critical path choice to optimize planning of building tasks has been proposed.

Введение

Одним из основных преобразований, дающим изображение оригинальной функции, применяемых в случайных моделях, являются воспроизводящие и характеристические функции. Их применяют вообще в задачах максимального планирования на максимум функции цели, так как при использовании такого подхода имеется возможность суммирования независимых случайных переменных. К тому же эти преобразования применяются к суммированию детерминированных и случайных чисел случайных переменных. На практике оптимального планирования реализации инвестиции анализ случайных процессов практически сводится к определению технологических и организационных событий во время течения стройки.

1. Производящие и характеристические функции

По Ф. А. Гэйгту [1] производящие функции и характеристические функции применяются для представления разложения случайных переменных. Возьмем такую последовательность вероятностей $p_0, p_1, \ldots$ событий,

* Лодзинского Политехнического Института.
Институт Информатики

что случайная переменная X принимает относительные стоимости $0, 1 \ldots$ Производящая функция определяется как:

$$F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k \tag{1}$$

причем u — произвольная переменная преобразования. Поскольку u — произвольная переменная, обычно принимается ограничение $0 \leq u \leq 1$, чтобы обеспечить сходимость ряда определенного равенством (1). В таком случае производящая функция всегда существует для любой последовательности вероятностей неотрицательной дискретной случайной переменной. Для случайной переменной X, описанной точно такими вероятностями, характеристическая функция определяется по следующей формуле:

$$\Psi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j e^{isj} \tag{2}$$

причем — переменная преобразования, $i = \sqrt{-1}$.

Если сравнить равенства (1) и (2), легко заметить, что замена e^{is} на u меняет характеристическую функцию на производящую функцию. Причиной применения этих двух разных функций является то, что равенство (2) обыкновенно обобщается на непрерывные случайные переменные. Тогда:

$$\Psi(s) = \int_x e^{isx} g(x)\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

причем $g(x)$ — функция распределения вероятностей. Равенство (3) определяет преобразование функции, Фурье, которое в теории вероятности называется характеристической функцией. В оптимизации планирования реализации инвестиции употребляем целочисленные случайные переменные в области времени и средств производства.

Вид производящей функции (1) непригое для непрерывных случайных переменных и поэтому ее применяют только к целочисленным случайным переменным. Любая производящая функция принимает значение, равное единице для $u = 1$. Аналогично, любая характеристическая функция равна единице при $S = 0$. Надо заметить, что производящую функцию и характеристическую функцию можно считать как математическое ожидание относительных случайных переменных u^x и e^{isx} т. е.

$$E[u^x] = F(u) \text{ и } E[e^{isx}] = \Psi(s) \tag{4}$$

Рассматривая производящую функцию двухстоимостной случайной переменной (например, календарное расписание реализации задач при данных средствах) дает последовательность вероятностей p_0, p_1, $0, 0 \ldots$, исполнения действий, относительно значений $X = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Соответствие между последовательностями вероятностей и их характеристическими функциями в этом случае однозначно [1].

К цели оптимизации планирования в строительстве особенно пригодным является сплетение функций для сумм независимых случайных переменных следующим образом:

Если $У$ — сумма двух независимых дискретных случайных переменных X_1 и X_2 и $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ последовательности вероятностей того, что $X_1 = 0, 1, \ldots$ и соответственно, $X_2 = 0, 1, \ldots,$ тогда можно обозначить последовательность вероятностей $C_0, C_1, \ldots$ для $У = 0, 1, \ldots$ В таком случае вероятность того, что $У$ принимает стоимость K, есть вероятностью произведения событий

$$\{x_1 = 0,\ x_2 = k\},\ \{x_1 = 1,\ x_2 = k - 1\}, \ldots,\ \{x_1 = k,\ x_2 = 0\}:$$

$$P\{y = k\} = C_k = \sum_{j=0}^{k} P\{x_1 = j,\ x_2 = k - j\} = \sum_{j=0}^{k} P\{x_1 = j\} \cdot P\{x_2 = k - j\} =$$
$$= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

для $K = 0, 1, 2, \ldots$

Здесь используется независимость и взаимное исключение таких событий, когда в случае строительства, где имеются «n» работ и «n^*» возможностой их исполнения при использовании определенных средств, разрешается создавать независимые множества для альтернативных вычислений анализа времени и нужд в средствах. В сложных по реализации инвестициях цикл исполнения есть равнодействующая возможностей реализаторов и обусловлений строительства. Тогда введением альтернативных вычислений разрешается выбор цели и средств реализации, как это имело место при реализации Мемо-

Табл. 1

Составление результатов вычислений ПЕРТ реализации М.Б.Ц.З.М.П.

Ввемя*	Вычисление реализации инвестиций в свободное время		Вычисление реализации инвестиций с временными ограничениями	
	Количество критических действий	Вычисленный конечный срок реализации	Количество критических действий	Вычисленный конечный срок реализации
1	2	3	4	5
202	4	503	4	400
208	2	405	48	406
301	4	407	102	408

* 202 — 2 года 2 месяца от начала реализации инвестиции
208 — 2 года, 8 месяцев от начала реализации инвестиции
301 — 3 года, 1 месяц от начала реализации инвестиции

риальной Больницы Центра Здоровья Матери Польки (М. Б. Ц. З. М. П.). В таблице 1 представлено алтернативное вычисление времени реализации задач, ограниченных директивным сроком окончания строительства.

Анализ времени представлен в табл. 1 по алтернативным вычислениям т. е. в свободное время реализации (возникающим с оптимизации разложения задач во времени) и с временным ограничением по директивному сроку окончания инвестиции, показал ряд зависимостей:

1) первоначальный этап реализации инвестиции характеризуется полным распоряжением средствами производства, приблизительно обеспечивающими фронты работ,

2) С течением времени технологические и организационные потребности нужды стройки повышаются и в случае, если они превышают количество имеющихся в распоряжении средств производства, наблюдается недостаточный прогресс работ на действующих фронтах работ,

3) зависимости, указанные в пунктах *1), 2)* вызывают повышение количества критических действий (во многих случаях замедленных относительно к оригинальному графику),

4) реализация инвестиции в назначенное время значительно ограничивает системные возможности оптимизации разложения задач во времени и граница расхождения нужных средств производства относительно к имеющимся в распоряжении значительно передвигается во время реализации стройки (такую возможность можно заметить гораздо раньше, чем она появляется на практике стройки).

Введенные параллельно финансовые вычисления могут расходиться от расчетов потребностей и времени на стройке по поводу неустойчивого уровня цен в Польше. Однако из регистрации нескольких издержек очевидно равномерное распределение покупок как инвеститора, так и производителя.

2. Метод отсечения чисел

Во время вычисления с помощью ЭВМ и при сохранении десятичных чисел, в памяти компютера делается отсечение числа без округления. Так например, число 2/3 = 0,666666 . . . записывается как 0,666666666, итак с точностью до девяти десятичных разрядов после запятой. В связи с этим, при добавлении двух десятичных чисел, ошибка девятой позиции может достичь значения *0*, *1* или *2* единиц этой позиции. Вероятность, связанную с этими ошибками нетрудно обозначить используя обозначения производящей функции. Пусть значение десятой позиции X_1 составляет 0, 1, 2, . . . , 9 с одинаковой вероятностью, и значение десятой позиции X_2 второго числа имеет тождественные свойства. В связи с этим ошибку $У$ на десятой позиции можно записать следующей зависимостью:

$$
Y = \begin{cases} 0 \text{ если } X_1 + X_2 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ 1 \text{ если } X_1 + X_2 = 5,\ 6, \ldots,\ 14 \\ 2 \text{ если } X_1 + X_2 = 15,\ 16,\ 17,\ 18. \end{cases}
$$

Производящие функции для X_1 и X_2 одинаковые в виде

$$
\frac{1}{10}(u^0 + u^1 + \ldots + u^9)
$$

вместо этого соотношения производящая функция суммы $X_1 + X_2$, учитывая сплетенные свойства производящей функции, разложение случайных переменных X, представляется в следующем виде:

$$
\left(\frac{1}{10}\right)^2 (u^0 + u^1 + \ldots + u^9)^2.
$$

Поднимая в квадрат выражение в скобках, сумма коэффициентов u^0, u^1, u^2, u^3, u^4 разделенная на 100 есть вероятностью, что $Y = 0$ и так дальше. Этот способ дает возможность исследования распространения ошибок в численных вычислениях. Одним из примеров обязательности употребления ошибок отсечения является перечисление финансового анализа инвестиционного предположения. По поводу того, что цена работ подсчитывается в тысячах (1×10^3) злотых, а вычислительные возможности ПЭРТ требуют вычислений в 1×10^5 злотых, иногда необходимо применять методику употребления техники расчета ошибок отсечения. Практический пример представлен в таблице 2.

Как видно из табл. 2, ошибка отсечения есть причиной повторяющеюся каждый раз отклонения по отношению к учетным стоимостям на 5%, что

Табл. 2

Действие	Цены в злотых	Цены в злотых по методике ПЭРТ	Разница в процентах
1. Электрооборудование гостиницы Е	20 796 000	20 700 000	0,46
2. Нулевое состояние сегмента CI	45 431 000	45 400 000	0,07
3. Нулевое состояние сегмента С3	5 224 000	5 200 000	0,46
4. Стоянки для автомашин	13 887 000	13 800 000	0,63
5. Нулевое состояние сегмента ВА	129 460 000	129 400 000	0,046
6. Нулевое состояние сегмента ВВ	163 408 000	163 400 000	0,005
7. Телефонная установка сегмента А	625 000	600 000	4,0

при использовании настоящего метода определения работ в течение инвестиции не деформирует результаты счета. Единственно окончательный расчет инвестиции требует подробнейшего анализа.

3. Применение методики в стохастическом случае (ветвящиеся процессы)

Применение функции, производящих суммы случайного количества случайных переменных, дают ветвящиеся процессы. Это есть класс марковских процессов о перечисленном количестве состояний [2].

Предполагается, что рассматривается некоторая физическая система Ω, состоящая с конечного количества элементов одинакового типа или многих разных типов. По истечению времени каждый из элементов независимо от остальных элементов может исчезнуть или преобразоваться в группу новых элементов. Надо это понимать, так что совокупность начинается единственным элементом, называемым нулевой генерацией, $S_0 = 1$. Единственный элемент разделяется одновременно на случайное количество ответвлений, S_1, составляющих первую генерацию.

Количество элементов второй генерации — сумма случайных количеств ответвления частных (отдельных) элементов первой генерации, т. е. $S_2 = X_1 + X_2 + \ldots + X_{S1}$
где: X_j — количество случайных одновременных ответвлений j-того элемента, непосредственно предшествующей генерации.

3. Метод ПОРТ и ЦПМ в сетевой логике

В оптимизации планирования строительных работ обыкновенно употребляем сетевую логику. На рис. 1 представлен стрелковой график фрагмента гостиницы для медсестер:

График составлен на базе списка операций предварительных требований.

Список предварительных требований является вспомогательным средством при разработке более сложного стрелкового графика. Пробный график приготавливается с целью нахождения и определения неправильно расположенных узлов. График станет таким образом упорядоченным в таком конечном виде, как это представлено например, на рис. 1.

Вопрос выбора критическою пути дороги заключается в прибавлении материалов к относительным действиям с целью минимизации общей стоимости стройки. Например, если для двух одновременных действий нужны каменщики, надо определить, сколько из них должен быть присоединен к каждому из них, чтобы можно было реализовать задачи в строго определенноевремя и при минимальных стоимостях.

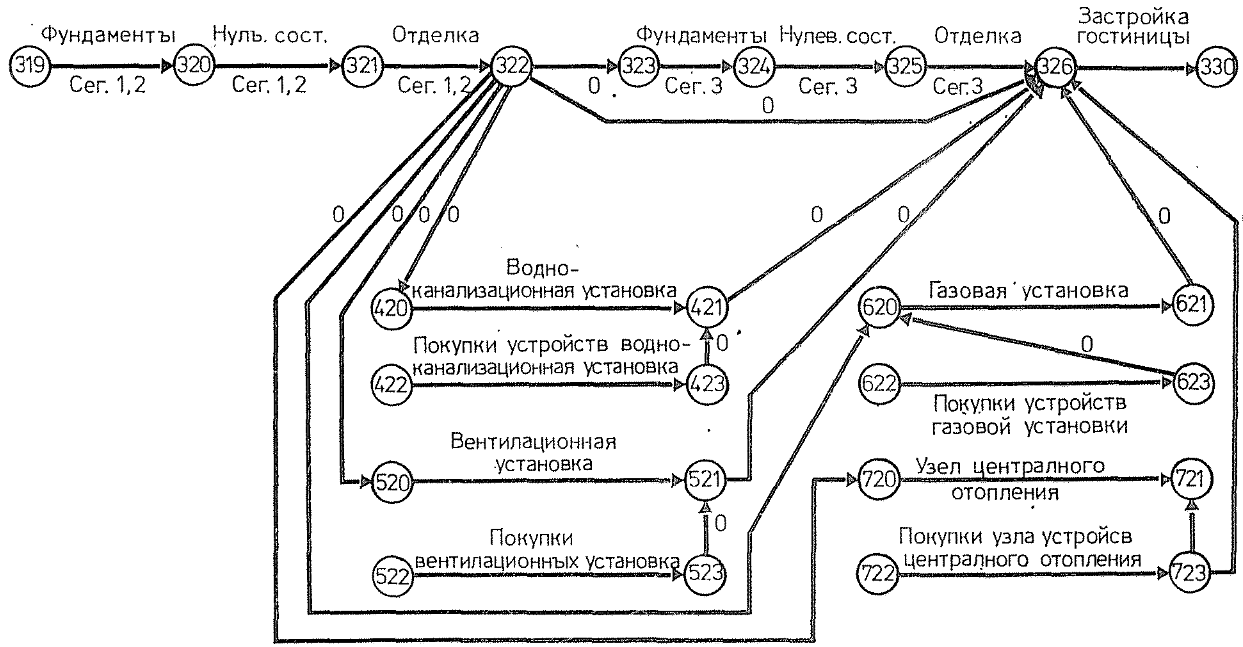

Рис. 1. Фрагмент стрелкового графика гостиницы для Медсестёр

Существуют многие методы решения похожих задач. Все являются расширением первых разработок *ПЭРТ (Program Evaluation and Review Technique) (Critical Path—Method) и ЦПМ.*

Основная разница между вышеуказанными методами заключается в том, что ПЭРТ использует статистическую постановку оценки времени действий (предел времени) в течение которого возможно окончание действий, в то время в методе ЦПМ оценки времен осуществляются есмь одностоимостными единичными числами. Методы ПЭРТ являются полезными в случае исследовательских или прогрессивных проектов, в которых не хватает опыта или он очень малый. Методы ЦПМ полезнее применять в случаях проектов, касающихся действий более точно определенных как например: употребление ЦПМ во время строительных работ. В методе ЦПМ закладывается, что стоимость операции зависит от назначенного времени.

Стоимость, отвечающая самому короткому времени обычно выше, чем нормальная стоимость по поводу таких факторов, как повышенная зарплата (сверх рабочего времени) и сниженная производительность людей и устройств по причине взаимных влияний по мере введения в задачу новых единиц.

С другой стороны, метод ПЭРТ закладывает некоторое статистическое разложение времени окончания операций и использует среднюю величину и среднее отклонение. Другим известным способом определения времени окончания операций — определение оптимистичного времени, самого вероятного времени и пессимистичного времени. Целое время исполнения всего проекта — тоже случайная переменная. Оптимистичное, самое вероятное и пессимистичное время окончания проекта получаем после суммирования (подведения итогов) относительных времен исполнения частичных операций. Как общий вывод, можно сказать, что метод ЦПМ относиться более к стоимости исполнения проекта, а метод ПЭРТ — более к времени.

Если n — количество разных возможных типов элементов, тогда состояние системы Ω в точке времени t описывает целочисленный вектор

$$\mathbf{H}(t) = \{k_1(t),\ k_2(t), \ldots, k_n(t)\}$$

где $k_i(t)$ — количество элементов i — того типа, существующих во время t. В дальнейшем будем идентифицировать состояние системы Ω во время t с вектором $\mathbf{H(t)}$.

О процессе эволюции системы Ω во время закладывается, что для каждого элемента существующего во время t его следующая эволюция не зависит ни от того, когда и каким способом этот элемент появился, ни от характера эволюции всех остальных элементов, входящих в систему Ω во время t.

Если α и β — n — размерные векторы, а их компоненты целочисленные неотрицательные:

$$\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\};\ \beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

то вероятность перехода $p_{\alpha\beta}(t_1, t_2)$ системы Ω с состояния происходящего во время t_1 к состоянию β во время t_2:

$$p_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = p\{\mathbf{H}(t_2) = \beta \mid \mathbf{H}(t_1) = \alpha\}.$$

Обозначим через $\{i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ состояние системы Ω, составляющийся с одного элемента i — того типа.

Сформулированное выше задание, относящееся к характеру эволюции системы Ω во время записывается формулой:

$$p_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{a_i} \beta^{(i,j)} = \beta} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{a_i} p_{\{i\}\beta}(t_1, t_2) \tag{5}$$

где суммирования по правой стороне равенства делаются по всем векторам $\beta^{(i,j)}$ целочисленных неотрицательных составляющих $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, a_i)$ производящих вместе вектор β.

Причем, если $a_i = 0$, тогда принимается

$$\prod_{j=1}^{a_i} p_{\{i\}\beta^{(i,j)}}(t_1, t_2) = 0.$$

В таком случае ветвящийся процесс — марковский процесс, пространство возможных состояний N которого есть множество всех целочисленных n — размерных векторов неотрицательных составляющих и вероятности переходов которого удовлетворяют зависимости [5].

Выводы

В статье показано применение функции производящих суммы случайного количества случайных переменных в ветвящихся процессах. По альтернативным вычислениям анализа времени реализации задач инвестиционного предприятия, выведен ряд зависимостей. Предложено тоже применение методов ПЭРТ и ЦПМ для решения задач выбора критической пути при оптимизации планирования строительных работ.

Marek Obsiejcsik 90-369, Lodz, Polska