ABBILDUNGEN VON KEGELSCHNITTEN IN ZENTRALER KOLLINEATION

Z. Katona

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie
Technische Universität Budapest, H-1521

(Eingegangen am 15. April 1982)

Conic Section Images in Central Collineation — Possible cases of coordination of conic sections will be reviewed. Constructions rely on central collineation. Special stress is laid on the exchangeability of configurational conic section and image conic section, as well as on conditions of achieving the specified image.

Die Basisebene und Bildebene der zentralen Kollineation werden senkrecht aufeinander angenommen. Damit wird im wesentlichen das anschaulichste und in der Praxis am häufigsten angewandte Darstellungssystem, die Perspektive benutzt.

An das Projektionszentrum, die Basis- und Bildebene werden noch weitere zwei Ebenen angeschlossen. Die Ebenen sitzen am Zentrum an, eine ist zu der Basisebene parallel. Diese wird Richtungsebene genannt. Die andere ist zur Bildebene parallel und wird als Verschwindungsebene bezeichnet. Das bedeutet, daß die Bilder der Ebenenpunkte von der Bildebene »verschwinden«, sich im Unendlichen befinden.

Das System aus vier Ebenen wird mit der Bildebene vereint, in die Bildebene gedreht, um die graphische Konstruktion auf Papier durchzuführen.

Die Elemente des so erhaltenen, zentralen, kollinearen System sind in der Darstellung:

— das Projektionszentrum — (C) — das in die Bildebene gedrehte Zentrum, die Gedrehte »C«,

— die Projektionsachse — die Spurlinie n —, Schnittlinie der Basis- und der Bildebene,

— die Antiachsen der Projektion — die Richtungslinie i —, Schnittlinie der Bildebene und der Richtungsebene,

— die Schnittlinie u — der Basisebene und der in die Bildebene Gedrehten der Verschwindungsebene, die Verschwindungslinie.

Aus der Parallelität der angenommenen Ebenen ergibt sich, daß es genügt, neben dem Zentrum beliebige zwei andere Elemente anzugeben, das fehlende vierte Element kann graphisch aufgetragen werden. Durch weniger als drei

Elemente wird hingegen das zentrale Kollineationssystem nicht eindeutig bestimmt.

In der Basisebene befindet sich das Originalgebilde, das wir darzustellen wünschen. Nach Vereinigung der Ebenen wird von der Gedrehten des darzustellenden Originalgebildes gesprochen. In der Bildebene erscheint das aus dem gegebenen Zentrum projizierte Bild des Originalgebildes, welches das zentrale, kollineare Gegenstück des Originalgebildes ist.

In zentraler Kollineation wird unter Anwendung folgender geometrischer Zusammenhänge konstruiert.

Schneiden wir die vier Ebenen mit einer im Zentrum angesetzten, im übrigen beliebig gestellten Ebene S. Die mit den vier Ebenen des Systems gebildeten Schnittlinien der Schnittebene werden einander gegenüber paarweise parallel sein und in folgenden Punkten anstoßen: C, wo die Ebene aufgesetzt wurde, I, wo die Richtungslinie, N, wo die Spur und schließlich U, wo die Verschwindungslinie die Schnittebene durchstoßen. $CINU$ ist im Sinne des Gesagten ein Parallelogramm.

Drehen wir die Schnittebene um die Achse CI. Die dabei entstehenden Parallelogramme haben so in CI eine gemeinsame Seite, ihre einander gegenüber liegenden Seiten NU sind zueinander und auch zu CI parallel. Die Seiten IN liegen in I, die Seiten UC in C.

In der Relation Originalgebilde—Bild streben die parallelen Geraden gegen einen gemeinsamen Verschwindungspunkt.

Nun wird CU als Drehachse der Schnittebene gewählt. Da werden die beim Drehen erhaltenen neueren Parallelogramme in CU eine gemeinsame Seite haben, ihre einander gegenüber liegenden Seiten IN werden zueinander und zu CU parallel sein und ihre Seiten UN in U, die Seiten CI in C anliegen.

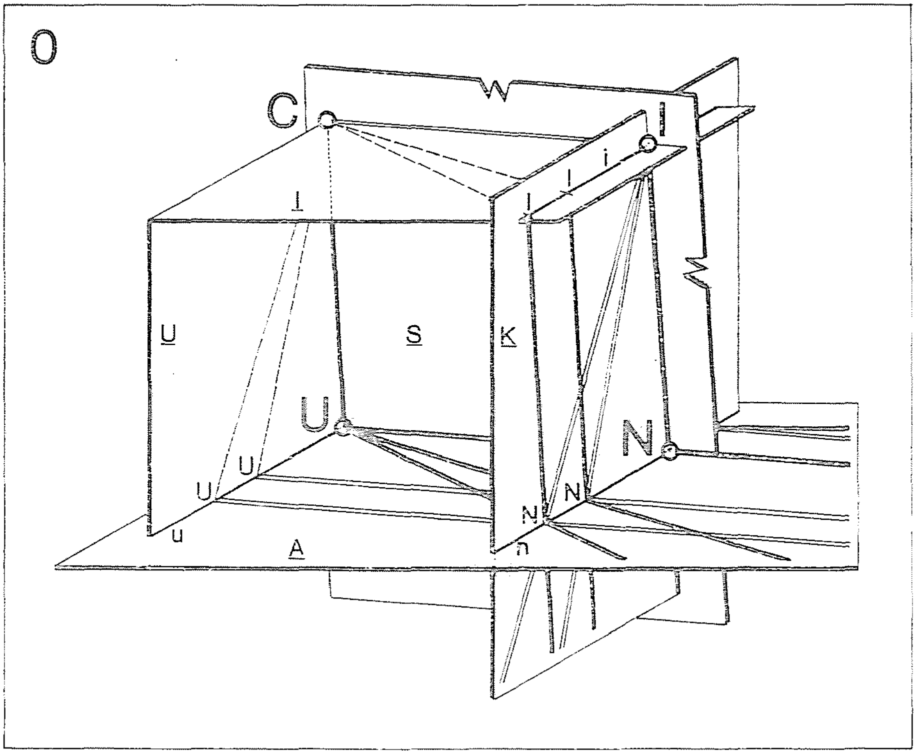
Mit anderen Worten: Schneiden sich die Geraden eines Originalgebildes in einem Punkt der Antiachse U, werden ihre Bilder parallel sein.

Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Richtungspunkt I — die Bilder der Geraden, die sich in einem gemeinsamen Verschwindungspunkt U schneiden, sind parallel. Diese zwei Feststellungen bedeuten zugleich die Vertauschbarkeit von Basisebene — Bildebene, bzw. der Antiachsen.

In der Praxis kann das Originalgebilde gegeben sein und gesucht wird sein Bild, oder ist das zentrale, kollineare Bild bekannt, und es wird das Originalgebilde gesucht; bei der Lösung beider Zielsetzungen bedient man sich derselben geometrischen Zusammenhänge.

Zu den Abbildungen ist zu bemerken:

Da das Darstellungssystem durch aufeinander senkrechte Ebenen angegeben wurde, wurden Bildebenenabstand, Hauptpunkt des Zentrums besonders nicht bezeichnet, da sich diese direkt ergeben, wenn in den Aufnahmen die Antiachse i abgesteckt wird.



Die Achsen werden durch eine halbfette, ausgezogene Linie, in der Buchstabenbezeichnung durch n, i, u bezeichnet; das Zentrum ist ein mit zwei Kreisen gezeichneter Punkt (C).

Bisher wurde immer die Gedrehte des an die Basisebene angefügten Originalgebildes mit einer mittelfeinen Linie ausgezogen angegeben. Die für die Konstruktion notwendigen Linien wurden fein ausgezogen, unter Umständen, für die bessere Übersichtlichkeit strichpunktiert gezeichnet. Die zentralen Projektionsstrahlen sind dünne, gestrichelte Linien. Das fertig konstruierte Bild wird durch eine dick ausgezogene Linie bezeichnet. Schließlich wurden zueinander parallele Geraden durch kleine schräge Linien gleicher Anzahl oder durch Punktieren bezeichnet.

Im Interesse einer besseren Übersichtlichkeit der Abbildungen schneidet das Originalgebilde stets in den Punkten N, N^* die Kollineationsachse n. Diese Punkte sind nämlich für die Ausgestaltung einzelner Kurvenbilder notwendig. Das bedeutet jedoch nicht, daß ohne diese Spurpunkte die Kurvenbilder nicht konstruiert werden könnten. Ist nämlich in der Aufnahme kein Spurpunkt, wird eine zu der Bildebene parallele Hilfsebene so angesetzt, daß diese die Figur in einer Hauptgeraden schneide. Nun werden diese Schnittpunkte benutzt, und die Bildkurve wird in der Hilfsebene konstruiert und dann auf die ursprünglich gegebene Bildebene projiziert. Durch diese doppelte Reihe der Operationen würden die Abbildungen nur komplizierter werden und der Gedankengang der Konstruktion verlorengehen.

Allgemeine Bemerkungen

Zu der Konstruktion der Bilder der behandelten vier Kurven ist im allgemeinen zu bemerken:

In zentraler Kollineation ist das Bild eines Kegelschnittes ebenfalls ein Kegelschnitt.

Für Kegelschnitte wird eine Klasseneinteilung eingeführt: Kreis und Ellipse sind geschlossene Kurven, geschlossene Figuren. Das bedeutet, daß sie keine unendlich entfernten Punkte haben. Sie kommen im Bilde zustande, wenn das mit ihnen verwandte Originalgebilde keinen einzigen Punkt der Antiachse u enthält.

Parabel und Hyperbel sind offene Kurven, offene Figuren. Ein Punkt der Parabel, zwei Punkte der Hyperbel fallen in das Unendliche. Ein Parabelbild kann entstehen, wenn das verwandte Originalgebilde die Antiachse u berührt. Ein Hyperbelbild wird erhalten, wenn das verwandte Originalgebilde die Antiachse u in zwei Punkten schneidet.

Wird das Bild als geschlossene Figur einer geschlossenen Figur gesucht, bedient man sich bei der Konstruktion der Antiachse u, während für das Bild als geschlossene Figur einer offenen Figur die Antiachse I abgesteckt wird.

1. Konstruktion eines Kreisbildes

Da für die bisherigen Konstruktionen aufeinander senkrecht eine Basis- und eine Bildebene angenommen wurden, bedeutet das zwei vorgegebene Ebenenstellungen.

Soll das Kreisbild der Kurven konstruiert werden, so können die Ausgangskurven als ebene Schnitte eines schiefen Kreiskegels mit dem Scheitel C und mit einem Bildkreis als Leitkurve betrachtet werden.

Zu dem allgemeinen ebenen Schnitt eines schiefen Kreiskegels wird also in einer vorgegebenen Ebene der Kreisschnitt gesucht. Durch diese Einschränkungen wird aber die Kegelfläche eindeutig bestimmt, ihr Scheitel — das Projektionszentrum — kann nicht beliebig angesetzt werden.

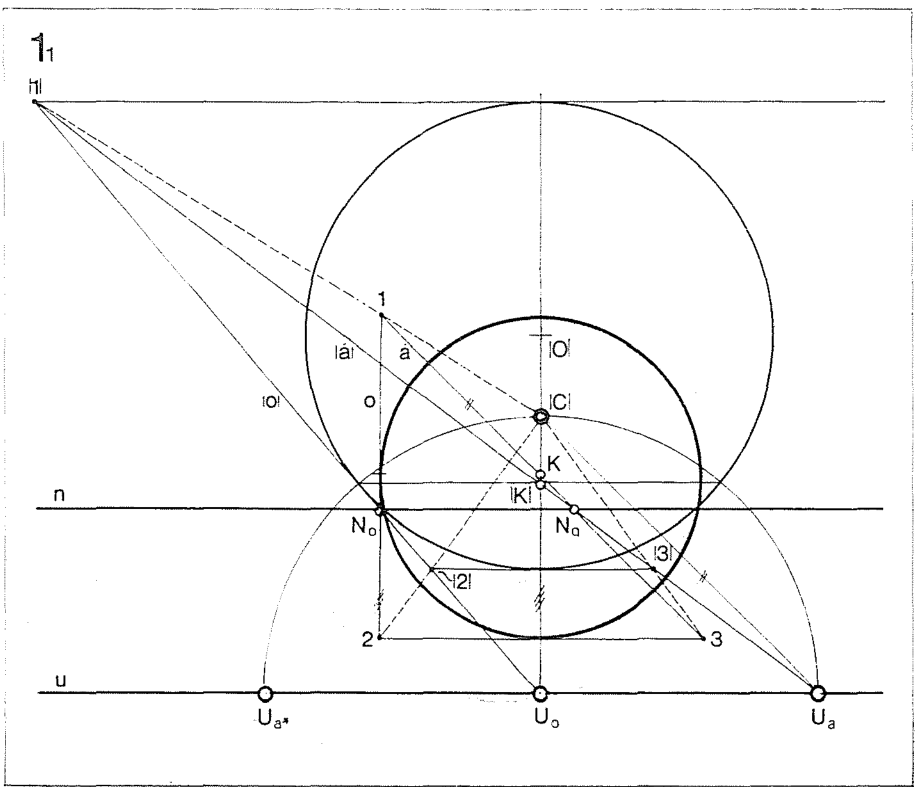
Bei der Konstruktion von Kreisbildern wird das System durch das Komplex Figur — Bild determiniert, vervollständigt.

Es werden die Achse *n*, die Antiachsen *u*, sodann *i* angegeben. Die Bedingungen des Zustandekommens eines Kreisbildes werden in den einzelnen Fällen bestimmt, der Kreis aufgezeichnet, danach gelangt man zu dem Zentrum.

1.1 Gesucht werden das Kreisbild eines Kreises mit dem Mittelpunkt (O) und das Zentrum (C)

Es wird das Berührungsviereck des Kreises konstruiert, wo das eine Seitenpaar zu der Bildebene parallel ist — diese Seiten bleiben im Bilde parallel zu ihren verwandten Figuren —, das andere Seitenpaar soll sich in einem gemeinsamen Antipunkt *U* schneiden, dessen Verbindungslinie mit dem zukünftigen Zentrum, als Richtung der Seitenbilder, auf die Achse *n* senkrecht stehe. Damit ist sichergestellt, daß das Bild des Berührungsvierecks zumindest ein rechteckiges Parallelogramm ist.

Schneiden sich auch die Bilder der Diagonalen des Berührungsvierecks im rechten Winkel, so erhält man das Quadratbild des als Ausgang dargestellten Berührungsvierecks, und in dieses läßt sich tangential nur ein Kreis zeichnen.



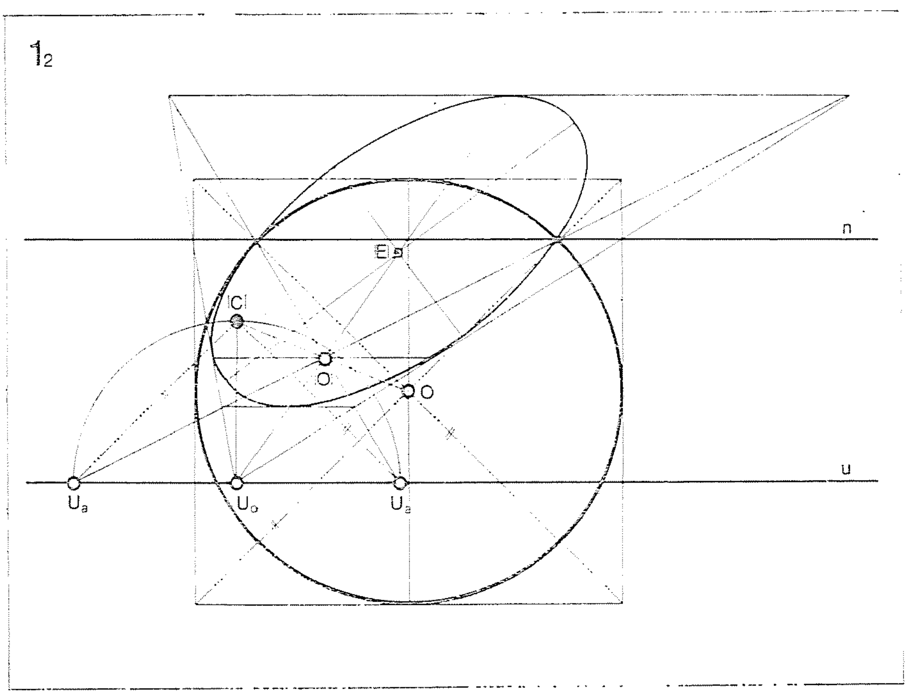
In der Abbildung sind nur die Eckpunkte (*1*), (*2*), (*3*) des Berührungsvierecks angegeben. Durch Verbinden der Tangentenpunkte der zu der Bildebene parallelen Seiten erhält man U_0; aus diesem Antipunkt gehen die anderen zwei Seiten (*1*) (*2*) und (*3*) (*4*) (in der Abbildung nicht bezeichnet) aus.

Die Diagonalen schneiden sich im Punkt (K), der die Gedrehte des Mittelpunktes K des Kreisbildes ist; der Antipunkt der Diagonalen (*1*) (*3*) ist U_a. Die verwandte Diagonale schneidet in der Spiegelung von U_a auf u_0 (nämlich in U_a^*) die Antiachse. Damit die in U_a und U_a^* einlaufenden Diagonalrichtungen aufeinander senkrecht erscheinen, muß sich das Zentrum in einem *Thales*schen Kreis mit dem Durchmesser $U_a\,U_a^*$ befinden. Der Schnittpunkt des *Thales*schen Kreises mit der auf die Achse n senkrechten Geraden $U_0(O)$ ist das Zentrum (C).

Das Bild der Seiten (*1*) (*2*) ist parallel zu $U_0(O)$ und schließt sich an den Achsenpunkt N_0 an; das Bild der Diagonalen (*1*) (*3*) ist parallel zu $U_a(C)$ und schließt sich an N_a an. Der Kreismittelpunkt K ist der Schnittpunkt des Projektionsstrahles (C) (*1*) im Bilde der Diagonalen.

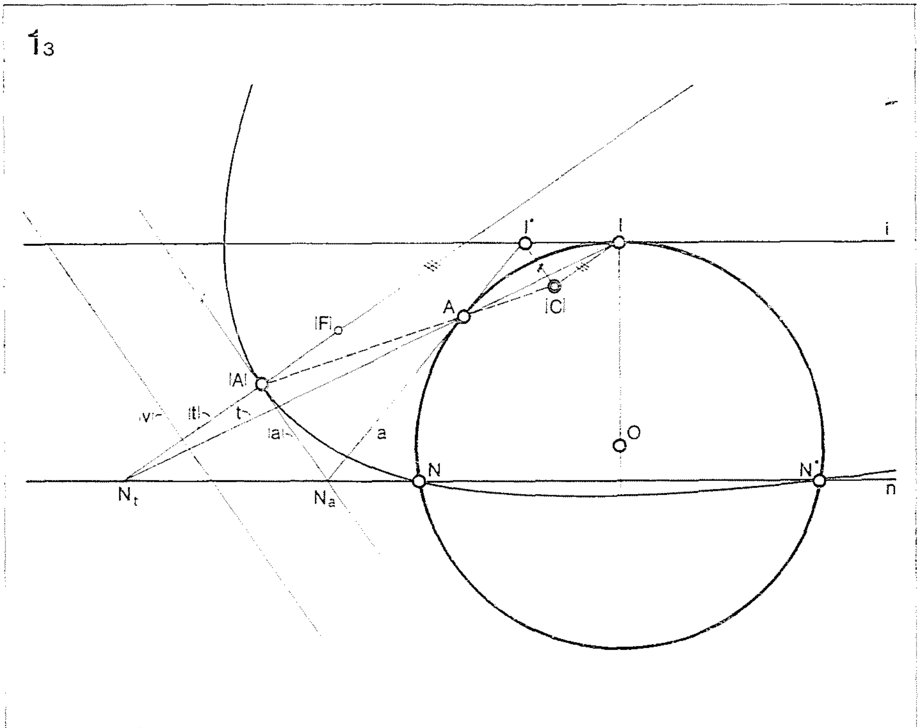
1.2 Gesucht wird das Kreisbild einer durch ihr Achsenpaar angegebenen Ellipse mit dem Mittelpunkt (E).

Gedankengang und Ausführung der graphischen Darstellung stimmen mit dem unter 1.1 Gesagten überein.



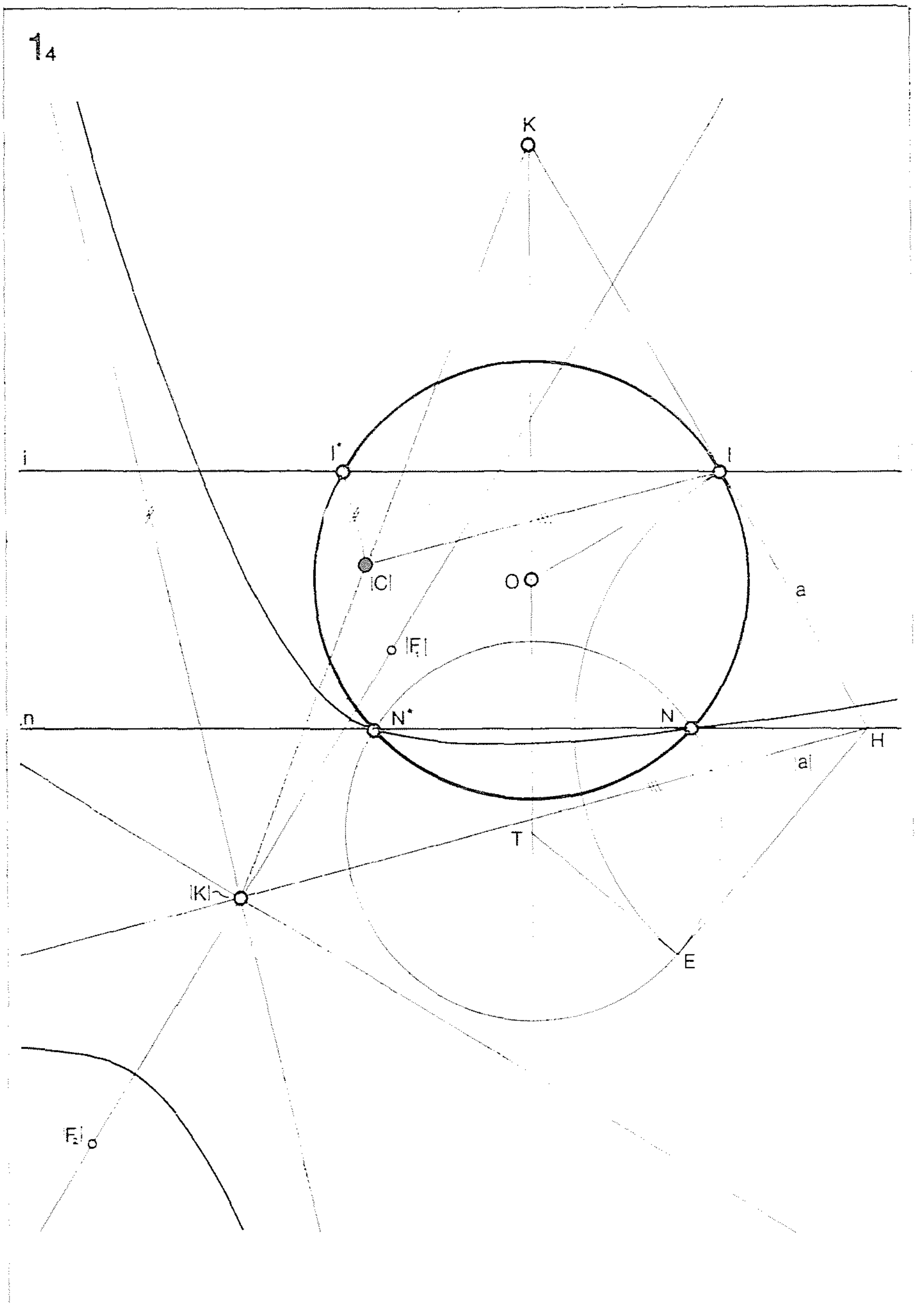
1.3 Gesucht wird das Kreisbild einer Parabel mit dem Brennpunkt (F) und der Leitlinie (v)

Die Parabel schneidet die Achse in den Punkten N, N^*. NN^* ist die Sehne des Kreisbildes. Die Tangente eines unendlich entfernten Punktes der Parabel ist im Bilde die Antiachse i; in dieser wird der Tangentenpunkt — das Bild des Parabelscheitels im Unendlichen — durch die Halbierungssenkrechte



der Sehne NN^* in I abgesteckt (da $NN^* \| i$). Drei Punkte des Kreisbogens sind bekannt, sein Mittelpunkt O kann durch Konstruktion ermittelt werden.

Graphische Bestimmung von (C): Aus dem Achsenpunkt N_a der Parabelscheiteltangente (a) wird zu dem bereits bekannten Kreisbild eine Tangente a gezogen, die den Punkt A berührt. Die Verbindung $(A)A$ ist ein zentraler Projektionsstrahl; die Richtungsgerade der Parabelachse (t) schließt sich an I an und ist parallel zu (t). Jede dieser beiden Geraden muß das Zentrum enthalten, so ergibt sich dieses in ihrem Schnittpunkt (C). Von der Abbildung kann auch abgelesen werden, daß auch die Richtungsgeraden $(C)I$ und $(C)I^*$ der aufeinander senkrechten Geraden (t), (a) aufeinander senkrecht sind.


1₄
K
i
I*
I
|C|
O
a
|F₁|
n
N*
N
H
|a|
T
|K|
E
|F₂|

1.4 Mit ihrem Mittelpunkt (K), den Asymptoten (a) (nur eine mit Buchstabenbezeichnung), mit ihren Brennpunkten ist die Hyperbel gegeben

Die verbundenen Achsenpunkte der Hyperbel liefern eine Sehne NN^* des Kreises. Das Bild der Asymptote (a) der Hyperbel wird das Kreisbild berühren. Der Achsenpunkt von (a) ist H, ein Potenzpunkt der durch die Trägerpunkte N, N^* durchgehenden Kreisreihe. Zu einem beliebigen Kreis mit dem Mittelpunkt T in der Kreisreihe wird aus H eine Tangente gezogen; dann schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkt H und dem Radius HE aus der Antiachse i den Punkt I des Bildes a der Asymptote (a) heraus, in dem a das Kreisbild berührt. I, N, N^* sind drei Punkte des Kreisbildes, dessen Mittelpunkt O konstruiert werden kann.

Konstruktion von (C): I, I^* sind die Bilder der im Unendlichen liegenden Punkte der Hyperbel; der Schnittpunkt der sich parallel zu den Asymptoten an die Punkte anschließenden Richtungsgeraden ist (C).

2. Konstruktion eines Ellipsenbildes

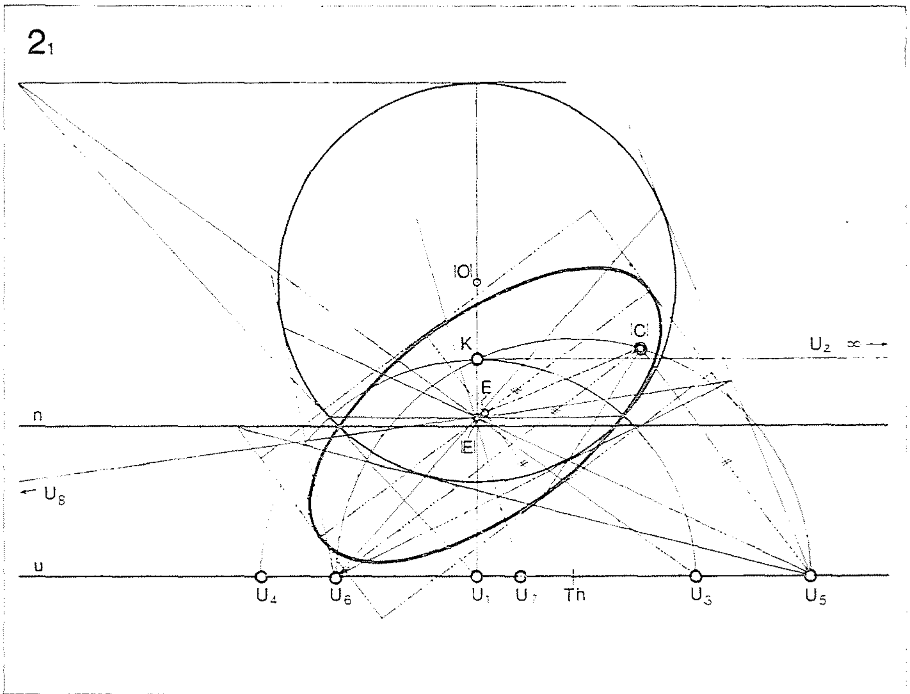
Soll als Bild eine Ellipse, eine Parabel oder Hyperbel erhalten werden, so kann das System der zentralen Kollineation durch drei geeignete Elemente desselben angegeben werden. In diesem Falle wird zu einem schiefen Kegel mit der Leitkurve von Kegelschnittform in einer gegebenen Ebene — als Schnitt — im allgemeinen ein Kegelschnitt zugeordnet, wobei der Bildcharakter des entstandenen Schnittes an keine Bedingung gebunden ist. So erhält man in Abhängigkeit von der Absteckung des Zentrums ein Ellipsen-, Parabel-, Hyperbelbild.

Es werden die Achse n, die Antiachsen u, dann i, sowie (C), das in die Bildebene gedrehte Zentrum, angegeben.

2.1 Als notwendige Bedingung der Konstruktion eines Ellipsenbildes wird festgelegt, daß mindestens ein konjugiertes Durchmesserpaar desselben dargestellt werde. Daraus läßt sich schon das Achsenpaar der Kurve konstruieren.

Gesucht wird das Ellipsenbild eines Kreises mit dem Mittelpunkt (O). Nach 1.1 wird K (dort (C)) konstruiert, von wo aus gesehen im Bilde wieder ein Kreis zurückerhalten würde. Jetzt ist jedoch das Zentrum von diesem unterschiedlich, im voraus gegeben, so kann das Bild des Kreises nur eine Ellipse sein (kein mit der u-Achse gemeinsamer Punkt).

K ist der Trägerpunkt einer zirkulären Strahlenreihe, wo das sich daran anschließende, konjugierte Strahlenpaar KU_1 und KU_2 aufeinander senkrecht steht. Diese werden so gedreht, daß auch die Verbindungen mit (C) ihrer sich



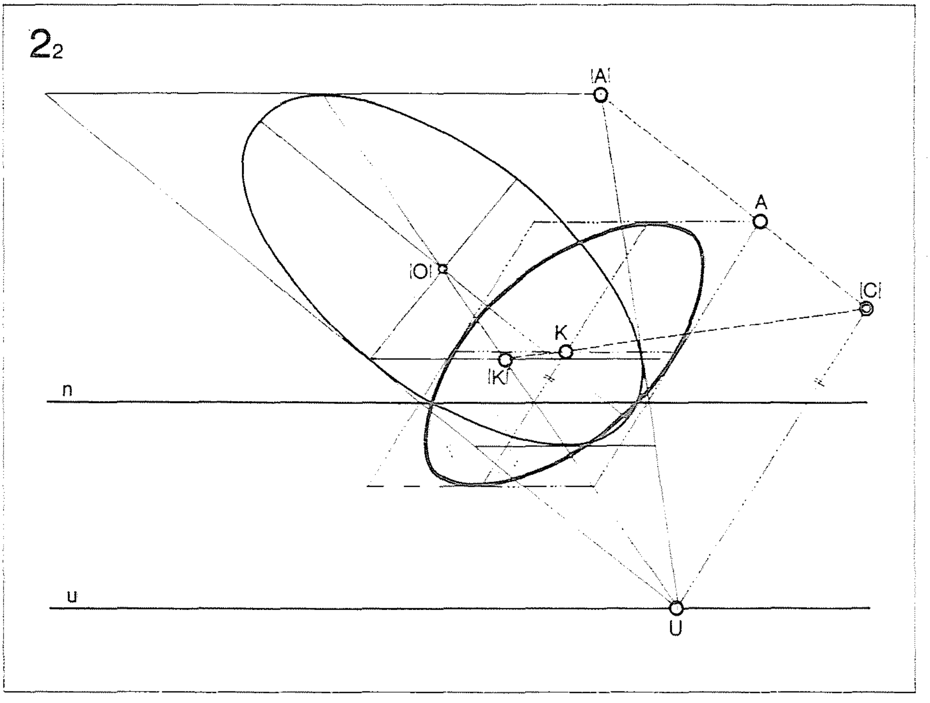
ergebenden, neuen Schnittpunkte mit der Antiachse U aufeinander senkrecht stehen. Die Halbierungssenkrechte des Abschnitts $K(C)$ schneidet die Antiachse u im Mittelpunkt Th des Thalesschen Kreises. Der Kreis wird an K, an (C) anstoßen und die Antiachse in den Punkten U_5, U_6 schneiden. (U_5) (C) steht senkrecht auf $U_6(C)$, und diese beiden Geraden liefern zugleich die Richtungen der Achsen des Ellipsenbildes. Die Achsenendpunkte werden die Tangentenpunkte des durch die aus äußeren Punkten U_5 bzw. U_6 zu dem Kreis gezogenen Berührungslinien bestimmten Berührungsvierecks sein.

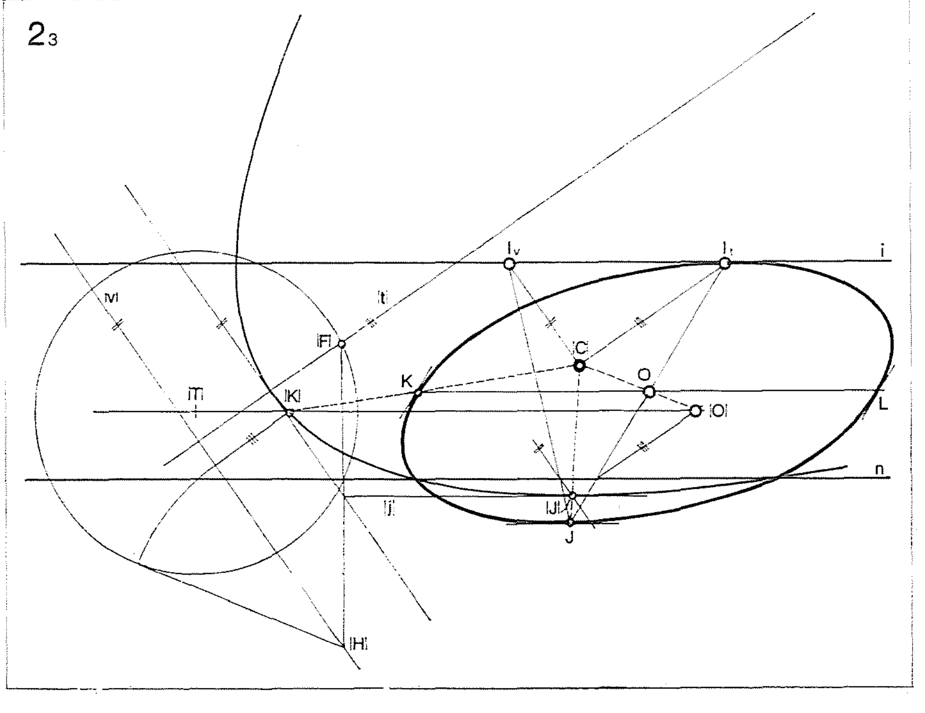
2.2 Gesucht wird das Ellipsenbild einer durch ihren Achsenpunkt angegebenen. Ellipse mit dem Mittelpunkt (O).

Es wird auf das unter 1.1 gesagte verwiesen und auf die Konstruktion nicht näher eingegangen.

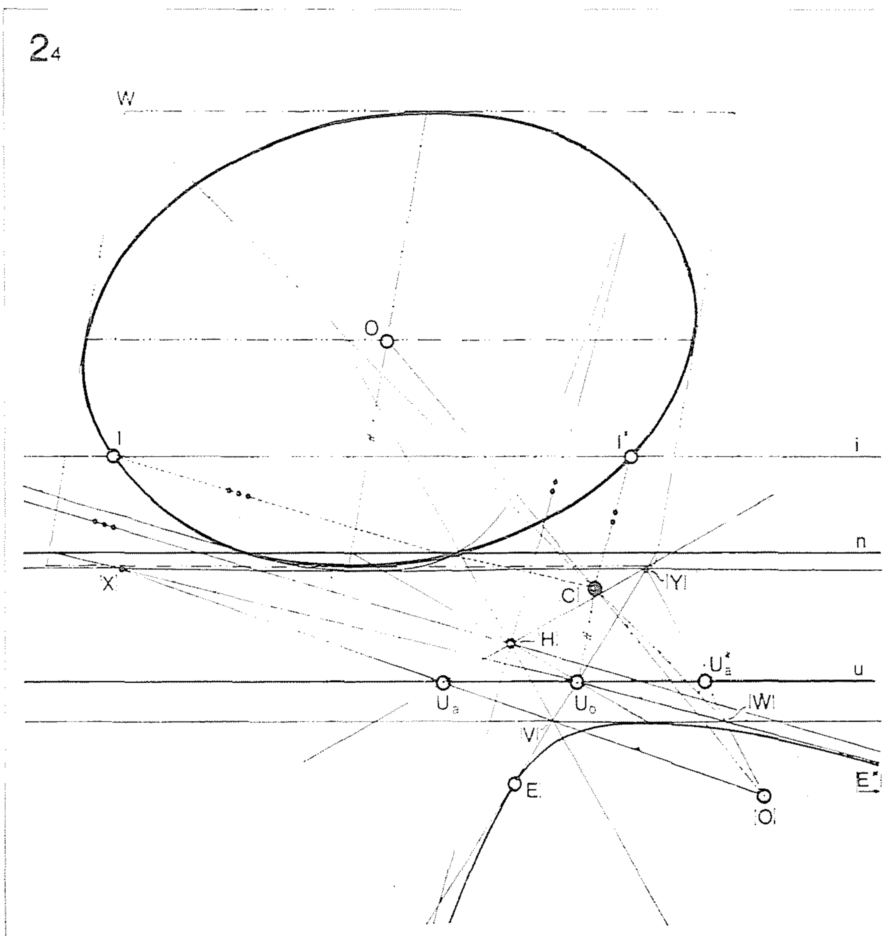
2.3 Eine Parabel wird durch den Brennpunkt (F) und die Leitlinie (v) angegeben

Der Schnittpunkt I_i, in welchem die zu der Parabelachse parallele, in (C) angeschlossene Richtungsgerade die Antiachse i schneidet, ist das Bild eines unendlich entfernten Punktes der Parabel, i ist die Berührungslinie dieses


2₂
|A|
A
|C|
|O|
K
|K|
n
u
U


2₃
i
|M|
|t|
|F|
C
O
K
|T|
|K|
|O|
L
n
|j|
|J|
J
|H|

Punktes. Der Bildpartner der zur Bildebene parallelen Berührungslinie (j) der Parabel ist parallel zu der Berührungslinie. Der Tangentenpunkt J wird durch den Projektionsstrahl (C) (J) abgesteckt. I_iJ ist ein Ellipsendurchmesser (die Verbindung der Tangentenpunkte paralleler Berührungslinien). An den Halbierungspunkt O schließt sich parallel zu den Berührungslinien der konjugierte Durchmesser an. Auf der Gedrehten von I_iJ wird (O) bestimmt, durch den das Gegenstück des konjugierten Durchmessers in der Figur gezeichnet werden kann. Dessen Schnittpunkt (K) mit der Parabel liefert den Endpunkt K des Ellipsendurchmessers, der sich im Bilde als Schnitt des Projektionsstrahles (C)(K) mit dem Durchmesser ergibt. Seine Spiegelung auf O ist L. Das konjugierte Durchmesserpaar IJ und KL des Ellipsenbildes ist also bekannt, daraus können die Achsen konstruiert werden.



2.4 Eine Hyperbel ist durch ihre Brennpunkte, Asymptoten gegeben.

Um bei der Projektion eine geschlossene Figur zu erhalten, ist darauf zu achten, daß die Antiachse u keine der Hyperbelzweige schneide. Das wird so gewährleistet, daß die zu der Achse n parallelen Berührungslinien der Kurve konstruiert werden und u zwischen den beiden Berührungslinien angesetzt wird.

Durch Verbindung der Tangentenpunkte der parallelen Berührungslinien wird ein Hyperbeldurchmesser erhalten, dessen Bild auch im Ellipsenbild ein Durchmesser sein wird. Der Hyperbeldurchmesser schneidet die Antiachse im Punkte U_0. Werden von diesem Punkte aus zu der Hyperbel Berührungslinien gezeichnet, so wird deren Bild parallel zu dem Bild des Durchmessers sein. Die Diagonalen des jetzt erhaltenen Berührungsvierecks (X), (Y), (V), (W) der Hyperbel schneiden sich in (O) und liefern damit die Gedrehte des Mittelpunktes der Ellipse. Wir zeichnen das Berührungsparallelogramm $XYVW$ der Ellipse (nur die Projektion von W und O wurde angegeben): dessen Seitenhalbierenden werden die konjugierten Durchmesser der Ellipse sein.

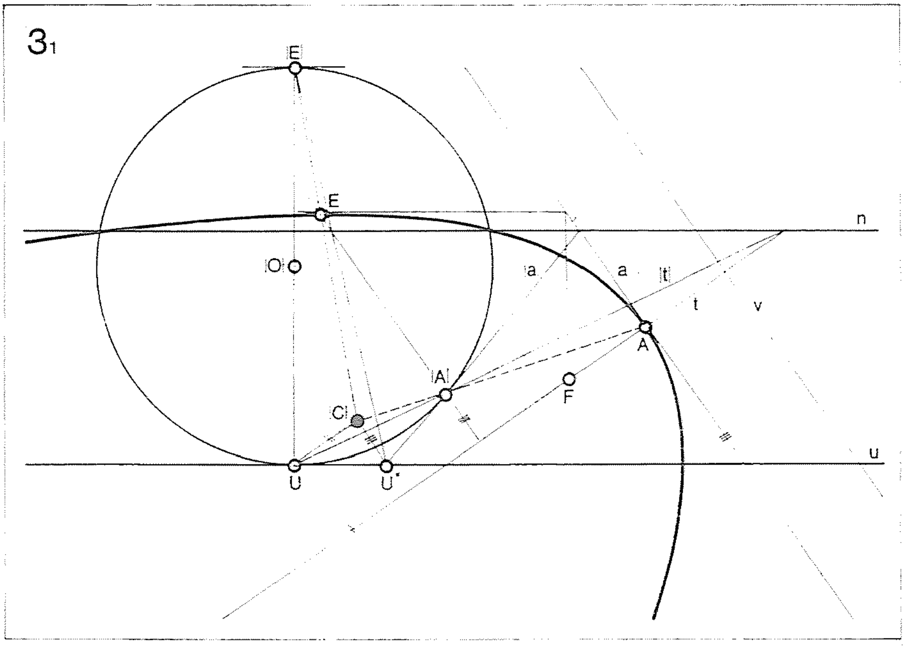
Schließlich werden die Richtungspunkte I, I^* der sich an (C) anschließenden, zu den Asymptoten der Hyperbel parallelen Geraden die Bilder der im Unendlichen liegenden Hyperbelpunkte in der Ellipse in der Antiachse i sein.

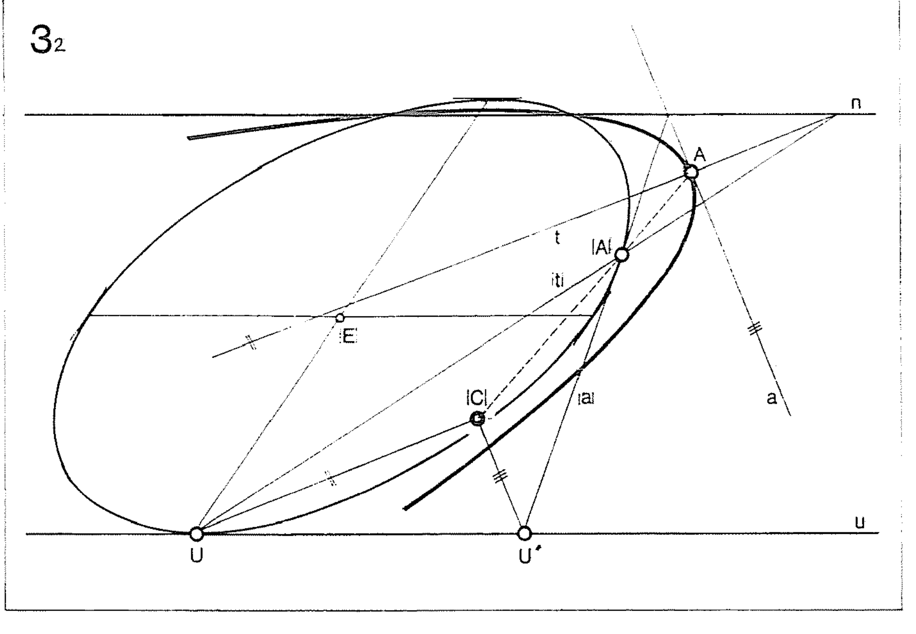
3. Konstruktion eines Parabelbildes

Die Gedrehte der Figur berührt die Antiachse u, man erhält ein Parabelbild. Gesucht werden die Achse der Bildkurve, ihre Scheitelberührungslinie. Schließlich werden in Kenntnis derselben der Brennpunkt, die Leitlinie der Parabel abgesteckt.

3.1 Der Kreis mit dem Mittelpunkt (O) berührt die Antiachse im Punkt U.

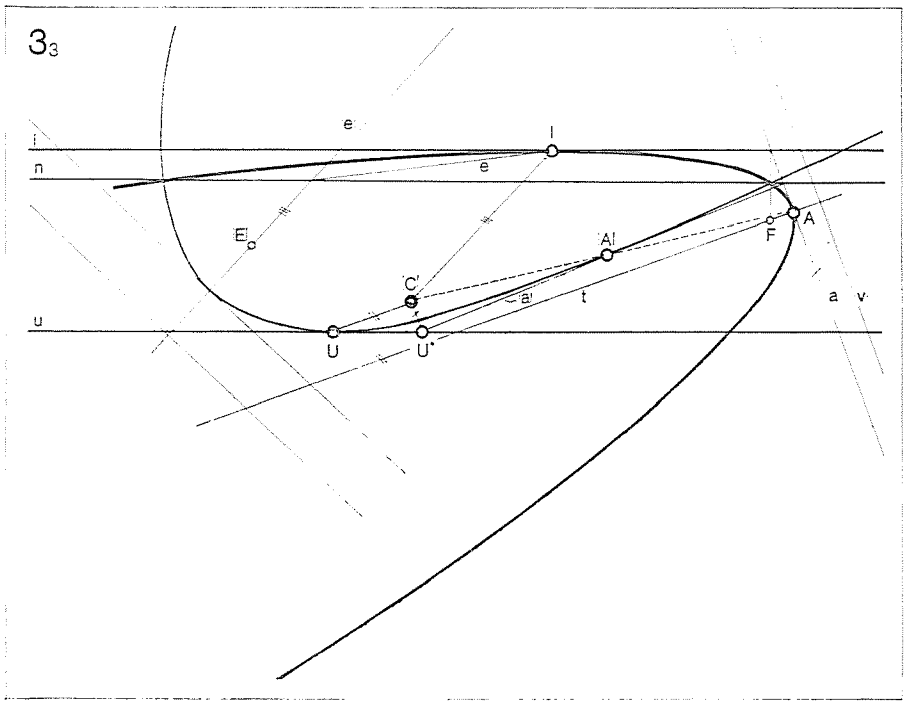
U wird der im Unendlichen liegende Punkt des Parabelbildes sein. Die Verbindung $(C)U$ ist die Richtung der Achse t des Parabelbildes. Auf diese steht $(C)U^*$, die Richtung der Scheitelberührungslinie der Parabel, senkrecht. Die aus U^* zu dem Kreis gezeichnete Berührungslinie (a) wird das Gegenstück der Scheitelberührungslinie der Parabel in der Figur sein. An ihren Achsenpunkt schließt sich die Scheitelberührungslinie a an, die zu der Richtung $(C)U^*$ parallel ist. Auf diese steckt der Projektionsstrahl (C) (A) den Scheitel A der Parabel ab. Die Parabelachse t schließt sich an A an, ist parallel zu $(C)U$. Mit Hilfe der horizontalen Berührungslinie in Punkt E erhält man den Brennpunkt F, dann in einer Entfernung FA von A die Leitlinie v.


3₁
|E|
E
n
|O|
|a
a
|t|
t
v
A
|A|
F
|C|
u
U
U*


3₂
n
A
t
|A|
|t|
|E|
|C|
|a|
a
u
U
U*

3.2 Die Konstruktion des Parabelbildes der Ellipse mit dem Mittelpunkt E stimmt Schritt für Schritt mit dem Gesagten überein.

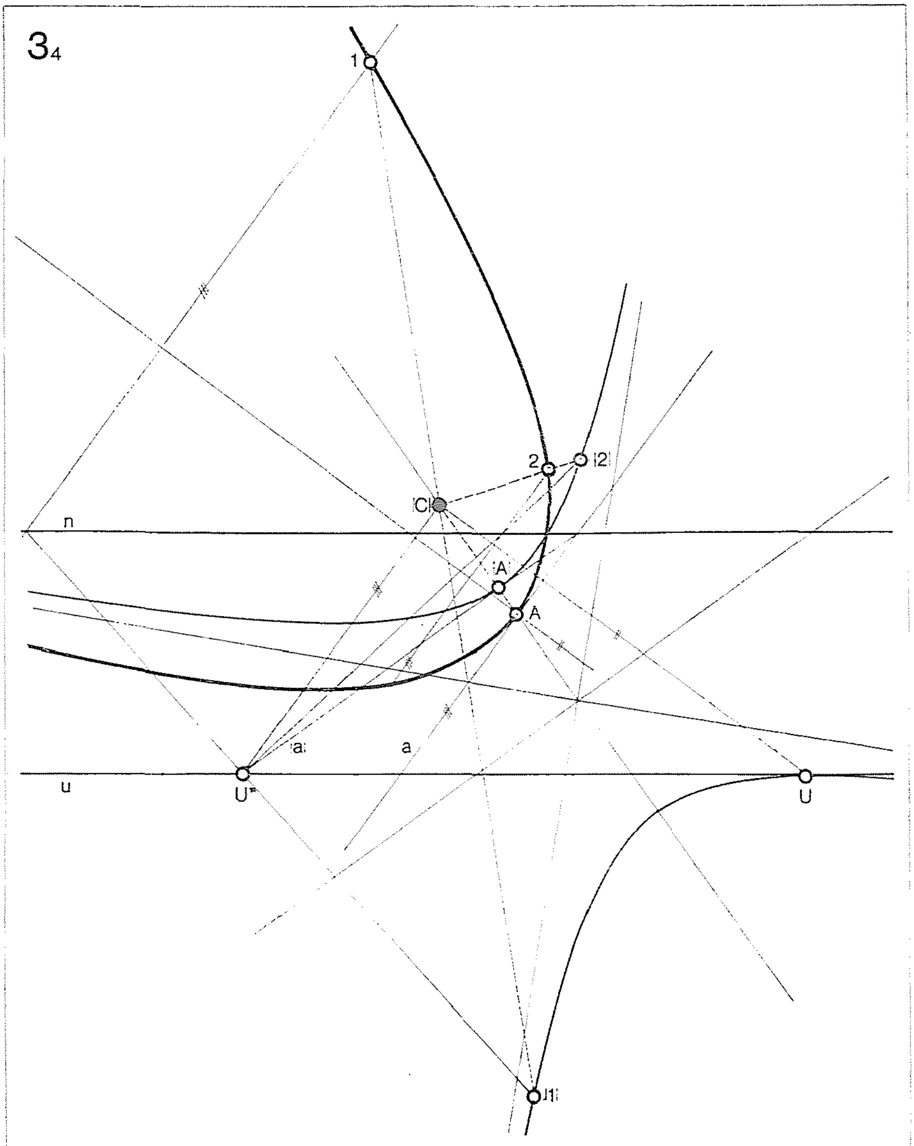
3.3 Es wurde die zentral-kollineare verwandte Parabel mit dem Brennpunkt F der Parabel mit dem Brennpunkt (E) konstruiert. Der unendlich entfernte Punkt der Parabel F ist U, wo die Parabel (E) die Antiachse berührt, während



der unendlich entfernte Punkt der Parabel E der Punkt I ist, wo die Parabel F die Antiachse i berührt. Dadurch veranschaulicht werden, daß die Antiachsen miteinander vertauschbar sind, und sowohl Bild statt Gedrehter als auch Gedrehte statt Bild gesagt werden könnte.

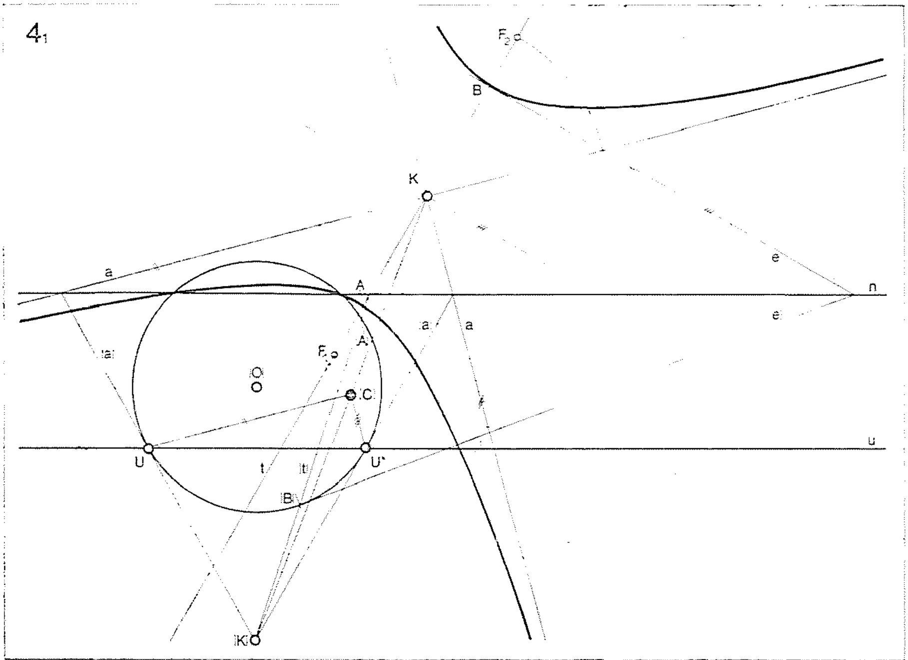
3.4 In Kenntnis des Gesagten erübrigt sich auch die ausführliche Darlegung der Konstruktion des Parabelbildes einer Hyperbelfigur.

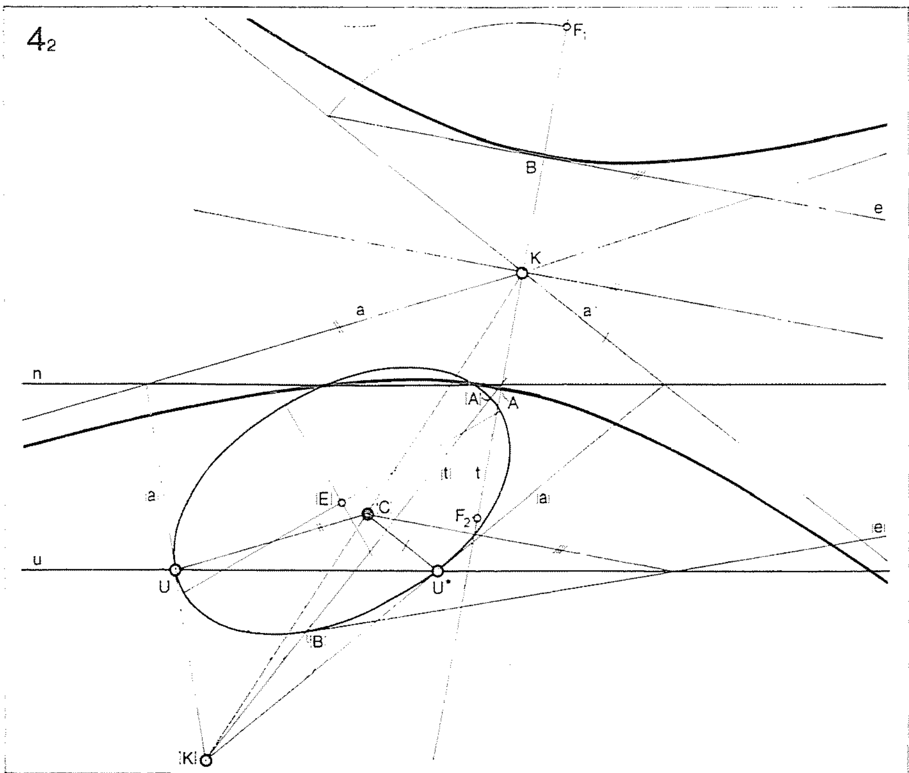
In der Abbildung ist die Konstruktion je eines Punktes beider Hyperbelzweige dargestellt.



4. Konstruktion eines Hyperbelbildes

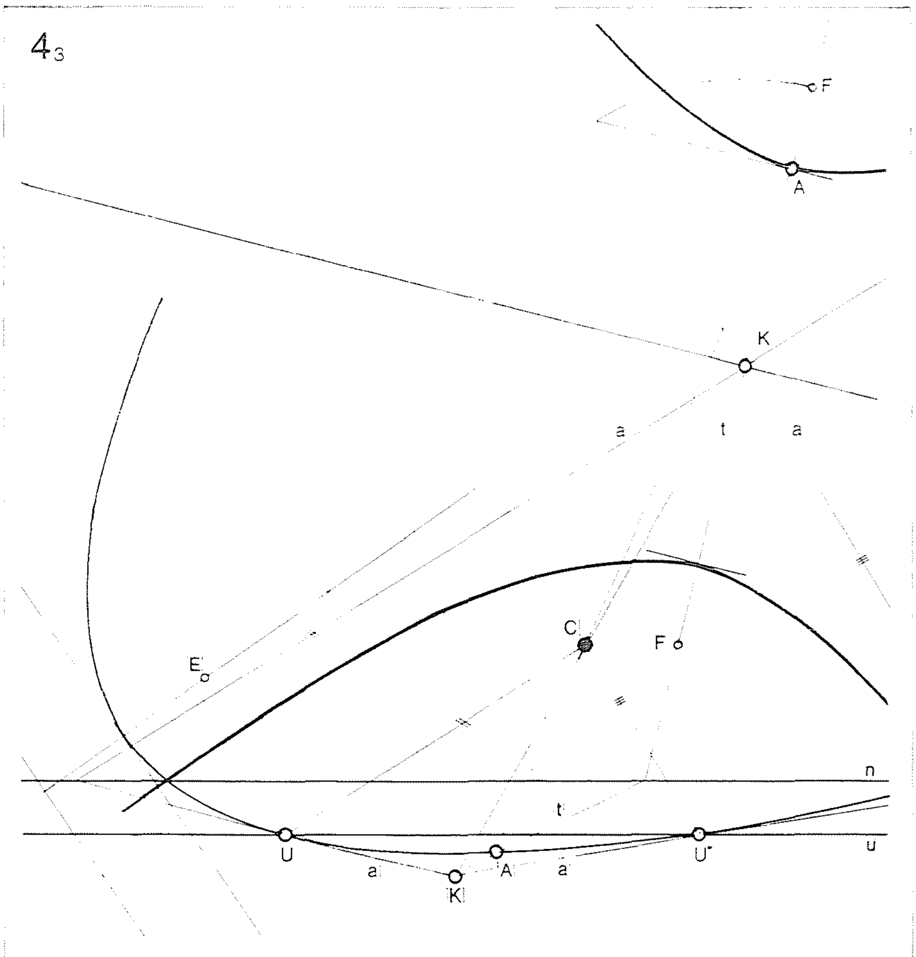
Schneidet die Gedrehte der Figur die Achse *u*, erhält man ein Hyperbelbild. Gesucht werden die Asymptoten der Bildkurve. In deren Kenntnis erhält man aus den Winkelhalbierenden derselben das Achsenpaar der Hyperbel, und nach Bestimmung des Scheitels und der Scheiteltangente die Brennpunkte.


4₁
F₂
B
K
a
e
A
n
(a)
a
e
(a)
F₂
A
(O)
O
C
U
U*
u
t
(t)
(B)
(K)


4₂
F₁
B
e
K
a
a
n
(A)
A
(t)
t
(a)
(a)
(E)
C
F₂
(e)
u
U
U*
(B)
(K)

4.1 Es wird nur die Konstruktion des Hyperbelbildes einer Kreisfigur behandelt.

Der Kreis mit dem Mittelpunkt (O) schneidet die Antiachse u in den Punkten U, U^*. Diese Punkte kommen in Richtung der Asymptoten der Hyperbel im Unendlichen zu liegen. Die Kreistangenten in den Punkten U, U^* sind also die Gedrehten (a) der Asymptoten der Bildkurve. Ihr Schnittpunkt (K) wird beim Abdrehen der Schnittpunkt der Asymptoten und Achsen der Hyperbel sein. An die Schnittpunkte der Achse (A) schließen sich die Bilder der Asymptoten an, von denen die eine zu $(C)U$, die andere zu $(C)U^*$ parallel ist. Ihre Winkelhalbierenden sind die Achsen der Hyperbel. Von den beiden Achsen schneidet das Gegenstück von t in der Figur, nämlich (t), den Kreis in den Punkten (A), (B). Das ist also die reelle Achse: (A), (B) sind die Scheiteln der



Hyperbel in der verwandten Figur. So wird die in (B) gezogene Berührungslinie (e) eine Scheiteltangente sein, und die Richtung von e ist parallel zu der imaginären Achse.

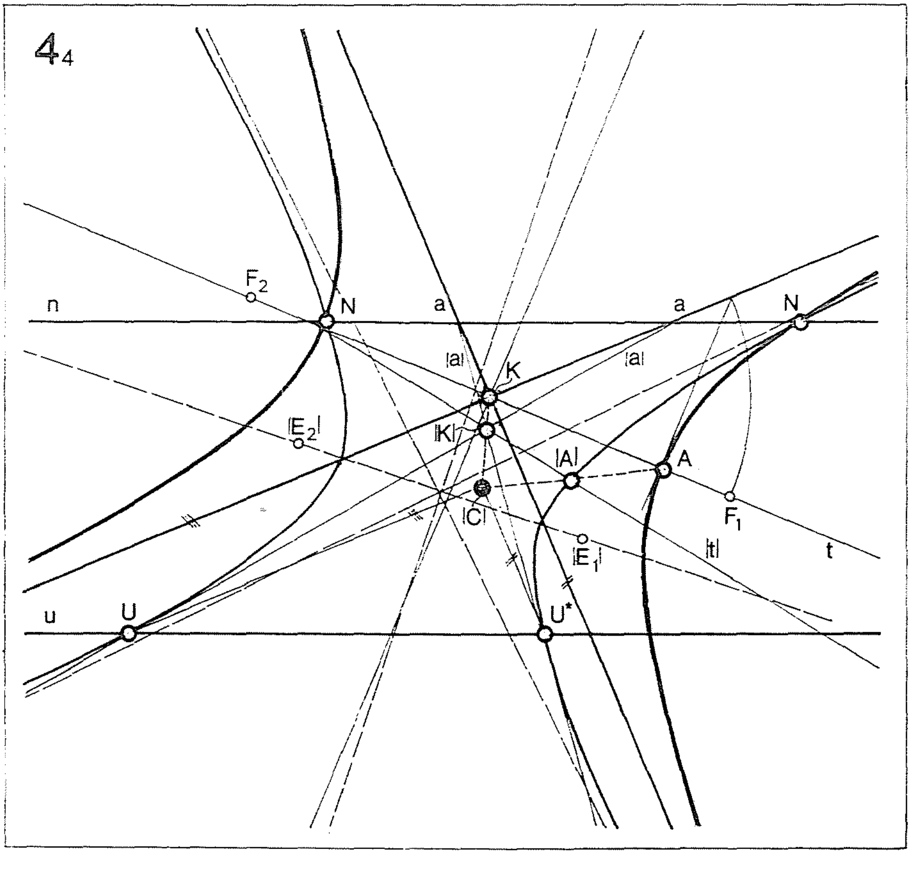
Wird schließlich der Schnittpunkt von Scheiteltangente und Asymptote in die reelle Achse gedreht, erhält man den Brennpunkt der Hyperbel.

Von der Beschreibung von 4.2, 4.3, 4.4 wird abgesehen, die Interpretation der Konstruktionen wird aufgrund der vorigen Ausführungen dem Leser überlassen.

Schließlich muß darauf hingewiesen werden, daß im Gesagten nicht bloß selbstbezweckte Kegelschnittkonstruktionen gezeigt wurden. Diese Verfahren werden auch praktisch angewandt.

Es kommt vor, daß ein Bauobjekt z.B. über einem kreisförmigen oder elliptischen Grundriß errichtet wird, unter Umständen in einzelnen Teilen Kegelschnittbögen enthält.

Von dem Gebäude — von dessen äußerer oder innerer Erscheinung — soll ein perspektivisches Bild gegeben werden. Es ist nicht gleichgültig, wo das



Zentrum angenommen wird, um ein anschauliches Bild zu erhalten. Es ist auch nützlich zu wissen, welche der Grundrißkurve entsprechende Bildkurve — wiederum in Abhängigkeit von dem gewählten Ort des Projektionssystems — man erhält. Auch die Kenntnis des Konstruktionsverfahrens verschiedener Kurvenbilder ist unentbehrlich.

Zu all dem möchte der Verfasser einen bescheidenen Beitrag leisten.

Zusammenfassung

Im Beitrag wird über die möglichen Fälle der Zuordnung zueinander von Kegelschnitten ein Überblick gegeben. Bei den Konstruktionen wird die zentrale Kollineation angewandt. Die Vertauschbarkeit des Figurkegelschnittes und des Bildkegelschnittes, sowie die Bedingungen der Entstehung des vorgeschriebenen Bildes werden besonders unterstrichen.

Zoltán KATONA, H-1521 Budapest