ÜBER EINE INTERESSANTE DURCHDRINGUNG

K. Koris

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie
Technische Universität Budapest, H-1521

(Eingegangen am 1. Juli 1982)

On an Interesting Interpenetration -- The sphere and the torus will be shown to intersect in a real spatial curve of order four. In the case where the sphere is twice tangential to the torus, the interpenetration falls out to two circles.

Wir möchten zu der Durchdringung von Torusfläche, als in der Technik oft vorkommende Flächenform, und Kugel eine kurze Bemerkung machen.

Schreiben wir zuerst die Gleichung der Ringfläche an (Abb. 1). Für die Punkte P der Ringfläche mit der Achse z und dem Meridiankreis k gelten

$$KP_1^2 + z^2 = r^2$$

$$(OP_1 — OK)^2 + z^2 = r^2$$

$$(x^2 + y^2 — R)^2 = r^2$$

oder

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 — (2r^2 + 2R^2)\,x^2 — (2r^2 + 2R^2)\,y^2.$$

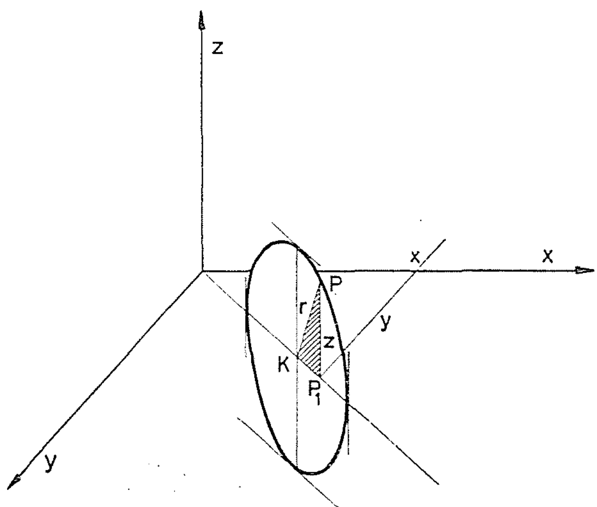

Abb. 1

Die Durchdringung mit einer Kugel ergibt also im allgemeinen eine Raumkurve achter Ordnung.

Auf homogene Koordinaten übergegangen, erhält man:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_3^2 + 2x_2^2 x_3^2 - (2r^2 + 2R^2)\, x_1^2 x_4^2 -$$

$$- (2r^2 + 2R^2)\, x_2^0 x_4^2 - 2r^2 x_3^2 x_4^2 - 2r^2 R^2 x_4^4 + r^2 x_4^4 = 0.$$

Für einen unendlich entfernten Punkt ist $x^4 = 0$.

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_3^2 + 2x_2^2 x_3^2 = 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 0.$$

Die Ringfläche enthält also den unendlich entfernten, imaginären Kreis doppelt. So befindet sich der imaginäre Teil vierter Ordnung der genannten Durchdringung im Unendlichen, d.h. daß die eigentliche Durchdringung eine Raumkurve vierter Ordnung ist.

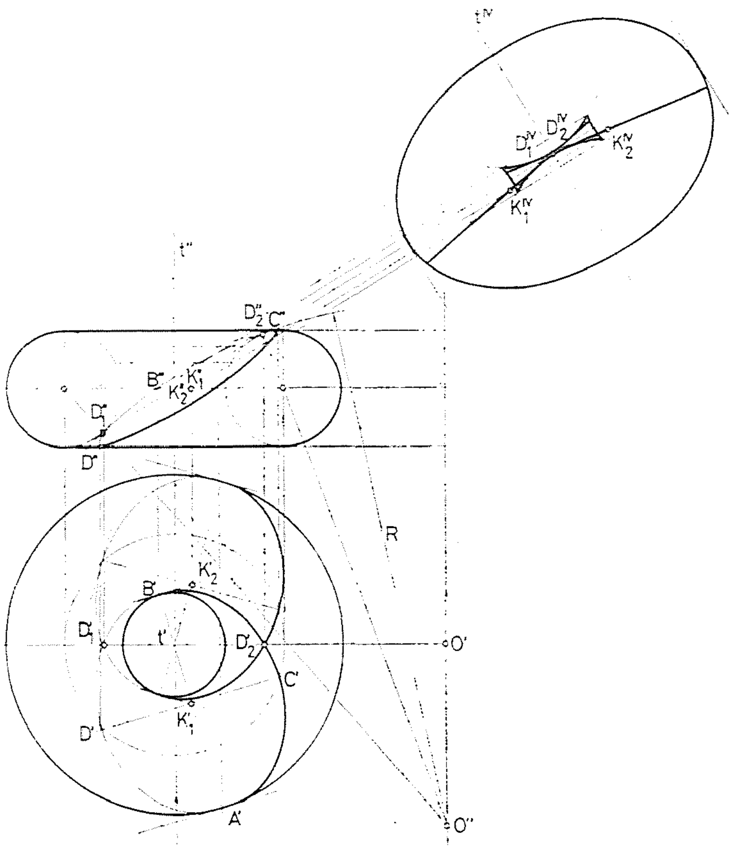

Abb. 2

Haben Ringfläche und Kugel zwei gemeinsame Tangentialebenen, ergeben sich zwei Doppelpunkte der Durchdringungskurve, d.h. die Durchdringung zerfällt in diesem Falle in zwei Kreise.

Abb. 2 zeigt diesen Sonderfall.

Die Ringfläche mit der Achse t sei durch die Kugel mit dem Mittelpunkt 0 und der Radius R in den Hauptmeridianpunkten der Ringfläche, D_1 und D_2, berührt.

Die Mittelpunkte der Durchdringungskreise sind K_1 und K_2. Die Achsenpunkte des Kreises mit dem Mittelpunkt K_1 werden z.B. aus der Kugel durch den Äquator und den Kehlkreis, bzw. durch den obersten und den untersten Kreis herausgeschnitten.

Die vierte Bildebene steht auf die Gerade $(\overline{D_1 D_2})$ senkrecht, also sind hier die Kreise der Durchdringung im Durchmesser zu sehen.

Ergänzend sei noch bemerkt, daß auch die doppelte Tangentialebene — wie bereits gesagt — die Ringfläche in Kreisen schneidet.

Zusammenfassung

In dem kurzen Beitrag wird nachgewiesen, daß sich Kugel und Ringfläche in einer wirklichen Raumkurve vierter Ordnung schneiden. Wird die Ringfläche durch die Kugel zweifach berührt, zerfällt die Durchdringung in zwei Kreise.

Dozent em. Dr. Kálmán KORIS, H-1521, Budapest