DIE GEOMETRISCHEN ORTE DER ACHSEN PERSPEKTIVER STRAHLENBÜSCHEL IN BEWEGUNG AN KREISEN

L. VIGASSY

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie,
Technische Universität Budapest, H-1521

(Eingegangen am 1. Juli 1982)

Geometrical Places of Axes of Perspective Sets of Radii Proceeding along Circles — Let us have two sets of perspective radii of the same orientation, of them one (P_1) is fixed while the other (P_2) is moving, under two conditions:
1. sets of radii P_3, P_4, . . . obtained from P_2 remain congruent with P_2;
2. these sets of radii always remain perspectivic to P_1. Be the track of points P_3, P_4, . . . an arbitrary circle k. It will be demonstrated that perspective axes either produce a set of radii, or envelope an ellipse or a hyperbola, depending on the situation of point P_1 related to circle k.
Finally, a circle k with a corresponding circle k^* will be demonstrated to exist, such that if the holder of perspective sets of radii proceeds along this circle k, then axes of perspective sets of radii always contact circle k^*.

Um den Beitrag zu verstehen, ist die Kenntnis der Grundlagen der projektiven Geometrie erforderlich.

1. *Zwei Strahlenbüschel werden als in der Ebene zueinander perspektiv* $(\diagup\!\mid\!\diagdown)$ *bezeichnet, wenn die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen in einer Geraden liegen* (Abb. 1). Diese Gerade wird Perspektivachse genannt. Die Träger der einzelnen Strahlenbüschel sind P_1 oder P_2 entsprechend. Sind also die einzelnen Strahlenbüschel perspektiv zueinander, so liegen der Schnittpunkt A der Geraden a_1, a_2 der Schnittpunkt B der Geraden b_1, b_2 . . . und der Schnittpunkt X der Geraden x_1, x_2 auf einer Geraden e_{12}.

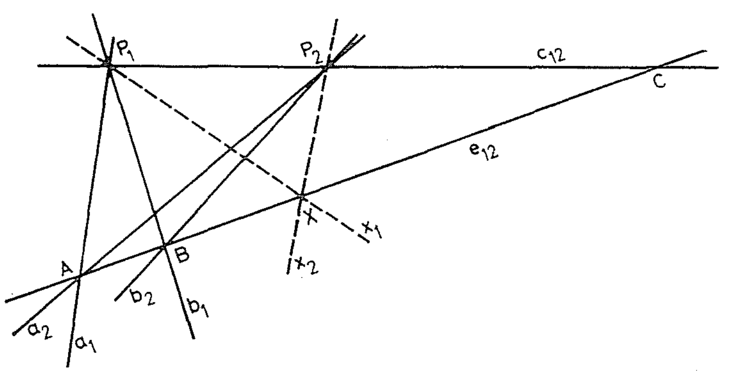

Abb. 1

Aus der Perspektivität folgt, daß von den beiden Strahlenbüscheln nur je zwei Geraden ($a_1 b_1$; $a_2 b_2$) beliebig angegeben werden können; ferner daß die Verbindungsgerade c_{12} der Träger P_1 und P_2 der beiden Strahlenbüschel sich selbst entspricht. Durch die Punkte der Perspektivachse werden also die zusammengehörigen Elemente der beiden perspektiven Strahlenbüschel bestimmt.

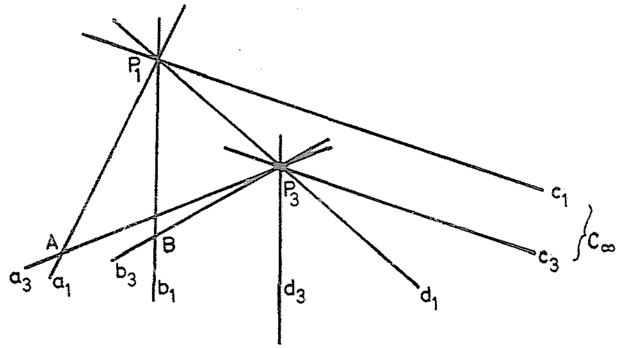

Abb. 2

Wir möchten uns im weiteren nur mit perspektiven Strahlenbüscheln beschäftigen, wo die Träger der einzelnen Strahlenbüschel durch die Perspektivachse nicht getrennt werden. Daraus folgt, daß der Drehsinn der beiden Strahlenbüschel gleich ist.

Wird das Strahlenbüschel P_1 festgehalten, das Strahlenbüschel P_2 aber parallel zu sich selbst in einen beliebigen Punkt P_3 verschoben, wobei die Strahlenbüschel P_2 und P_3 kongruent bleiben, werden sich die Punkte ABC selbstverständlich nicht in einer Geraden befinden (Abb. 2). Die Verbindungsgerade der Träger P_1 und P_3 wird in den beiden Strahlenbüscheln nicht selbstentsprechend sein, d.h. d_1 ist mit d_3 nicht identisch. In einem solchen Falle werden die Strahlenbüschel P_1 und P_3 projektiv (zueinander) genannt $(\overline{\wedge})$. In diesem Falle liegen die Schnittpunkte ($ABC\ldots$) der entsprechenden Geraden nicht in einer Geraden, sondern sie bilden — wie bekannt — einen Kegelschnitt. Will man dennoch, daß die Strahlenbüschel P_1 und P_3 perspektiv seien, so wird das Strahlenbüschel P_3 in einem gewissen Winkel solang gedreht, bis sich die Geraden d_1 und d_3 decken.

Dieser Winkel wird wie folgt ermittelt. Überträgt man d_1 in Abb. 1, so bestimmt d_1 in der Geraden e_{12} den Punkt D, und die Gerade $P_2 D$ wird d_2 sein. $c_2 d_2 \sphericalangle = c_3 d_3 \sphericalangle$. In der Abbildung wurde die Konstruktion nicht durchgeführt.

2. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2* (Abb. 3). *Verschieben wir das Strahlenbüschel P_2 die sich selbst entsprechende Gerade c_{12} entlang in eine beliebige Lage so, daß die Strahlenbüschel P_3 und P_2 kongruent*

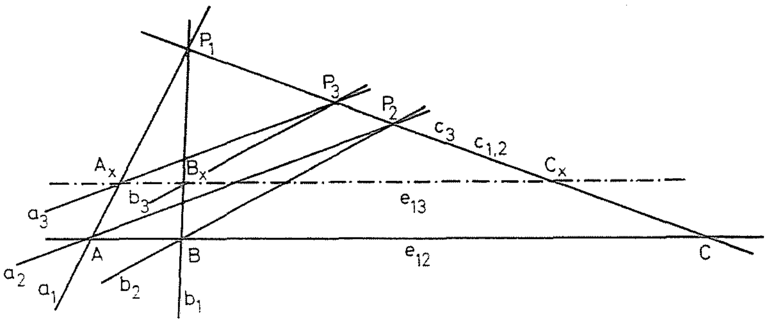

Abb. 3

bleiben. (Das folgt selbstverständlich auch aus dem Gebrauch des Wortes »verschieben«.) *Wo wird die neue Perspektivachse e_{13} sein?*

Da $a_2 \| a_3$ und $b_2 \| b_3$, gelten wegen der ähnlichen Dreiecke:

$$\left.\begin{aligned} P_1A : P_1A_x &= P_1P_2 : P_1P_3 \\ P_1B : P_1B_x &= P_1P_2 : P_1P_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{Daraus folgt, daß } P_1A : P_1A_x = P_1B : P_1B_x.$$

Das ist nur möglich, wenn $e_{13} \| e_{12}$. Es darf also ausgesagt werden: *Bewegt sich das Strahlenbüschel P_2 parallel zu sich selbt so, daß der neue Träger P_3 in der die Träger P_1P_2 verbindenden Geraden c_{12} liegt, dann wird die neue Perspektivachse e_{13} zur ursprünglichen parallel sein.* Das ist kein neuer Zusammenhang.

Neu werden jedoch die Zusammenhänge sein, die die Bewegung der Perspektivachse im Falle beschreiben, wenn der Träger P_2 Kreise verschiedener Größe und verschiedener Lage beschreibt. Im weiteren möchten wir uns mit diesem Falle beschäftigen. (In einer früheren Arbeit des Verfassers [1] wurde nachgewiesen, daß die Perspektivachsen die Tangenten von Parabeln sein werden, wenn der Träger P_2 beliebige Geraden beschreibt. Da darauf nicht gerechnet werden kann, daß der Leser die vorherige Arbeit kennt, ist der Verfasser genötigt, gewisse grundlegende Zusammenhänge zu wiederholen. Nur so wird der weitere Verlauf der Arbeit verständlich sein.)

Ohne die Allgemeingültigkeit zu beeinträchtigen, werden die beiden perspektiven Strahlenbüschel P_1 und P_2 und die Perspektivachse e_{12} in einer womöglich spezifischen Lage angegeben, um das Ziel mit möglichst einfachen Mitteln zu erreichen.

3. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel. Gesucht werden in den beiden Strahlenbüscheln die einander entsprechenden rechtwinkligen Paare* (Abb. 4). Suchen wir also im Strahlenbüschel P_1 zwei zueinander senkrechte Geraden ($q_1 \perp r_1$), bei denen auch die diesen entsprechenden Geraden ($q_2 \perp r_2$) zueinander senkrecht stehen. Die Lösung ist wie folgt: Die halbierende Normale des Abschnitts P_1P_2 schneide die Perspektivachse e_{12} in O. Der Kreis (k_{12}) mit

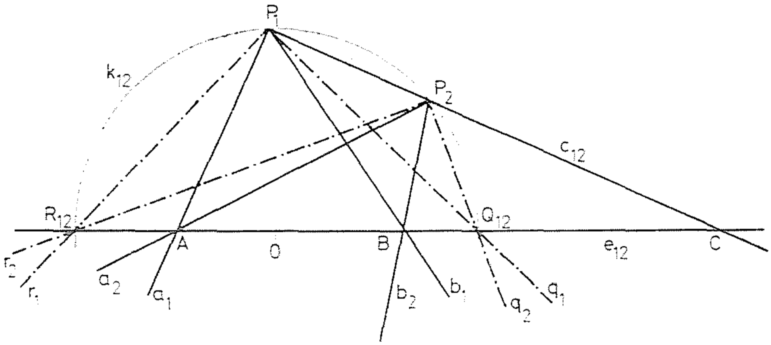

Abb. 4

dem Mittelpunkt O, der durch die Punkte P_1 und P_2 geht, schneidet in der Perspektivachse die Punkte Q_{12} und R_{12}. Nach dem Satz des Thales sind $q_1 \perp r_1$ und $q_2 \perp r_2$.

Da es also immer ein solches rechtwinkliges Paar gibt, werden wir im weiteren statt der beliebigen Geraden a und b das perspektive Strahlenbüschelpaar durch zwei Senkrechtenpaare angeben. Selbstverständlich bleibt die sich selbst entsprechende Gerade c_{12}.

Es gibt nur eine einzige Ausnahme. Dann ist c_{12} senkrecht auf der Perspektivachse. Auch dann gibt es zwei senkrechte Paare, ein Glied derselben ist aber die Gerade c_{12}.

4. Bevor wir auf den geometrischen Ort zu sprechen kommen, müssen noch einige Hilfssätze nachgewiesen werden.

Der erste legt fest, wie groß der durch die neue und die alte Perspektivachse e_{13} und e_{12} gebildete Winkel ist.

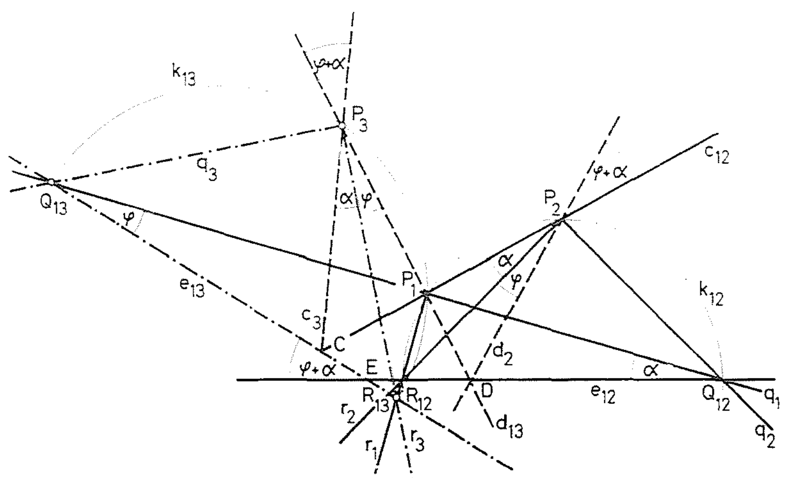

Abb. 5

Um dies zu ermitteln, nehmen wir in Abb. 5 zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2 an, und konstruieren dann zu einem beliebigen Punkt P_3 die Perspektivachse e_{13}.

Da die Strahlenbüschel P_2 und P_3 kongruent sind, gilt:

$$r_3d_3 \sphericalangle = r_2d_2 \sphericalangle = \varphi \text{ und } c_3r_3 \sphericalangle = c_2r_2 \sphericalangle = q_1e_{12} \sphericalangle .$$

In dem Kreis k_{13} mit dem Durchmesser $R_{13}Q_{13}$ befinden sich sowohl P_1 als auch P_3, daher ist

$q_1e_{13} \sphericalangle = r_3d_3 \sphericalangle = \varphi$ (auf einem Bogen ruhende Peripherienwinkel). So ist im Dreieck $Q_{13}EQ_{12}$ $e_{13}e_{12} \sphericalangle = \varphi + \alpha$. Dabei kennzeichnet α die Lage des Strahlenbüschels P_1 im Verhältnis zu der Perspektivachse e_{12}.

Da $P_1P_2P_{12} \sphericalangle = \alpha$, gilt

$$\varphi + \alpha = c_2d_2 \sphericalangle = c_3d_3 \sphericalangle = e_{13}e_{12} \sphericalangle .$$

Im System P_1P_2 ist c_{12} ein sich selbst entsprechendes Geradenpaar, während im System P_1P_3 ein solches d_{13} ist; deshalb darf dieses Ergebnis wie folgt formuliert werden: *Durch die alte und die neue Perspektivachse wird ein gleich großer Winkel, wie durch die neue und die alte sich selbst entsprechende Gerade im beweglichen System gebildet.*

Wird also durch d_2, die die Lage von P_3 bestimmt, ein Winkel von 180° beschrieben, nimmt die Perspektivachse e_{13} alle möglichen Richtungen. Daraus folgt, daß es keine zwei verschiedenen Punkte P_2 gibt, die mit P_1 die gleiche Perspektivachse e_{12} bestimmen.

5. Nun möchten wir erreichen, daß die sich selbst entsprechende Gerade c_{12} zu der Perspektivachse e_{12} parallel sei ($c_{12} \parallel e_{12}$).

In [1] wurde bewiesen, wenn auch die beiden perspektiven Strahlenbüschel mit Hilfe zweier beliebiger Geraden a und b angegeben werden, dann hat das Strahlenbüschel P_2 sogar zwei Lagen P_3, bei welchen die Verbindungsgerade der Träger P_1 und P_3 zu der neuen Perspektivachse e_{13} parallel sein wird. Dieses Ergebnis wird ohne Beweisführung übernommen. Deshalb wird im weiteren das Perspektivsystem in dieser neueren, besonderen Lage angesetzt (Abb. 6).

Nehmen wir also die beiden perspektiven Systeme so an, daß c_{12} zu e_{12} parallel sei. (Im weiteren wird das vorausgesetzt.) So ist leicht einzusehen, daß sich die im vorigen genannte zweite Lösung (P_3) einfach konstruieren läßt.

Die Gerade P_1O sei nämlich d_{13}. Diese bestimmt d_2. Da aber $d_2q_2 \sphericalangle = d_3q_3 \sphericalangle$, können auch q_3 und das auf q_3 senkrechte r_3 einfach gezeichnet werden. In der Abbildung ist $\delta_2 = \delta_3$. Infolge der Symmetrie gilt $\varphi = \delta_2$. Wegen des Scheitelwinkels ist $\psi = \varphi$. Daraus folgt, daß $\delta_3 = \psi$. In diesem Falle ist aber das Viereck $P_1P_3R_{13}Q_{13}$ ein symmetrisches Trapez, d.h. der in der Geraden OP_1 angesetzte Träger P_3 liefert die zweite Lösung.

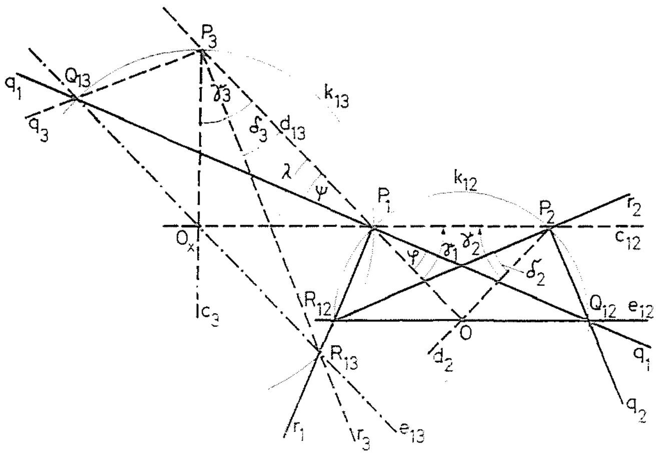

Abb. 6

Der Umkreis dieses Trapezes ist k_{13} mit dem Abschnitt $Q_{13}R_{12}$ als Durchmesser, da $q_1 \perp r_1$ und $q_3 \perp r_3$.

Bemerken wir noch folgendes: Der Schnittpunkt von c_{12} und e_{12} sei O_x, dann wird die Gerade P_3O_x c_3 sein.

Andererseits sind wegen der Symmetrie $\gamma_1 = \gamma_2$,
wegen der Kongruenz $\gamma_2 = \gamma_3$,
wegen des Scheitelwinkels $\gamma_1 = \lambda$.

Dann ist aber das Dreieck $P_1P_3O_x$ gleichschenklig, d.h. die Gerade c_{12} schneidet den Mittelpunkt des Kreises k_{13}.

6. *Gegeben seien zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2 in der Weise, daß die Gerade c_{12} parallel zu e_{12} ist. Bewegen wir das Strahlenbüschel P_2 in eine beliebige Lage P_3, so daß es zu P_1 perspektiv bleibe. Es wird bewiesen werden, daß der Schnittpunkt der Perspektivachsen e_{12} und e_{13} in dem Kreise P_2P_3D liegt, wo D der Schnittpunkt der Geraden d_1 und d_2 auf der Geraden e_{12} ist.*

In Abb. 7 wurde das System $P_1P_2c_{12}q_1q_2r_1r_2e_{12}$ angesetzt, selbstverständlich so, daß $c_{12}||e_{12}$ sei. Wird P_3 beliebig angenommen, so ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden der Träger P_1P_3 mit e_{12} der Punkt D. Die Verbindungsgerade der Punkte D und P_2 ist d_2.

Es sei $d_2r_2 \sphericalangle = \varphi$, dann ist $\varphi = d_3r_3 \sphericalangle$; daraus können r_3 und ihre Normale q_3 gezeichnet werden. Damit haben wir sowohl Q_{13} als auch R_{13}, also auch e_{13}.

Da $c_2c_3 \sphericalangle = d_2d_3 \sphericalangle = q_2q_3 \sphericalangle = r_2r_3 \sphericalangle = \delta$, folgt daraus, daß sich die Punkte $CDQ_{23}R_{23}P_2P_3$ in demselben Kreise k befinden. Auf dem Bogen CD dieses Kreises ruht bei P_2 und P_3 $c_2d_2 \sphericalangle = c_3d_3 \sphericalangle = \varphi + \alpha$. Da es jedoch bekannt ist, daß $c_2d_2 \sphericalangle = e_{13}e_{12} \sphericalangle = \varphi + \alpha$, folgt daraus, daß auch der

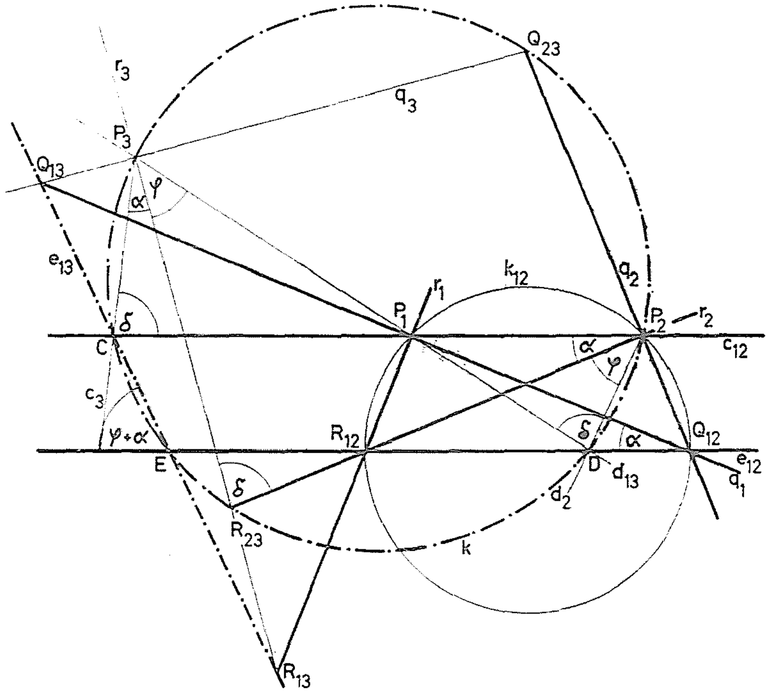

Abb. 7

Schnittpunkt E der Perspektivachsen e_{12} und e_{13} in dem genannten Kreis k liegt.

7. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2. Legen wir auf diese zwei Punkte einen beliebigen Kreis k_1. Es soll bewiesen werden, daß, wo immer an diesem Kreise der Punkt P_3 angenommen wird, die Perspektivachse e_{13} die Perspektivachse e_{12} stets in demselben Punkt E schneiden wird. Dieser Punkt ist eben der Schnittpunkt der Tangenten des Kreises k_1 im Punkte P_2 und der Perspektivachse e_{12}.*

Wir zeichnen das System $P_1P_2c_{12}e_n$ (Abb. 8) und den Kreis k_1, der durch die Punkte P_1 und P_2 geht, aber im übrigen beliebig ist. In diesem Kreis wird an einer beliebigen Stelle der Punkt P_3 angenommen. In der Abbildung ist d_{13} die Verbindungsgerade der Punkte P_1P_3, während D der Schnittpunkt von d_{13} und e_{12} ist. Der im vorigen Abschnitt behandelte Kreis k wird durch die Punkte P_2P_3D bestimmt. Daher ist E der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit e_{12}.

Es sei $P_1P_3P_2 \sphericalangle = \lambda$. Da P_3 in der Kreislinie k_1 liegt, ist dieser Winkel λ infolge der Gleichheit der Peripherienwinkel für jeden Punkt P_3 gleich groß. Dann ist jedoch selbstverständlich auch $DP_3P_2 \sphericalangle$ gleich λ. Da aber der Kreis k die Punkte DEP_2P_3 durchläuft, bildet — aufgrund der Gleichheit der Peri-

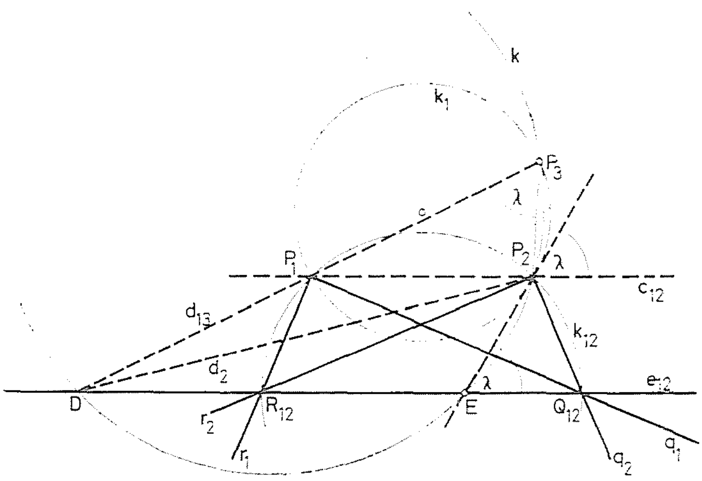

Abb. 8

pherienwinkel — die Gerade P_2E mit e_{12} einen Winkel λ. Das ist nur möglich. wenn die Gerade P_2E die Tangente des Kreises k_1 ist. Es darf also ausgesagt werden:

I. *Zu einem durch die Punkte P_1 und P_2 gehenden Kreis k_1 gehört in e_{12} ein gewisser Punkt E, der durch die Tangente des Kreises k_1 im Punkt P_2 aus der Perspektivachse herausgeschnitten wird. Daraus folgt. daß die zu sämtlichen Punkten P_4 des Kreises k_1 gehörenden Perspektivachsen ein Strahlenbüschel bilden, eines der Glieder desselben auch e_{12} ist.*

Entartet der Kreis k_1 in die Gerade c_{12}, wird der Punkt E ein unendlich weit entfernter Punkt der Geraden e_{12} sein. da dann — wie bekannt — die Perspektivachse e_{13} zu e_{12} parallel ist.

8. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel und ein Kreis k_1^*, für den die einzige Bedingung gilt, daß er durch den Punkt P_1 gehen müsse. Wo ist der geometrische Ort der Perspektivachsen, wenn P_3 den gegebenen Kreis entlang läuft?*

Dieser Kreis k_1^* wird die Gerade c_{12} in einem Punkt P_2^* schneiden (Abb. 9). Zu dem System $P_1P_2^*$ gehört eine zweite Perspektivachse, die zu e_{12} parallel ist. Die Tangente des Kreises in P_2^* schneidet e_{12}^* in einem Punkt E_x. So darf im Sinne des Satzes I ausgesagt werden:

II. *Bewegt sich P_4 eine Kreislinie k_1^* entlang, die durch den Punkt P_1 geht, dann ist der geometrische Ort der Perspektivachsen ein Strahlenbüschel mit dem Träger E_x.*

Diese Feststellung enthält selbstverständlich auch Satz I.

9. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel: P_1 und P_2. Welcher ist der geometrische Ort der Perspektivachsen, wenn sich P_3 einen Kreis mit dem Mittelpunkt P_1 und einem beliebigen Radius entlang bewegt?*

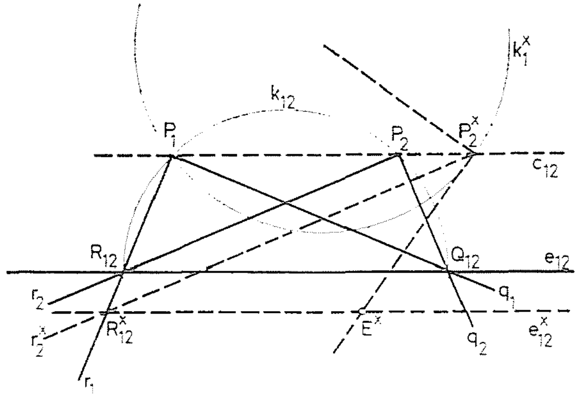

Abb. 9

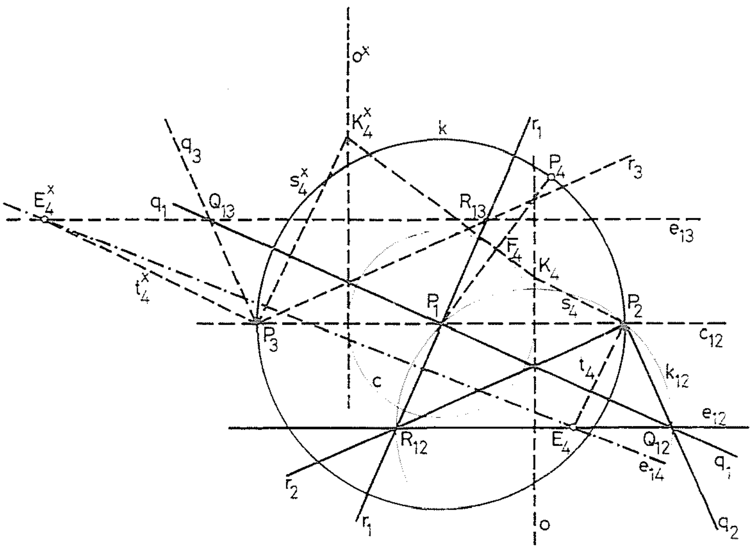

Abb. 10

Wählen wir zuerst den Kreis k (Abb. 10), der durch den Punkt P_2 durchläuft. Dadurch wird die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Würde nämlich ein Kreis gewählt werden, der nicht durch Punkt P_2 geht, würde damit P^* statt P_2 als Schnittpunkt des Kreises mit c_{12} gewählt werden.

Wählen wir am Kreis k den Punkt P_3, welcher dem Punkt P_2 gegenüber liegt. Dann ist im System P_1P_3 $e_{13} \| e_{12}$. Hinsichtlich P_1 sind e_{13} und e_{12} Spiegelbilder.

Wählen wir in der Kreislinie k einen beliebigen Punkt P_4 (dahin kommt P_2) und zeichnen wir e_{14}.

Die Tangente in P_2 des Kreises $P_1P_2P_4$ im System P_1P_2 schneidet in e_{12} den Punkt E_4, der der Schnittpunkt der gesuchten Geraden e_{14} mit e_{12} sein wird.

Die Tangente in P_3 des Kreises $P_1P_3P_4$ im System P_1P_3 schneidet in e_{13} den Punkt E_4^*, der der Schnittpunkt der gesuchten Geraden e_{14} mit e_{13} sein wird. Die Verbindungsgerade von E_4 und E_4^* ist e_{14}.

Würde nun in der Kreislinie ein Punkt P_5 angenommen, würden wir im Laufe der Konstruktion K_5, s_5, t_5 und E_5, sodann K_5^*, s_5^*, t_5^* und E_5^* erhalten.

Die Punktreihe $E_4E_5 \ldots$ ist perspektiv zu der Tangentreihe $t_4t_5 \ldots$ Diese ist kongruent — also projektiv — zu dem um 90° verdrehten Strahlenbüschel, das wiederum zu der Punktreihe $K_4K_5 \ldots$ perspektiv ist.

Die Punkte K_4 und K_4^* befinden sich in der Normalen im Halbierungspunkt F_4 des Abschnitts P_1P_4. Die Punkte F_4F_5 befinden sich in einer Kreislinie c, deren Radius gleich die Hälfte des Radius des Kreises k ist. o und o^* sind zwei Tangenten dieses Kreises c. In den Tangenten o und o^* liegen die Punkte K_4K_5 bzw. $K_4^*K_5^*$ entsprechend.

Da o und o^* zwei unveränderliche feste Tangenten des Kreises c sind, während die Geraden $K_4K_4^*$, $K_5K_5^*$ ... veränderliche Tangenten des Kreises c sind, folgt daraus, daß die Punktreihe $K_4K_5 \ldots$ zu der Punktreihe $K_4^*K_5^* \ldots$ projektiv ist. Die ganze Kette kurz angeschrieben lautet:

$$E_4E_5 \ldots \wedge\ t_4t_5 \ldots \barwedge\ s_4s_5 \ldots \wedge\ K_4K_5 \ldots \barwedge\ K_4^*K_5^* \ldots \wedge$$
$$s_4^*s_5^* \ldots \barwedge\ t_4^*t_5^* \ldots \wedge\ E_4^*E_5^* \ldots$$

Endergebnis:

$$E_4E_5 \ldots \barwedge\ E_4^*E_5^*.$$

Die Geraden, die die entsprechenden Punkte der beiden projektiven Punktreihen (e_{12} und e_{13}) verbinden, sind gerade die Perspektivachsen $e_{14}e_{15}$; ihr geometrischer Ort ist also ein Kegelschnitt.

Wie die zu den P_1 symmetrischen P_2 und P_3 gehörenden Perspektivachsen e_{12} und e_{13} zu P_1 symmetrisch sind, lassen sich alle Perspektivachsen in Paare zusammenfassen. Der fragliche Kegelschnitt besitzt also parallele Tangenten. So ist also dieser Kegelschnitt *zentral*, d.h. keine Parabel.

Wir wissen auch, daß $e_{14}e_{12} \sphericalangle = c_2d_2 \sphericalangle = \varphi$. Daraus folgt, daß dieser Kegelschnitt zu allen Richtungen parallel Tangenten e_{14} hat. So kann er also lediglich eine *Ellipse* sein. Ihr Mittelpunkt ist P_1. Es kann ausgesagt werden:

III. *Läuft P_4 einen Kreis k mit dem Mittelpunkt P_1 und beliebigem Radius entlang, wird der geometrische Ort der zu diesen Trägern gehörenden Perspektivachsen eine Ellipse mit dem Mittelpunkt P_1 sein.*

10. Auch andere wesentliche Daten der Ellipse lassen sich feststellen (Abb. 11).

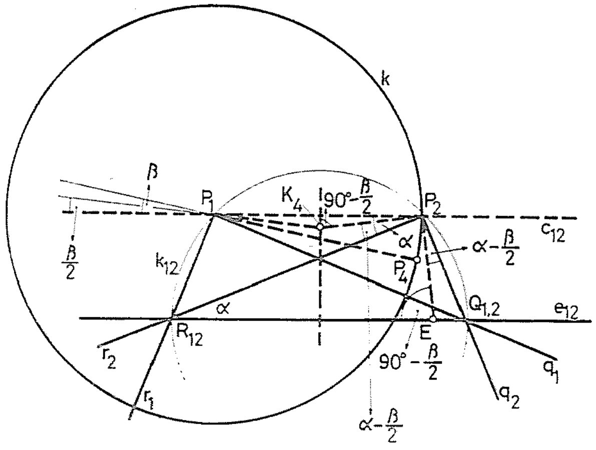

Abb. 11

Gegeben seien das System $P_1 P_2 e_{12} \alpha$ und der Kreis k mit dem Mittelpunkt P_1, der durch Punkt P_2 verläuft. P_4 sei ein Punkt dieses Kreises, ziemlich »nahe« zu P_2. Die Lage von P_4 wird durch den Winkel β angegeben.

Wir konstruieren nach dem im vorigen Punkte Gesagten den Kreismittelpunkt K_4, als den Schnittpunkt der halbierenden Normalen der Abschnitte P_2P_4 und P_1P_2. Nach der Abbildung entstehen die Winkel α, $\beta/2$, $90° - \beta/2$ und $\alpha - \beta/2$. Konstruieren wir nun den Schnittpunkt der zu Punkt P_4 gehörenden Perspektivachse e_{14} mit e_{12}, d.h. den Punkt E. E wird durch die Tangente in P_2 des Kreises mit dem Mittelpunkt K_4 herausgeschnitten.

Die Größen der bei dem Dreieck P_2EQ_{12} entstehenden Winkel sind — aufgrund der Winkel mit auf einander senkrechten Schenkeln — $90° - \beta/2$ und $\alpha - \beta/2$.

Es sei $EQ_{12} = x$, und berechnen wir es aus dem Dreieck P_2EQ_{12} mit Hilfe des Sinussatzes.

Da $P_2Q_{12} = R_{12}Q_{12} \cdot \sin \alpha$, ist

$$\frac{x}{2r \cdot \sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha - \beta/2)}{\sin(90° + \beta/2)}$$

$$x = \frac{2r \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta/2)}{\cos \beta/2}.$$

Bewege sich nun der Punkt P_4 auf dem Kreise k gegen P_2, dann $\beta \to 0$. Daraus folgt:

$$x_{\beta=0} = 2 \cdot r \cdot \sin^2 \alpha.$$

Bewegt sich P_4 in der Kreislinie k zu P_2, so bewegt sich e_{14} zu e_{12}, d.i. dann ergibt E den Schnittpunkt zweier unendlich nahe liegender Ellipsentangenten, d.h. den Tangentenpunkt der Ellipse in e_{12}. Es kann also ausgesagt werden: *Der in der Perspektivachse* e_{12} *befindliche Tangentenpunkt der Ellipse ist eben die senkrechte Projektion von* P_2 *auf* e_{12}, da ja $P_2Q_{12} = 2 \cdot r \cdot \sin\alpha$ und so dessen Projektion $2r \cdot \sin^2\alpha$ ist.

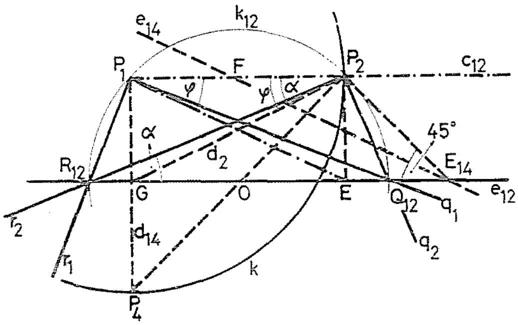

Abb. 12

11. Der in der Geraden e_{12} liegende Tangentenpunkt der Ellipse in Abb. 12 sei E, dann ist der Abschnitt P_1E ein Halbdurchmesser der Ellipse. Seine Länge ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck P_1P_2E zu

$$P_1E = \frac{P_2E}{\sin\varphi}$$

wo φ der spitze Winkel des rechtwinkligen Dreiecks ist. Da aber, als auf dem Bogen P_2Q_{12} ruhender Winkel, $P_2OQ_{12} \sphericalangle = 2\alpha$ ist, gilt

$$P_1E = \frac{r \sin 2\alpha}{\sin\varphi}.$$

Der zu dem Halbdurchmesser P_1E konjugierte Halbdurchmesser liegt auf der Geraden c_{12}. Seine Länge sei P_1F. Diese ist selbstverständlich unbekannt. Infolge der Eigenschaften der konjugierten Durchmesser ist die Ellipsentangente in F (irgendeine e_{14}) parallel zu P_1E, also gilt (nach dem schon mehrfach benutztem Zusammenhang):

$$e_{14}e_{12} \sphericalangle = \varphi = c_2d_2 \sphericalangle.$$

So bestimmt d_2 nach der Abbildung die Lage von d_{14}, und d_{14} schneidet aus dem Kreis k den Träger P_4 heraus, zu dem die gesuchte Gerade e_{14} gehört.

$P_1P_2P_4$ ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, daher schneidet auch die Tangente in P_2 des durch die Punkte $P_1P_2P_4$ durchgehenden Kreises e_{12} im Winkel von 45°, also ist auch das Dreieck P_2EE_{14} ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Da aber $EE_{14} = P_1F$, also gilt

$$P_1F = EE_{14} = P_2E = r \cdot \sin 2\alpha.$$

Bekannt ist nun ein konjugiertes Halbdurchmesserpaar der Ellipse, nämlich P_1E und P_1F. Durch die aus der darstellenden Geometrie wohlbekannte *Rytz*sche Konstruktion lassen sich daraus die Achsen der Ellipse ermitteln.

Nach diesem Satz heißt es nämlich: Wenn $F_1G \perp P_1F$ und wenn $P_1G = P_1F$, und liegt der Punkt G in der Geraden e_{12}, dann ist der aus dem Halbierungspunkt O des Abschnitts GE — als Mittelpunkt — gezeichnete, durch P_1 durchgehende Kreis gerade k_{12} und *so sind die Geraden der Achsen der Ellipse die Geraden q_1 und r_1.*

Über die Bestimmung der Längen der Achsen ($2a$ und $2b$) gibt die *Rytz*sche Konstruktion Aufschluß, u. zw.:

$$a = R_{12}E = r + r \cdot \cos 2\alpha = 2r \cdot \cos^2\alpha$$

$$b = EQ_{12} = r - r \cdot \cos 2\alpha = 2r \cdot \sin^2\alpha.$$

Als Zusammenfassung der Ergebnisse läßt sich feststellen:

III*. *Durchläuft der Punkt P_4 einen Kreis, dessen Mittelpunkt P_1 und einer seiner Punkte P_2 ist, dann ist der geometrische Ort der erhaltenen Perspektivachsen eine Ellipse mit dem Mittelpunkt P_1, der großen Achse in q_1 und der kleinen Achse in r_1. Die Länge der halben großen Achse $a = R_{12}E$, die Länge der halben kleinen Achse $b = EQ_{12}$. Der Tangentenpunkt E der Ellipse in der Geraden e_{12} ist aber eben die senkrechte Projektion des Punktes P_2 auf e_{12}.* Aus der *Rytz*schen Konstruktion folgt auch, daß $a + b = 2r$.

12. Gegeben sind zwei gleichgerichtete perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2. Welcher ist der geometrische Ort der Perspektivachsen, wenn P_4 eine in P_2 sitzende Kreislinie k durchläuft? P_1 sei im Inneren des Kreises (Abb. 13).

Dadurch, daß sich der Kreis k in P_2 anschließt, wird die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt. Schließt sich nämlich der Kreis k nicht an P_2 an, könnte ein Schnittpunkt der Geraden e_{12} mit dem Kreis k für P_2 gewählt werden. Dann ist $e_{12}^* \| e_{12}$.

Der Mittelpunkt des Kreises k_{12} sei D und der andere Schnittpunkt der Geraden P_1D mit dem Kreis k sei P_3. Aus dem bisher Gesagten ist bekannt, daß im System P_1P_3 e_{13} parallel zu der Geraden P_1P_3 ist.

Ein beliebiger Punkt des Kreises k sei P_4, dann erhält man den Schnittpunkt E_4 der Perspektivachse e_{14} mit e_{12} durch die übliche Konstruktion wie folgt: Die Tangente im Punkte P_2 des durch Punkte $P_1P_2P_4$ durchgehenden Kreises mit dem Mittelpunkt O_4 schneidet in e_{12} den Punkt E_4.

Diese Konstruktion läßt sich auch in projektiver Weise beschreiben.

Werden die Punkte P_4 von P_2 aus projiziert, erhält man ein Strahlenbüschel. Wird auf jedes Glied des Strahlenbüschels von O aus eine Normale gestellt, erhält man ein mit dem vorigen kongruentes, also projektives Strahlenbüschel. Wird dieses Strahlenbüschel durch die halbierende Normale des

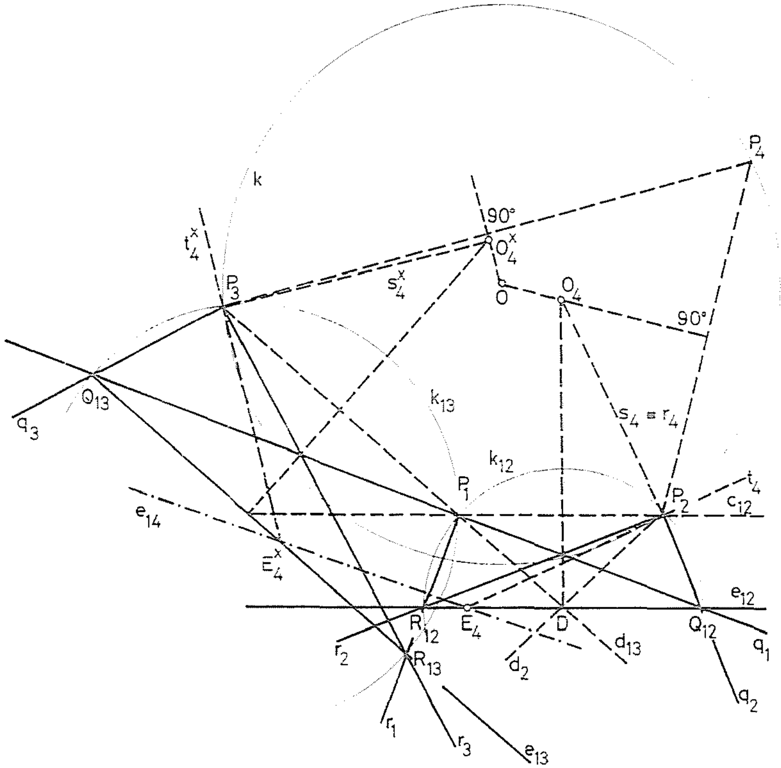

Abb. 13

Abschnitts P_1P_2 geschnitten, erhält man die zu dem Strahlenbüschel perspektive Punktreihe $O_4 \ldots$. Diese Punktreihe von P_2 aus projiziert, erhält man ein zu ihr perspektives Strahlenbüschel $s_4 \ldots$ (die Halbmesser der Kreise). Die Tangenten in P_2 der Kreise $P_1P_2P_4$ stehen auf den jeweiligen Halbmessern senkrecht, das Strahlenbüschel der Tangenten und das Strahlenbüschel der Halbmesser sind kongruent (also auch projektiv). Das Strahlenbüschel der Tangenten ist hingegen zu der Punktreihe E_4 perspektiv. Das läßt sich kurz wie folgt anschreiben:

$$\mathrm{P}_2(P_4\ldots)\ \overline{\wedge}\ (O) \mathrel{\wedge\kern-0.6em|}\ (O_4\ldots) \mathrel{\wedge\kern-0.6em|}\ (r_4\ldots)\ \overline{\wedge}\ (t_4\ldots) \mathrel{\wedge\kern-0.6em|}\ E_4\ldots,$$
$$\text{also } P_2(P_4\ldots)\ \overline{\wedge}\ (E_4\ldots).$$

Ein gleiches Ergebnis wie im System P_1P_2 erhält man auch im System P_1P_3, d.h.:

$$P_3(P_4\ldots)\ \overline{\wedge}\ (E_4^*\ldots).$$

Da jedoch sowohl P_2 als auch P_3 und P_4 Punkte desselben Kreises k sind, ist das Strahlenbüschel $P_2(P_4\ldots)$ zu dem Strahlenbüschel $P_3(P_4\ldots)$ projektiv. Daraus folgt, daß

$$E_4\ldots \overline{\wedge}\, E_4^*\ldots$$

Die Verbindungsgeraden $(e_{14}\ldots)$ der entsprechenden Punkte zweier projektiver Punktreihen bilden aber einen Kegelschnitt.

Da P_1 ein innerer Punkt im Kreise k ist, gehören zu jeder beliebigen, durch den Punkt P_1 durchgehenden d_{14} P_4 und P_4^*, der Kegelschnitt hat also in jedem Falle zwei parallele Tangenten. Daher darf festgestellt werden, *daß der betreffende geometrische Ort eine Ellipse ist.*

Ist jedoch P_1 ein äußerer Punkt des Kreises k, dann ist eine sich an P_1 anschließende Gerade d_{14} möglich, die den Kreis k nicht schneidet, somit existieren die dazu gehörenden beiden parallelen Tangenten nicht.

13. *Der Fall des außerhalb des Kreises K_0 liegenden Punktes P_I.*

Zweifellos existieren in diesem Falle Richtungen, zu denen der Kegelschnitt keine parallelen Tangenten hat. Es darf dennoch nicht ohne weiteres ausgesagt werden, daß dann der gesuchte geometrische Ort eine Hyperbel sei. Die Beweisführung ist nähmlich darauf aufgebaut, daß zu P_2 der eine Schnittpunkt der Geraden c_{12} und des gegebenen Kreises k gewählt wurde. Es kann aber auch ohne Schwierigkeit ein Kreis k gezeichnet werden, den weder c_{12} noch d_{13} schneiden. Damit versagt die ganze Beweisführung schon im Ausgangspunkt. Es muß eine andere Lösungsmethode angewandt werden (Abb. 14).

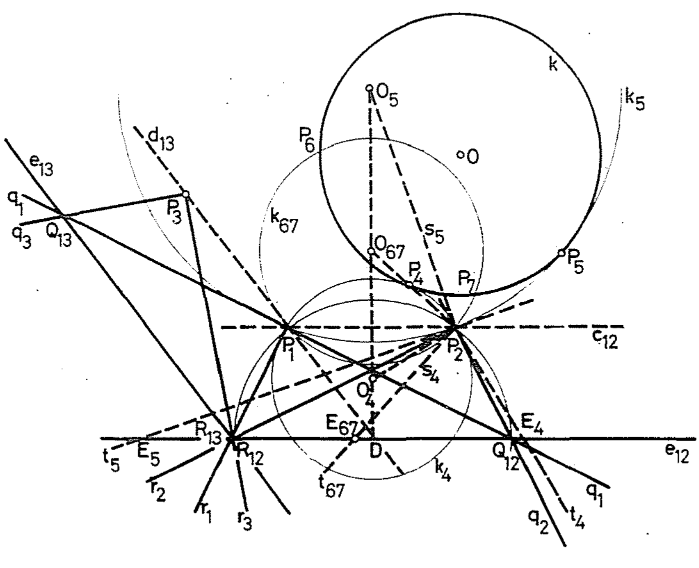

Abb. 14

Auch wenn c_{12} den Kreis k schneiden würde, könnte in c_{12} ein P_2^* so angesetzt werden, daß auch dieser Punkt P_2^* außerhalb des Kreises k liege.

Da nun sowohl P_1 als auch P_2 äußere Punkte des Kreises k sind, wird es zwei Kreise k_4 und k_5 geben, die durch die Punkte P_1 und P_2 durchgehen und den Kreis k berühren. Die Konstruktion läßt sich mit der Potenz des Kreises leicht durchführen. In der Abbildung ist das nicht zu sehen. Die Tangenten dieser Kreise in P_2 schneiden e_{12} in den Punkten E_4 und E_5. Das sind Punkte von e_{12}, von denen aus zu dem gesuchten geometrischen Ort nur je eine Tangente gezeichnet werden kann, da ja zu dem zum einzigen Tangentenpunkt P_4 des Kreises k_4 gehörenden E_4 nur eine einzige Perspektivachse gehört. Das bedeutet, daß E_4 und E_5 die Tangentenpunkte von e_{14} und e_{15} sind.

Von den Punkten $E_{6,7}$ des Abschnitts E_4E_5 aus lassen sich zu dem gesuchten geometrischen Ort je zwei Tangenten zeichnen, da ja der Kreis $k_{6,7}$ den Kreis k in zwei Punkten (P_6, P_7) schneidet und zu jedem Schnittpunkt je eine durch den Punkt $E_{6,7}$ durchgehende Perspektivachse, e_{16} und e_{17} gehören. Hingegen kann keine Perspektivachse als Tangente aus einem beliebigen äußeren Punkt des Abschnitts E_4E_5 gezogen werden.

Beschreibt Punkt P_2 die ganze Gerade c_{12}, dann beschreibt die Perspektivachse e_{12} zu sich selbst parallel die gesamte Ebene. So können sämtliche Punkte der Ebene in Frage kommen. Es kann also gesagt werden, daß in der Ebene nur Punkte existieren, von denen aus zu dem gesuchten geometrischen Ort keine oder eine einzige oder zwei Tangenten gezogen werden können. Ein derartiger geometrischer Ort ist jedoch ein Kegelschnitt,u. zw. eine Hyperbel, weil es auch Richtungen gibt, zu denen parallel keine Tangente zu dem Kegelschnitt gezogen werden kann.

Da P_1 ein äußerer Punkt ist, können von diesem aus zu dem Kreis k zwei Tangenten gezeichnet werden. Die Zahl der zu den Tangentenpunkten gehörenden Perspektivachsen ist je eins. Diese werden die Asymptoten der Hyperbel sein.

Wird an P_2 eine Gerade d_2 angeschlossen, bei der d_{14} den Kreis k nicht schneidet, dann existiert die entsprechende Perspektivachse e_{14} nicht. Es gibt also Richtungen, zu denen parallel zu dem Kegelschnitt keine Tangenten gezogen werden können.

Die vorstehende Überlegung ist eine einfache Beweisführung für alle Fälle, sogar wenn es sich um die geometrischen Orte der zu den Punkten nicht nur eines Kreises sondern auch einer Geraden p gehörenden Perspektivachsen handelt. (Siehe [1].)

Als Schlußfolgerung zusammengefaßt:

IV. *Der geometrische Ort der zu den Punkten eines Kreises k gehörenden Perspektivachsen ist die Tangentenreihe einer Ellipse, oder ein Strahlenbüschel, oder die Tangentenreihe einer Hyperbel, je nach dem, ob sich der Punkt P_1 innerhalb des Kreises k befindet, ein Punkt des Kreises k ist oder außerhalb desselben liegt.*

14. Betrachten wir nun kurz noch, *welcher der geometrische Ort der Perspektivachsen sein wird, wenn der Träger P_4 eine beliebige Gerade p beschreibt.*

Es soll untersucht werden, wie viele Perspektivachsen von dem geometrischen Ort aus an einen beliebigen Punkt E angeschlossen werden können. Das perspektive System sei in der üblichen Weise angegeben und gegeben sei ein beliebiger Punkt E (Abb. 15). Lösung: Ziehen wir durch den Punkt

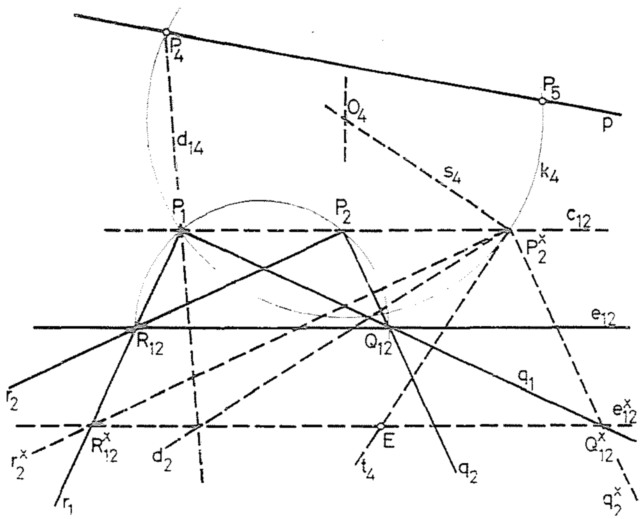

Abb. 15

E eine zu e_{12} parallele Gerade e_{12}^*. Zu dieser werden die Elemente $p_2^* q_2^* r_2^*$ konstruiert, so daß nun bereits im System $P_1 P_2^*$ gearbeitet wird.

Die Gerade EP_2^* sei die Tangente eines Kreises k_4, der durch die Punkte P_1 und P_2^* geht, dann steht der Kreisradius s_4 senkrecht auf die Tangente t_4, und damit wird O_4 der Mittelpunkt dieses Kreises k_4 sein. Dieser Kreis schneidet die Gerade p im allgemeinen in zwei Punkten (P_4 und P_5). Dann ist aber, wie das aus dem bisher Gesagten zu erkennen ist, der Schnittpunkt der zu den Punkten P_4 und P_5 der Geraden p gehörenden Perspektivachsen der angegebene beliebige Punkt E. Das bedeutet mit anderen Worten, daß *von dem geometrischen Ort aus zwei Achsen durch einen beliebigen Punkt E durchgehen.*

Es kann auch vorkommen, daß die Gerade p den Kreis k_4 berührt oder nicht schneidet. Dann geht durch den Punkt E nur eine einzige Perspektivachse oder gar keine.

Die beschriebene Konstruktion läßt sich immer durchführen. *Der gesuchte geometrische Ort ist also ein Kegelschnitt, da zu einem Punkt höchstens zwei Tangenten gezogen werden können.*

V. Es ist aber leicht einzusehen, daß *dieser Kegelschnitt eine Parabel ist.* Deswegen untersuchen wir, wie viele zu einer gegebenen Richtung parallele Tangenten der Kegelschnitt hat.

Da $c_2 d_2 \sphericalangle = e_{14} e_{12} \sphericalangle$, wird eine beliebige Gerade d_2 angenommen und zu dieser d_{14} konstruiert, so schneidet letztere die Gerade p nur in einem einzigen Punkt. Also existiert nur eine einzige zu der gegebenen beliebigen Richtung parallele Tangente.

15. *Gegeben sind in der üblichen Weise zwei gleichgerichtete Strahlenbüschel. Wählen wir einen Kreis k, dessen Mittelpunkt O in der Geraden r_1 liegt, und wo sich der Punkt P_1 im Inneren des Kreises befindet. Was ist von der dem geometrischen Ort der Perspektivachsen entsprechenden Ellipse bekannt?*

Es ist bekannt, daß wenn sich P_2 die Gerade c_{12} entlang bewegt, wird e_{12} nur parallel verschoben. Verschieben wir also P_2 solange, bis $OP_1 = OP_2$ ist (Abb. 16). In ähnlicher Weise nehmen wir in der Geraden $DP_1 = d_{13}$ den Punkt P_3 so an, daß $OP_1 = OP_3$ sei. Dann ist d_{13} parallel zu e_{13}.

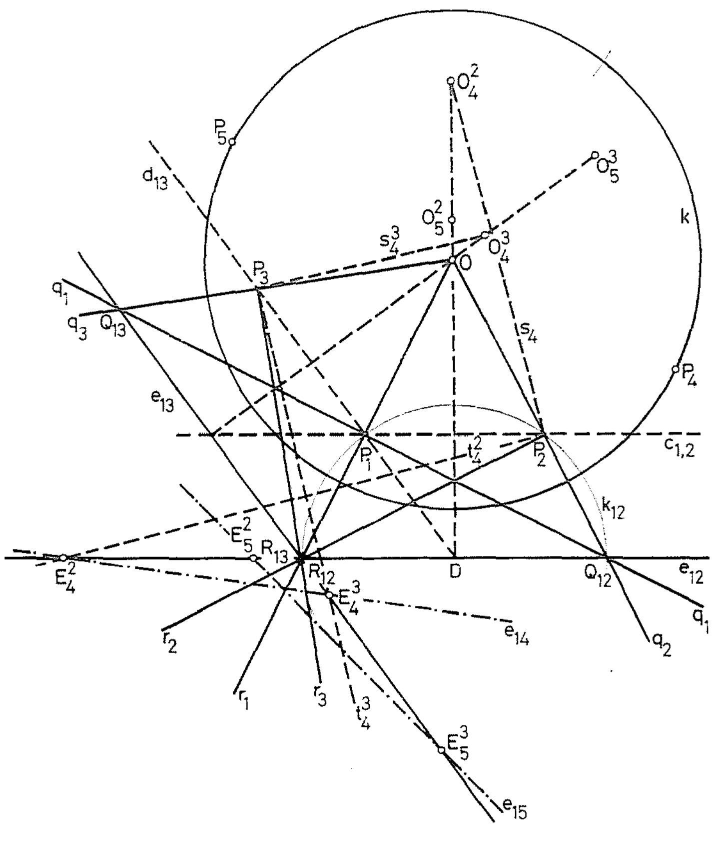

Abb. 16

Wählen wir auf der Kreislinie k zwei beliebige Punkte P_4 und P_5, die zu dem Kreisdurchmesser r_1 symmetrisch sind. Werden in der bekannten Weise auch in den Systemen 1,2 und 1,3 die P_4 und P_5 entsprechenden e_{14} und e_{15} konstruiert, so werden wegen der Symmetrie in der Konstruktion und in der Abbildung die erhaltenen Perspektivachsen zu r_1 symmetrisch sein. Das ist nur möglich, wenn r_1 die Gerade einer der Achsen der Ellipse ist. Die andere Achse steht selbstverständlich auf diese senkrecht.

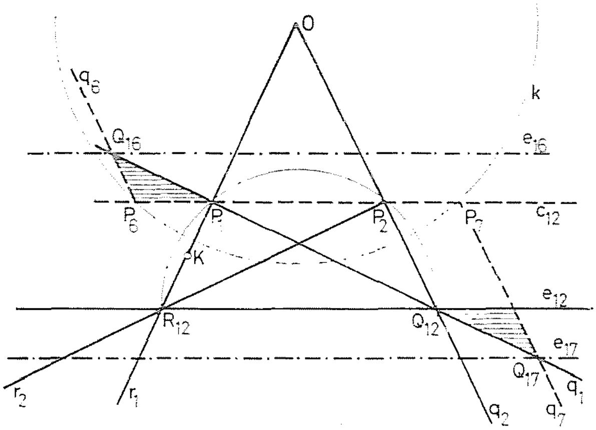

Abb. 17

Um den Mittelpunkt K der Ellipse zu erhalten (Abb. 17), suchen wir die beiden Schnittpunkte P_6 und P_7 des Kreises k mit c_{12}, dann die diesen Schnittpunkten entsprechenden Perspektivachsen e_{16} und e_{17}.

Infolge der Parallelitäten in der Konstruktion und weil $P_6P_1 = P_2P_7$, sind die Dreiecke $q_6q_1c_{12}$ und $q_7q_1e_{12}$ kongruent. Dann sind aber die Entfernungen von e_{16} und c_{12} gleich den Entfernungen von e_{17} und e_{12}. *Somit wird durch den Mittelpunkt K der gesuchten Ellipse der Abschnitt P_1R_{12} halbiert*, da ja e_{16} und e_{17} zwei parallele Tangenten desselben Kegelschnittes sind.

16. Es gibt zahllose Kreise k mit dem Mittelpunkt O, innerhalb welcher sich der Punkt P_1 befindet. Die zu den Punkten dieser Kreise gehörenden Perspektivachsen umhüllen — wie bekannt — Ellipsen.

Ist unter diesen Ellipsen auch ein Kreis?

Gesucht wird also der Kreis k mit dem Mittelpunkt O, wo die zu den Punkten des Kreises gehörenden Perspektivachsen ebenfalls einen Kreis k^* umhüllen.

Der Mittelpunkt K dieses Kreises k^* liegt ebenso im Halbierungspunkt des Abschnitts P_1R_{12} (Abb. 17), wie die Mittelpunkte der durch die zu den Punkten der anderen Kreise k_4, k_5, k_6 . . . mit dem Mittelpunkt O gehörenden Perspektivachsen bestimmten Ellipsen (Abb. 18).

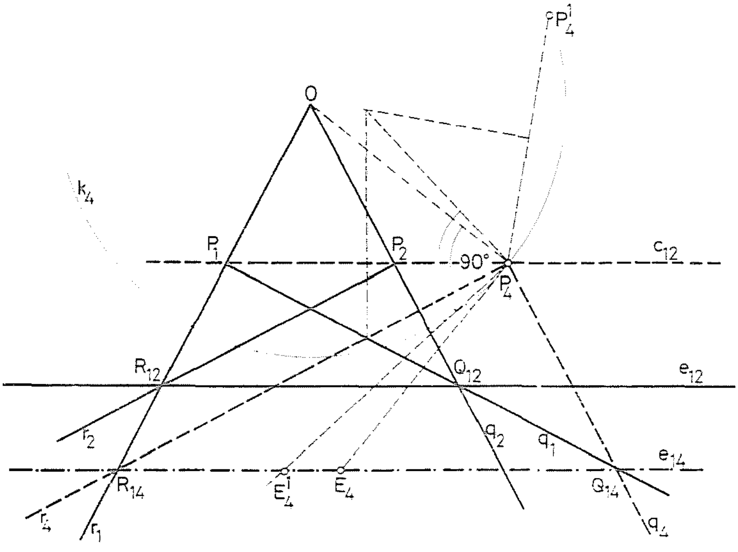

Abb. 18

Der eine Schnittpunkt des einen Kreises k_4 mit d_{12} sei P_4, und die P_1P_4 entsprechende Perspektivachse sei d_{14} · P_4^1 sei ein beliebiger Punkt des Kreises k_4, dann wird die Tangente in P_4 des Kreises $P_1P_4P_4^1$ aus e_{14} den Punkt E_4^1 ausschneiden. Das ist der Punkt, in welchem die zu P_4^1 gehörende Perspektivachse e_{14}^1 die Gerade e_{14} schneidet. Diese Perspektivachse ist selbstverständlich die Tangente einer Ellipse. Nähert sich P_4^1 die Kreislinie k_4 entlang P_4, so wird die Grenzlage der Sehnen $P_4P_4^1$ nichts anderes als die Tangente des Kreises k_4 in P_4 sein. Diese schneidet den Punkt E_4 aus e_{14} heraus. Das ist selbstverständlich der Punkt, wo die Perspektivachse e_{14} die als geometrischer Ort erhaltene Ellipse berührt. Es handelt sich ja um den Schnittpunkt zweier unendlich nahe liegender Tangenten, von denen die eine e_{14}, die andere die zu dem in P_4 konvergierende P_4^1 gehörende e_{14}^1 ist. Daraus folgt, daß der Tangentenpunkt des gesuchten Kreises k^* mit der zu e_{12} parallelen Achse auf der durch den Mittelpunkt K gehenden und auf e_{12} senkrechten Geraden m liegt. Bei einem Kreise steht ja die Tangente senkrecht auf den zu dem Tangentenpunkt gehörenden Radius. Dieser Tangentenpunkt E soll gesucht werden (Abb. 19).

Die Kreise k_4, k_5 . . . mit dem Mittelpunkt O schneiden in der Geraden c_{12} die Punkte P_4, P_5 . . . Die durch diese Punkte durchlaufenden und zu der Geraden r_1 parallelen Geraden r_4, r_5 . . . schneiden aus r_1 die Punkte R_{14}, R_{15}, . . . heraus, während die parallelen Achsen e_{14}, e_{15} . . . aus der Geraden m die Punkte M_4, M_5 . . . ausschneiden. Aus der Konstruktion ist es klar zu erkennen, daß die Punktreihe P_4, P_5, . . . der Punktreihe R_{14}, R_{15}, . . . ähnlich

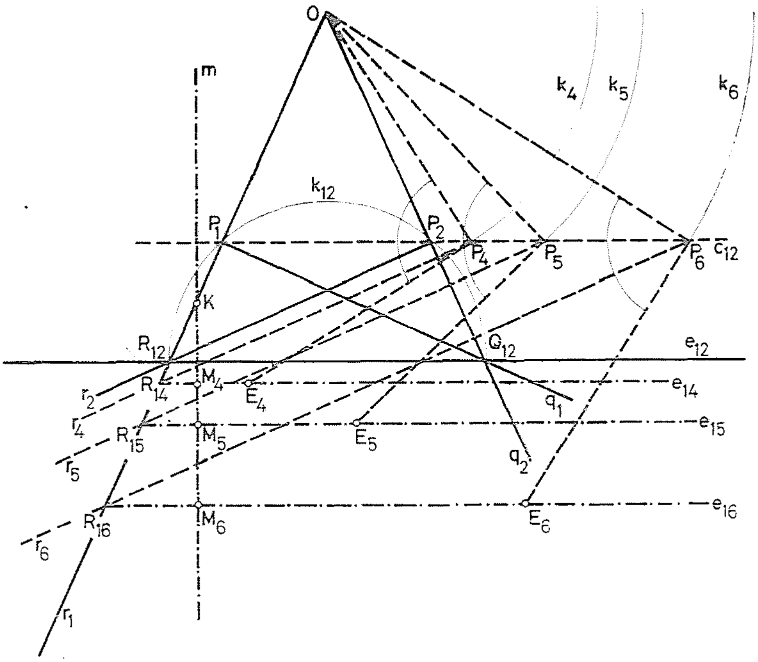

Abb. 19

(also auch projektiv) ist. Letztere Punktreihe ist wiederum der Punktreihe M_4, M_5, ... ähnlich. Daraus folgt, daß *die Geraden* (P_4M_4), (P_5M_5) ... *Parabeln umhüllen*. Zwei Tangenten dieser Parabeln sind auch die Geraden c_{12} und m, als Träger projektiver Punktreihen.

Werden anderseits zu den Kreisen k_4, k_5 ... die Tangenten in den Punkten P_4, P_5, ... gezogen, ist klar zu erkennen, daß *diese Tangenten eine andere Parabel umhüllen, deren Fokus O und deren Scheiteltangente* c_{12} *ist*. Kreistangenten stehen ja senkrecht auf den zum Tangentenpunkt gehörenden Radius.

Die Verbindungsgerade des gesuchten Tangentenpunktes E des unbekannten Kreises k^* und des unbekannten Schnittpunktes des Kreises k mit c_{12} ist die Tangente beider Parabeln. Die Aufgabe besteht nun darin, die gemeinsamen Tangenten der beiden Parabeln zu konstruieren.

Zwei Kegelschnitte haben vier gemeinsame Tangenten. Bei Parabeln ist die eine von diesen die unendlich entfernte Gerade der Ebene. Außerdem ist bekannt, daß die Gerade c_{12} die Tangente beider Parabeln ist. Das Problem ist damit nur zweiten Grades, also durch Konstruktion lösbar.

Die Konstruktion erfolgt nach folgenden Überlegungen (Abb. 20). Es ist bekannt, daß eine der gemeinsamen Tangenten die unendlich entfernte (ideale) Gerade der Ebene ist, die andere ist c_{12}. Nehmen wir in der Geraden c_{12} (der gemeinsamen Tangenten) drei beliebige Punkte (P_B, P_D, P_E) an. Der

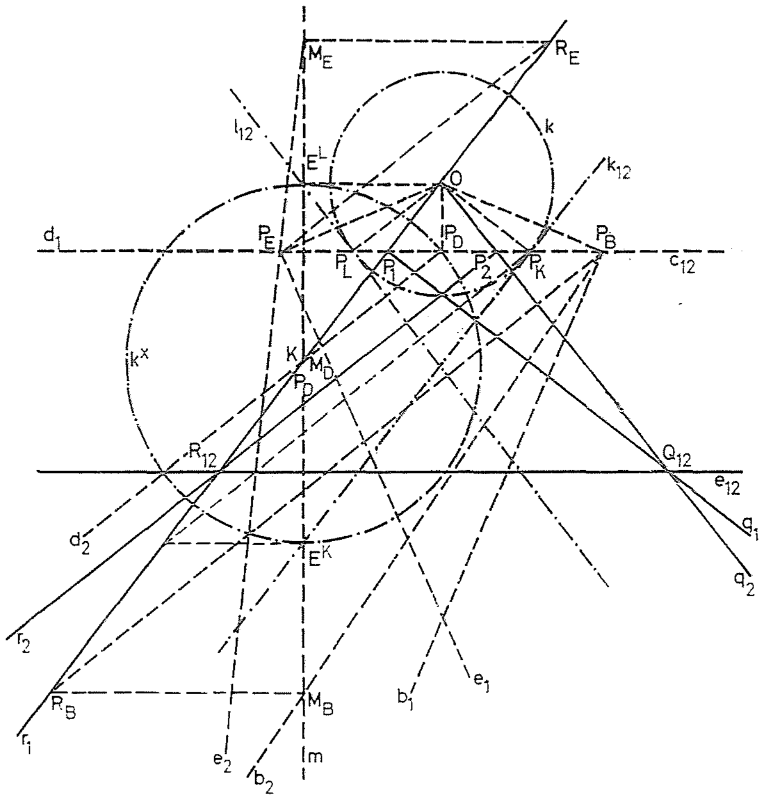

Abb. 20

Einfachheit halber sei P_D der Halbierungspunkt des Abschnitts P_1P_2, während sich P_B und P_E in gleichen Entfernungen von P_D befinden. Nun werden die für diese drei Punkte kennzeichnenden Parabeltangenten, die Geraden b_1b_2; d_1d_2; e_1e_2 konstruiert, wo — wie bekannt — b_1 auf den Kreisradius OP_B senkrecht steht, während b_2 durch den Punkt M_B durchläuft. b_1, d_1, e_1 sind die Tangenten der einen, b_2, d_2, e_2 die Tangenten der anderen Parabel. Diese sechs Tangenten schneiden die unendlich entfernte Gerade der Ebene in sechs Punkten: B_1B_2; D_1D_2; E_1E_2. Es ist bekannt, daß die beiden festen Tangenten (c_{12} und die ideale Gerade) durch die übrigen Tangenten in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Daher kann gesagt werden, daß

$$P_BP_DP_E \ldots \overline{\wedge}\; B_1D_1E_1 \ldots \text{ und}$$

$$P_BP_DP_E \ldots \overline{\wedge}\; B_2D_2E_2 \ldots, \text{ daher}$$

$$B_1\,D_1\,E_1 \ldots \overline{\wedge}\; B_2D_2E_2 \ldots$$

So haben wir in der unendlich entfernten Geraden der Ebene zwei projektive Punktreihen. Werden die Doppelpunkte (K_{12}, L_{12}) derselben konstruiert, so sind die durch diese verlaufenden Tangenten die Tangenten beider Parabeln.

Es gibt folgende Möglichkeit diese unendlich entfernten Doppelpunkte zu konstruieren. Von einem beliebigen Punkt T aus werden zu den sechs Geraden Parallelen gezeichnet (Abb. 21) und mit Hilfe der *Steiner*schen

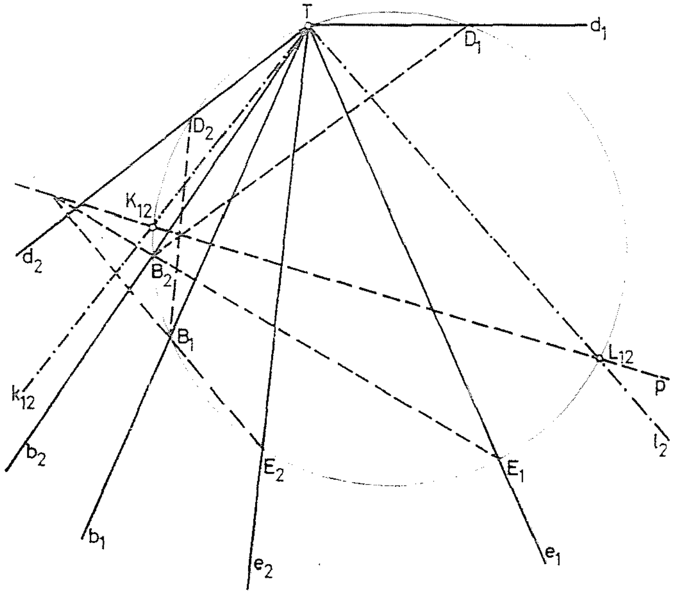

Abb. 21

Konstruktion werden die doppelten Elemente der beiden projektiven Strahlenbüschel (k_{12}, l_{12}) ermittelt, zu denen die gemeinsamen Tangenten der beiden Parabeln parallel sein werden. Die von O aus auf k_{12} gestellte Normale schneidet aus c_{12} den Punkt P_K der einen gesuchten gemeinsamen Tangenten heraus, während die gemeinsame Tangente selbst in der Geraden m den Tangentenpunkt E_K schneidet.

Aus Gründen der Symmetrie in Verbindung mit den zwei Parabeln gehört zu dem Punkt O eine einzige Kreisbahn.

Bei der Ermittlung der Kreisbahnen wurde der Mittelpunkt O in r_1 beliebig gewählt. Daraus folgt, daß zu jedem Punkt auf der Geraden r_1 als Mittelpunkt ein einziger Kreis gehört, für den die Perspektivachsen einen Kreis umhüllen.

17. Ist eine gemeinsame Tangente zweier Parabeln gegeben, können die fehlenden beiden gemeinsamen Tangenten auch nach einer anderen Methode konstruiert werden, nämlich mit Hilfe einer *Parabelschar*.

Es ist bekannt, daß die Parabeln, die drei Seiten eines Dreiecks berühren, eine Parabelschar bilden, die zwei wichtige Eigenschaften besitzt.

1. Die Fokalpunkte aller Parabeln liegen auf dem Umkreis des Dreiecks.

2. Sämtliche Leitlinien der Parabeln laufen durch einen einzigen Punkt, den Höhepunkt des Dreiecks.

Aus der einen Parabel ergeben sich der Mittelpunkt O des Kreises k als Fokus F, und die Scheiteltangente c_{12}. Das sind aus der Sicht der Parabelschar gut brauchbare Daten, da sich die Leitlinie direkt zeichnen läßt.

Von der anderen Parabel haben wir aber nur vier Tangenten allgemeiner Lage, mit der Erleichterung, daß zwei von diesen (m und c_{12}) aufeinander senkrecht stehen.

Im ersten Schritt wird hier mit Hilfe des *Brianchon*schen Punktes die Richtung der Parabelachse konstruiert. Zeichnet man eine Senkrechte auf die Achsenrichtung durch den Schnittpunkt der beiden aufeinander senkrechten Tangenten, erhält man die Leitlinie d_2. Wird diese getrennt auf je zwei Parabeltangenten gespiegelt, erhält man als Schnitt der Spiegelbilder den Fokus F_2.

Im zweiten Schritt werden der Schnittpunkt (D) der beiden Leitlinien und dessen Spiegelbild D^* auf c_{12} konstruiert. Dieses befindet sich bereits auf dem umschriebenen Kreis. $D^* F_1$ und F_2 bestimmen den umschriebenen Kreis um das gemeinsame Tangentendreieck.

Im dritten Schritt können bereits die gesuchten gemeinsamen Tangenten konstruiert werden. Der umschriebene Kreis schneidet nämlich die gemeinsame Tangente c_{12} in zwei Punkten. Diese Punkte bilden zwei Ecken des Dreiecks. Eine von einer beliebigen Ecke aus zu welcher Parabel auch immer gezeichnete Tangente ist bereits eine der gemeinsamen Tangenten.

Zusammenfassung

Von zwei gleichgerichteten perspektiven Strahlenbüscheln sei das eine (P_1) fix, das andere (P_2) beweglich. Die Bewegung hat zwei Bedingungen:

1. Die aus P_2 gewonnenen Strahlenbüschel P_3, P_4 . . . sollen zu P_2 kongruent bleiben.
2. Die Strahlenbüschel sollen immer zu P_1 perspektiv bleiben.

Ist die Bahn der Punkte P_3, P_4, . . . ein beliebiger Kreis k, wird bewiesen, daß die Perspektivachsen entweder ein Strahlenbüschel bilden oder eine Ellipse oder Hyperbel umhüllen, je nachdem, wo der Punkt P_1 im Verhältnis zu dem Kreis k liegt.

Schließlich wird bewiesen, daß zu einem beliebigen Mittelpunkt O nur ein einziger Kreis k existiert, dessen Bild ebenfalls ein Kreis k^* ist. Bewegt sich also der Träger der perspektiven Strahlenbüschel diese Kreislinie k entlang, berühren die Achsen der perspektiven Strahlenbüschel immer den Kreis k^*.

Literatur

[1] VIGASSY, L.: Die geometrischen Orte der Achsen perspektiver Strahlenbüschel in Bewegung. Periodica Polytechnica. Arch. Vol. 23 (1979) No 2—3, S. 149—165.

Dozent em. Lajos VIGASSY, H-1521, Budapest.