ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ*

БУИ НГУИЕН НХАЦ

Кафедра сопротивления материалов и несущих конструкций Будапештского Технического Университета Н-1521

Поступило: I сентября 1983 г.
Представлено д-р Деак, Д.

Non-linear Programming for the Optimum Design of Reinforced Concrete Cross Sections — Structural design problems leading to non-linear programming have been discussed. An improved algorithm has been developed for solving the non-linear programming problem, applied for examples taken from the domain of reinforced or prestressed concrete structures. In these problems the algorithm was found to be very efficient.

I

При проектировании несущих конструкций требования, предъявляемые к технологии и сопротвилению материалов не определяют однозначно ни способа выполнения и материала конструкции, ни ее геометрических и прочностных данных. Пользуясь этой возможностью, в последнее время разработали все больше расчетных методов, с помощью которых можно определить непосредственным математическим путем решение, при применении которого получается показатель оптимального значения, характеризующий целесообразность данной конструкции, или связан с экономической эффективностью или суммарными затратами (напр., расход материала, наибольшее усилие и т. д.). Такие методы оптимального проектирования могут применяться и для железобетонных конструкций подходя к ним либо по теории упругости, либо по теории пластичности.

В работе описан метод проектирования железобетонных конструкций, суть которого заключается в возможности сведения проектной задачи к задаче математического программирования, решение которой задает оптимальный вариант проекта.

В принципе метод оптималпного пректирования действителен для

- расчеста на основе теории упругости или теории пластичности,
- статической или динамической нагрузки с одним или несколькими параметрами,

* Сокращенный текст кандидатской диссертации автора

— проектирования статически определенных, а в некоторых случаях неопределенных конструкций.

В работе метод был применен только для случая ненапряженных конструкций, однако целесообразно дальше рассматривать возможность его применения и в области предварительно напряженных конструкций. Из предельных состояний здесь рассматривается только состояние нагружаемости но ничего не препятствует учету и условий остальных предельных состояний.

В работе расчет проведен по указаниям венгерского стандарта МС. В целях оптимизации в некоторых случаях наблюдается отклонение от нормативов, но всегда в целях получения более точных результатов (что допускается и стандартом).

II

Для методов оптимального проектирования разных конструкций известен целый ряд видов, из которых наиболее распространено применение математического программирования.

Для решения общей задачи математического программирования в последние десятилетия предлагались многочисленные методы. К сожалению, нет такого метода, который мог бы применяться во всех возможных случаях, для всех условий с одинаковой целесообразностью. Из существующих методов в одном случае оказывается лучшим один, а в другом случае другой. Для решения нелинейной задачи математического программирования с ограничивающими условиями нелинейного неравенства и по возможности линейного равенства хорошо применим метод функции штрафов (penalty-function method).

Суть метода состоит в преобразовании ограниченной задачи нелинейного программирования в задачу без ограничений или итерацию таких задач. Этому соответственно вместо того, чтобы искать то значение переменной $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ которое сделает т. н. целевую функцию

$$w(\bar{x}) = w(x_1, \ldots, x_n)$$

оптимальной (минимальной или максимальной), и которое подвергается ограничению нелинейного неравенства

$$g_i(\bar{x}) = g_i(x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

и нелинейного равенства

$$h_i(\bar{x}) = h_i(x_1, \ldots, x_n) > 0 \qquad (i = l + 1, \ldots, m)$$

ищется свободное краевое значение задачи

$$p(\bar{x}, r_k) = w(\bar{x}) + r_k \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{g_i(\bar{x})} + r_k^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=l+1}^{m} [h_i(\bar{x})]^2$$

где $r_k(k = 1, 2, \ldots)$ — т. н. ответный фактор (response factor), который должен снизиться при итерационной минимизации.

При применении метода функции штрафов необходим эффективный способ вычисления краевого значения без ограничивающих условий. Как правило, применяются методы постепенного приближения, проводящие минимизацию (или максимализацию) по нескольким переменным путем многократного повторения поиска краевого значения с одной переменной по определенным направлениям. В К-том шагу поиска по заданному направлению пользуемся следующей формулой:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \alpha^k \bar{S}^k$$

где $\bar{S}^k$ — к-тый вектор направления
α^k — длина к-того шага
$\bar{x}^k$ — вектор начальных величин в к-том шагу, и
$\bar{x}^{k+1}$ — вектор проектирования, соответствующий минимальной задаче в направлении поиска $\bar{S}^k$, неограниченной при применении метода функции штрафов.

Для определения направлений поиска $\bar{S}^k$ применяется метод переменной метрики, предложенный Давидоном, Флетчером и Поуеллом. Конъюгированные направления $\bar{S}^k$ получаются следующим образом:

$$\bar{S}^{k+1} = -\bar{\bar{H}}^{k+1} \bar{g}^{k+1}$$

где $\bar{\bar{H}}$ — произвольная, положительно определенная матрица размером $n \times n$, а следующие поочередно матрицы имеют следующий вид:

$$\bar{\bar{H}}^{k+1} = \bar{\bar{H}}^k + \bar{\bar{A}}^k + \bar{\bar{B}}^k$$

где

$$\bar{\bar{A}}^k = \frac{\Delta\bar{x}^k (\Delta\bar{x}^k)^T}{(\Delta\bar{x}^k)^T \Delta\bar{g}^k}$$

$$\bar{\bar{B}}^k = -\frac{H^k \Delta\bar{g}^k (\Delta\bar{g}^k)^T (\bar{\bar{H}}^k)^T}{(\Delta\bar{g}^k)^T \bar{\bar{H}}^k \Delta\bar{g}^k}$$

$$\Delta\bar{g}^k = \bar{g}^{k+1} - \bar{g}^k; \quad \Delta\bar{x}^k = \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k = \alpha^k \bar{S}^k = -\alpha^k H^k \bar{g}^k$$

$\bar{g}^k$ и $\bar{g}^{k+1}$ — означают вектор градиента минимизируемой функции в точке $\bar{x}^k$ и $\bar{x}^{k+1}$.

Параметр α^k находится на пути минимума по одному направлению, т. е.

$$\min_{\alpha} P(\bar{x}^k + \alpha \bar{S}^k).$$

При применении метода функции штрафов поиски минимума в определенном направлении путем квадратичного или кубического приближения к функции не всегда оказались успешными, также, как и т. н. метод золотого сечения. В разработанной программе предлагается эффективный метод минимизации в одном направлении. Суть метода состоит в том, что приближение введется не непосредственно для функции P, а сперва осуществляется квадратическое приближение к каждой целевой и ограничивающей функции в отдельности, а затем на их основе образовывается приближение к функции P, а путем поиска на ней определяется минимум по направлению $\overline{S}^k$. Интервал поиска, в котором обязательно находится точка минимума, ограничивается наименьшей из точек пересечения кривых ограничивающих функций с осью α и точкой $\alpha = 0$ предложенный метод выгодно использует и это условие, так как с его учетом можно устранить много помех, имеющих место при других методах.

III

Для получения оптимальных железобетонных конструкций разрабатываются такие ограничивающие условия или функции, которые при оптимизации конструкции выражают, что данная конструкция не должна разрушаться, выходить из строя, или нарушать определенные нормативные предписания. Кроме того, ограничивающие функции заключают в себя и предъявляемые к переменным ограничивающие требования, вытекающие из проектной задачи. Целевой функцией может выразиться то или иное важное свойство проектных вариантов, имеющее значение для их сопоставления. Так, целевая функция может представлять — как это часто наблюдается и в международной специальной литературе — напр. сравнительные расходы или вес проектных вариантов. В результате составленной таким образом задачи математического программирования можно получить оптимальную конструкцию, экономическая эффективность которой является краевым значением, в то же время ее поведение удовлетворяет требованиям в частности, надежности. Задача математического программирования решается на ЭВМ.

IV

На основе вышеизложенных автором была составлена вычислительная программа т. н. «ОПТИМИЗИРУЮЩАЯ ПРОГРАММА», пригодная к задачам испытания и проектирования, и дающая правильные результаты. На вычислительной машине было проведено множество экспериментов, для выбора целесообразных величин свободных параметров вычислительного процесса (при экономии машинного времени).

На этом основании предлагается

— проводить проектный расчет на 5—6 следующих друг за другом поверхностях ответа,

— выбрать начальную величину ответного фактора с тем, чтобы сумма карательных членов составила половину значения целевой функции; ну следующих друг за другом поверхностях ответа снижать ответный фактор путем деления на $t_k = 20$.

— для завершения проектного расчета в целом подобрать допустимую точность, $\varepsilon_n = 10^{-5}$ согласно упомянутому предложению, по которому целесообразно учесть 5—6 поверхностей ответа,

— на каждой поверхности ответа выбрать для завершения процесса вычисления ограничение $\varepsilon_3 = 10^{-5}$,

— наконец, при минимизации в одном направлении в качестве критерия конвергирования выбрать значения $\varepsilon_1 = 0,1$ и $\varepsilon_2 = 10^{-8}$.

С помощью предложенного метода оптимизации дается возможность оптимального проектирования многочисленных видов железобетонных конструкций. При проектировании можно учитывать целый ряд различных факторов, например несколько видов сложных поперечных сечений, несколько видов растянутых, сжатых и монтажных арматур. Данный метод действителен для проектирования определенной, а в некоторых случаях и неопределенной конструкции, для расчета конструкции на основе теории упругости или пластичности. С помощью вычислительной машины оптимальное проектирование имеет достаточную точность. Машинное время вычисления остается в реальных пределах.

Дальнейшее преимущество программы, что вычисление исходит из общей диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ материалов. Благодаря этому возникающее в арматуре напряжение может учитываться соответственной действительной деформации. Программа старается учитывать относительно широкий круг предъявляемых к конструкции требований.

В качестве примера для практического применения изложенных рассмотрим следующую задачу.

Пусть проектируется железобетонная балка на двух опорах, с теоретическим пролетом

$$L = 10{,}3 \text{ м}$$

с постоянным I-образным сечением на равномерно распределенную расчетную нагрузку с интенсивностью

$$q = 3800 \text{ кг/м}.$$

Требуется минимизировать расход на материал балки.

Поперечное сечение, усилия

Поперечное сечение балки представлено на рис. I. Проектируемым свободным размером считается только ее высота.

Действующий на балку расчетный момент в сечении, находящемся на расстоянии y от опоры, вычисляется следующей формулой:

$$M_m = \frac{qy}{2}(L - y).$$

Арматура

Проектируемая арматура представлена на рис. 2. Проектированию подвергается только распределение арматур изгиба.

Исследование несущей способности при изгибе

На рис. 3 представлена схема расчета. Нейтральное осевое положение рассматриваемого поперечного сечения можно получить решением следующего уравнения:

$$2\int_0^s f(\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi - F_a\,\sigma_v + F'_a\,\sigma'_v = 0.$$

Со знанием нейтрального осевого положения, предельный момент поперечного сечения выражается:

$$M_H = F_a\,\sigma_v\,h - F'_a\,\sigma'_v\,h' - 2\int_0^s f(\xi)\,\sigma(\xi)\,\xi\,d\xi.$$

Для рассматриваемого сечения условием, выполняемым по предельному состоянию несущей способности является неравенство

$$M_H \geq M_M.$$

В вышеприведенных формулах

— F_a площадь поперечного сечения растянутой арматиры в исследуемом сечении, а M_M — действующая на то же сечение расчетный момент под влиянием внешней нагрузки.

— Значение функции $f = f(\xi)$ следующее:

если $0 \leq \xi \leq 7$	тогда $f = 24$
если $7 < \xi \leq 17$	тогда $f = -1{,}9\,\xi + 37{,}3$
если $17 < \xi$	тогда $f = 5$.

В данном примере интегральное вычисление проводилось не аналитическим путем, а численным методом. Так решается вышеуказанное уравнение.

Составление проектной задачи

Определим полезную высоту, арматуру и распределение арматуры поперечного сечения балки, обеспечивая при этом надежность и наименьшую стоимость балки. Проектированию надлежат: полезная высота h попереч-

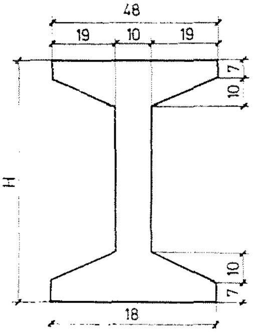

Рис. 1

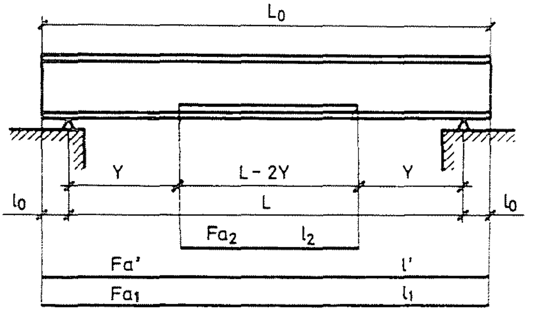

Рис. 2

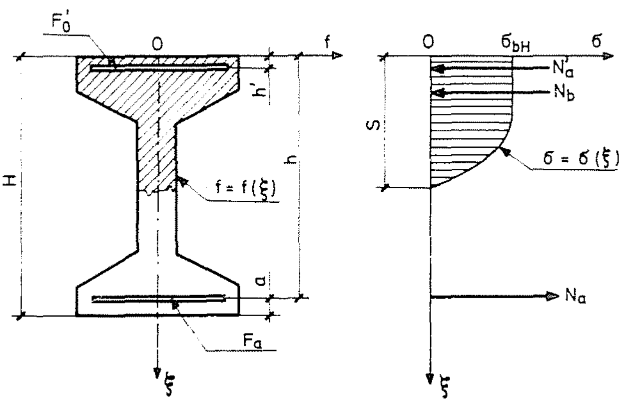

Рис. 3

ного сечения балки, место выпуска у продольных арматурных стержней с поперечным сечением F_{a1}, F_{a2}, F'_a со следующими условиями:

— ни одна из указанных величин не должна быть отрицательной, т.е.

$$F_{a1} \geq 0, \; F_{a2} \geq 0, \; F'_a \geq 0, \; y \geq 0, \; h \geq 0;$$

— полная поперечного сечения балки не должна быть меньшей суммы толщин верхней и нижней плит, т. е.

$$h + a \geq 34;$$

— длина l_2 растянутой арматуры с поперечным сечением F_{a2} не должна быть отрицательной, т. е.

$$l_2 = L - 2y \geq 0;$$

— исследуемое поперечное сечение будет в середине балки и на расстоянии y от опоры; нейтральное осевое положение от сжатого арматурного стержня обозначается через S_1 и S_2 и его величины определяются следующими уравнениями:

$$2\int_0^{S_1} f(\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi - (F_{a1} - F_{a2})\,\sigma_{v1} + F'_a\,\sigma'_{v1} = 0$$

$$2\int_0^{S_2} f(\xi)\,\sigma(\xi)\,d\xi - F_{a1}\,\sigma_{v2} + F'_a\,\sigma'_{v2} = 0$$

— эти расчетные величины должны соответствовать неравенству

$$S_1 \geq S_{0a}$$

$$S_2 \geq S_{0a}$$

— условие несущей способности рассмотренных поперечных сечений:

$$(F_{a1} + F_{a2})\,\sigma_{v1}\,h - F'_a\,\sigma'_v\,h' - 2\int_0^{S_1} f(\xi)\,\sigma(\xi)\,\xi\,d\xi \geq 0{,}125\,qL^2$$

$$F_{a1}\,\sigma_{v2}\,h - F'_a\,\sigma'_{v2}h' - 2\int_0^{S_2} f(\xi)\,\sigma(\xi)\,\xi\,d\xi \geq 0{,}5\,qy(L - y).$$

Проектирование балки наименьшей стоимости осуществляется путем минимизации следующей целовой функции:

$$w = L_0\,F_b\,K_b + L_0\,F'_a\,\gamma_a\,K'_a + L_0\,F_{a1}\,\gamma_a\,K_a + (L - 2y)\,F_{a2}\,\gamma_a\,K_a$$

где F_b площадь поперечного сечения балки

$$F_b = 912 + 10\,(h + a)$$

и

$$L_0 = L + 2l.$$

Балка проектируется из бетона марки В 400, при применении арматурной стали В 75,50 и В 38,24 для растянутой и сжатой арматуры соответственно.

Разработка задачи математического программирования

Подставляя численные данные в задачу и рассматривая величины F_{a1}, F_{a2}, F_a, y и h как проектные переменные X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5, оптимальное проектирование железобетонной балки сводится к решению следующей задачи математического программирования:

Минимизируемая функция

$$W = 90{,}948\, X_1 + 0{,}0858\,(1030 - 2X_4)X_2 +$$
$$+ 71 \cdot 18748\, X_3 + 12 \cdot 826\, X_5 + 860{,}6246.$$

Неравенственные ограничивающие условия

$$g_1 = c_1 X_1 \geq 0$$
$$g_2 = c_2 x_2 \geq 0$$
$$g_3 = c_3 x_3 \geq 0$$
$$g_4 = c_4 x_4 \geq 0$$
$$g_5 = X_5/31{,}5 - 1 \geq 0$$
$$g_6 = I - X_4/515 \geq 0$$
$$g_7 = S_1/(0{,}0816\, x_5) - 1 \geq 0$$
$$g_8 = S_2/(0{,}0816\, x_5) - 1 \geq 0$$
$$g_9 = \frac{1}{5039275}\left[(x_1 + x_2)\, x_5\, \sigma_{v1} - 2{,}5\, x_3\, \sigma'_{v1} - 2\int_0^{S_1} f(\xi)\, \sigma(\xi)\, \xi\, d\xi\right] - 1 \geq 0$$
$$g_{10} = \left[x_1 x_5\, \sigma_{v2} - 2{,}5\, x_3\, \sigma'_{v2} - 2\int_0^{S_2} f(\xi)\, \sigma(\xi)\, \xi\, d\xi\right]/19\, x_4\,(1030 - x_4) - 1 \geq 0.$$

Равенственные ограничивающие условия:

$$h_{11}\ 2\int_0^{S_1} \sigma(\xi)\, f(\xi)\, d\xi - (x_1 + x_2)\, \sigma_{v1} + x_3\, \sigma'_{v1} = 0$$
$$h_{12} = \int_0^{S_2} \sigma(\xi)\, f(\xi)\, d\xi - x_1\, \sigma_{v2} + x_3\, \sigma'_{v2} = 0.$$

Результат

Задача была решена на ЭВМ типа R 32. Результат приведен на табл. 2.

Табл. 2

Результат прохождения примерной задачи
Коэффициенты пропорциональности для проектных переменных:
00,5 0,15, 0,15, 0,005, 0,015

№	r	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$W(x)$	число шагов
Начальное проектирование		21,43	6,75	6.	200.	70.	4500.	—
1	$.2\times10^{-0}$	21,6878	7,9716	3,8581	190,0722	72,6931	4484,5	10
2	$.4\times10$	13,0772	5,1164	0,5781	229,7781	74,4323	3296,2	9
3	$.8\times10^{-1}$	11,7892	5,1444	0,2651	232,7433	75,4614	3168,7	3
4	$.16\times10^{-2}$	11,5844	5,1743	0,0855	234,3995	75,4782	3137,5	4
5	$.32\times10^{-4}$	11,5706	5,1649	0,065	234,0821	75,4414	3134,2	4
6	$.64\times10^{-6}$	11,5241	5,2052	0,0002	232,939	75,4681	3128,6	10

Число определений необходимых значений функций: 174
Число определений производных значений: 46
Время вычисления: 7 минут, 17 секунд
Активные ограничивающие условия

$$g_3 = 0{,}000023$$
$$g_8 = 0{,}000189$$
$$g_9 = 0{,}000004$$
$$g_{10} = 0{,}000016.$$

По данным таблицы искомое решение:

$$Fa = 11{,}524 \text{ см}^2$$
$$Fa_2 = 5{,}205 \text{ см}^2$$
$$Fa' = 0$$
$$y = 232{,}94 \text{ см}$$
$$h = 75{,}47 \text{ см}$$

и расходы на балку

$$W = 3128{,}5 \quad \text{Фт.}$$

Резюме

Работа посвящена проблемам проектирования несущих конструкций, приводящим к нелинейной задаче программирования. Для решения задачи разработан поправочный алгоритм, применительно к примерам, взятым из круга железобетонных и напряженных бетонных несущих конструкций. Для этих задач предлагаемый алгоритм оказался весьма эффективным.

Буи Нгуиен Нхац
кандидат технических наук
Демократическая республика Вьетнам
Ханой