ГЕОМЕТРОГРАФИЯ, ШАРНИРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

К. КОРИШ

кафедра начертательной геометрии
Будапештский Технический Университет

Поступило: 13. февраля 1979 г.

1. Геометрография

Занимается сравнением элементарных конструкций.

Её формула:

$$e_0 E_0 + e\, E + k_0 K_0 + k\, K + \nu V$$

где

E_0 — приложение линейки к данной точке,
E — проведение прямой,
K_0 — приложение некоторого острия циркуля в данной точке, или его приложение в любую точку данной линии,
K — очерчение окружности,
V — замена или смена линейки и циркуля при построении.
e_0, e, k_0, k и V положительные целые числа обозначают во сколько раз были применены вышеуказанные действия.

Данной элементарной конструкции принадлежит построение определенной геометрической геометрическо-графической формулы.

Такая формула лишь в простейшем случае определяет построение, потому что не даёт объяснений о том, каким образом и в каком порядке (последовательности) были применены отдельные элементарные действия.

Той же геометрической задаче принадлежат различные формулы C.

Формула G простых геометрических построений.

1. Построение прямой, проходящей через две данные точки:

$$2\, E_0 + E.$$

2. Проведение окружности вокруг данной точки и проходящей через данную точку:

$$2\, K_0 + K.$$

3. Точка пересечения двух прямых, заданных одной точкой:

$$4\, E_0 + 2\, E.$$

4. Точка пересечения окружности, построенной вокруг данной точки и проходящей через данную точку, с другой окружностью:

$$4\,K_0 + 2\,K.$$

5. Точка пересечения прямой, проходящей через данную точку вокруг заданной точки, с прямой, заданной двумя точками:

$$2\,K_0 + E + 2\,K_0 + K + Y.$$

В формуле G определением точки пересечения двух линий в дальнейшем можно пренебречь, потому что такая точка пересечения в дальнейшем фигурирует только в качестве элементарных действий E_0 или K_0.

Для самой формулы безразлично и то, что до выполнения построения имеется в распоряжении заранее построенное изображение или нет.

В формуле построения G *Мора — Маскерони* $V_0 = 0$, $e_0 = 0$ и $e = 0$.

В формуле G построения *Понселет — Штейнера* $\nu = 0$, и $k_0 = 0$ и $k = 0$.

Если применяются и другие средства, то формулу следует дополнить. Не следует вводить нового элементарного действия в случае линейки с параллельными гранями, если такое расположение линейки, при котором одна из граней лежит на данной прямой, или же если одна из граней проходит через отдельную данную точку, считается действием $2\,E_0$.

Числа E_0, E, . . ., измеряющие несложность (простоту) отдельных операций выбираются произвольно. Наиболее просто, если все они выбираются равными одному (1). Тогда простота геометрического построения равна сумме коэффициентов

$$\text{Простота} = e_0 + e + k_0 + k + v.$$

Под геометрографической точностью построения понимается сумма коэффициентов e_0 и k_0 принадлежащей ему формулы.

Теория практической точности входит в область теории вероятности и исчисления погрешностей.

2. Шарнирные конструкции

Средствами построения являются циркуль и линейка.

С теоретической точки зрения циркуль является точным средством, ибо кривая, построенная им, основана на основном свойстве окружности.

Прямая линейна представляет собой средство такого рода, как, например, дискообразная монета для построения окружности.

Для построения прямой следует использовать средство, похожее на циркуль, т. е. характерный признак прямой.

Рассмотрим средство *Кемпе*, т. е. средства обладающие такими свойствами:

Чертежное средство *Кемпе* для построения прямой (рис. 1): Средство состоит из подобных и соединенных выпуклых дельтоидов $ABCD$ и $BCEF$ имеющих общее плечо BC : BC является меньшей стороной первого дельтоида и одной из больших сторон второго дельтоида. В обоих дельтоидах стороны BC, CD и CE между собою равны, а углы, лежащие при D, B и E тоже равны между собою. Из-за совпадения углов, лежащих при B, условием подобия обоих дельтоидов является пропорция $AB : BC = BC : EF$.

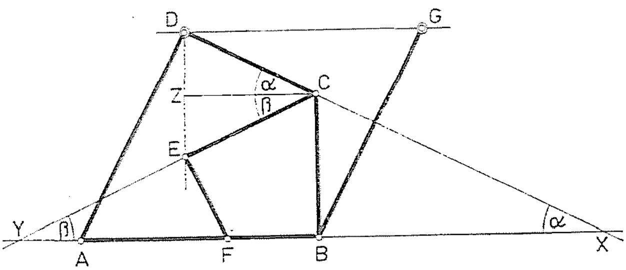

Рис. 1

$\alpha = \beta$, итак если из C прямой AB провести параллельную, то CZ делит угол DCE пополам. Поэтому CZ, является высотой равнобедренного треугольника DEC, итак прямая DE перепендикулярна прямой CZ, и прямой AB, параллельной прямой CZ.

Значит, если точка D фиксируется и AB может перемещаться лишь параллельно самой себе, то прямая DE всегда перпендикулярна AB, итак точка E описывает прямую, перпендикулярную прямой AB.

Перемещение плеча AB, параллельное самому себе, может быть обеспечено таким образом, что к двойному дельтоиду в B с помощью шарнира присоединяется плечо BC, равное плечам AB и AD и его концевая точка C фиксируется в положении, при котором $DG = AB$.

Инверсор Гартля (рис. 2).

Он представляет собой антипараллелограмму, состоящую из четырёх плеч. (В определённом положении (антипараллелограммы $ABCD$, с помощью диагоналей AC и BD обозначим точки O, P, P' и Q, лежащие на прямой, параллельной диагоналам.

Из-за параллельности прямых OP, DB и AC

$AC : OD = AP : PB$

2*

и аналогично

$$AO : OD = CP' : P'D,$$

$$AP : PB - CQ : QB, \text{ и}$$

$$CQ : QB = CP' : P'D.$$

При перемещении шарнирного четырёхугольника эти пропорции не изменяются. Из этого следует, что прямые OP, OP', PQ и OP' параллельны диагоналам AC и BD, и поэтому точки O, P, P' и Q остаются коллинеарными.

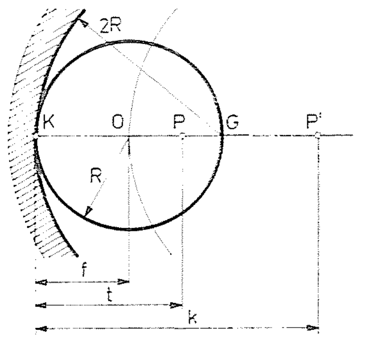

Рис. 2

Далее заметим, что $OP : DB = AC : AD$ и
$OP' : AC = DO : DA$, откуда
$OP : AD = AC . OB$ и $OP' . DA = DO . AC$

Выразив из; этих двух уравнений OP и OP', а потом умножив их

$$OP \cdot OP' = \frac{AC \cdot DB}{AD^2} AO \cdot DO$$

на рисунке $BE \parallel DA$ и $BF \perp AC$, и

$$AC . BD = (AF + FC). (AF - FC) = AF^2 - FC^2$$

далее $AF^2 + BF^2 = AB^2$

$$FC^2 + BF^2 = BC^2$$

итак

$$AF^2 - FC^2 = AB^2 - BC^2$$

и поэтому

$$OP \cdot OP' = \frac{AB^2 - BC^2}{AD^2} \cdot AC \cdot OD.$$

Но величина, стоящая на правой стороне, постоянна.

Обозначим её постоянно положительный корень квадратный через P; тогда при фиксировании точки O перемещением по плоскости шарнирной конструкции P и P' являются зеркальными отображениями окружности с центром O и радиусом R.

Если соединить P и фиксированную точку O шарнирными плечами таким образом, чтобы при перемещении шарнирного четырёхугольника P

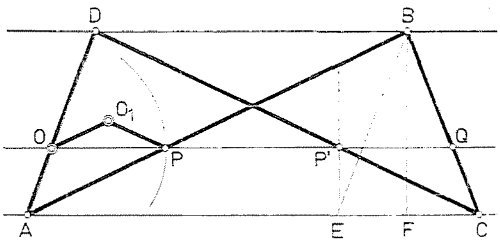

Рис. 3

осталось на окружности с фиксированным центром O_1, проходящим через O, то точка будет перемещаться на зеркальном изображении окружности, то есть по прямой

Инверсор Поселлье (рис. 3).

Это шарнирная конструкция, состоящая из ромба $A\,P\,B\,P'$, а также из стержней OA и OB, присоединённых к A и B.

Ввиду того, что

$$OP\,.\,OP' = (в + a)\,(в - a) = в^2 - a^2 = R^2,$$

то при фиксации точки O при любом возможном положении A, B, P и P', P и P' являются зеркальными изображениями друг друга относительно окружности K с центром O и радиусом R.

При фиксации точки OP и P' можно перенести в любую точку тора (кольца) с центром O и радиусом $(в + a)$ и $(в - a)$. Для любой линии, лежащей в этом торе можно начертить её зеркальное изображение относительно окружности K.

Зеркальное изображение любой окружности, проходящей через O относительно K является прямой.

Значит, если P с помощью такого плеча с длиной c, одна концевая точка которого присоединена шарниром к P, а другая концевая точка с точки O лежит также на расстоянии, равном c, то точку P заставляем, чтобы перемещалась по окружности, проходящей через O и, таким образом, точка P' описывает прямую.

Рассмотрим физическое свойство инверсора P: (рис. 4.)

$$OP \,.\, OP' = R^2$$

$$(KP \,.\, KO) \,.\, (KP' - KO) = R^2$$

$$KP \,.\, KP' - KO \,.\, KP' - KO \,.\, KP = 0.$$

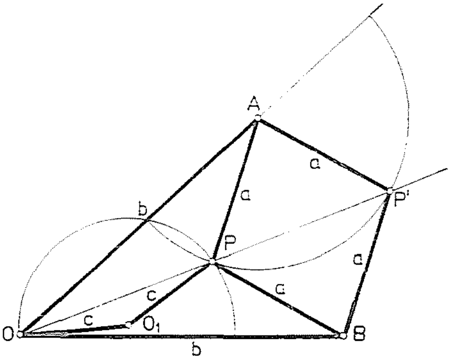

Рис. 4

После перестановки

$$\frac{1}{KO} = \frac{1}{KP} + \frac{1}{KP'} \,.$$

Если геометрический центр сферического зеркала C и его радиус $K\,C = 2\,R$, то фокус сферического зеркала $F = O$ и фокусное расстояние $f = k\,O$; тогда расстояние предмета, находящегося в точке P $KP = t$ и тогда $K\,P' = k$ расстояние изображения, итак точка P' является точкой изображения точки P, то есть

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \,.$$

Это значит, что обратные друг другу точки относительно упомянутого зеркала являются взаимно зеркальными изображениями.

Это свойство используется в преобразователях изображений для обеспечения постоянной четкости изображения.

Ниже изложенное устройство называется стерео инверсором Поселлье (рис. 5).

На рисунке O — объектив, фокусное расстояние которого f. Предположим, что на рисунке изображением P' является P, т. е. справедливо основное уравнение оптики

$$f^2 = u^2 - v^2$$

$$f^2 = p^2 + a^2 - q^2 - a^2$$

прибавив обеим частям $f^2 + 2pf$,

$$2f^2 + 2pf = (P + f + q) \cdot (p + f - q)$$

$$2f(p + f) = (p + f + q)(p + f - q).$$

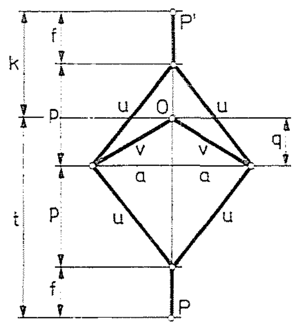

Рис. 5

Но, так как

$$t = p + f + q, \text{ и}$$

$$k = P + f - q,$$

то

$$f(t + k) = tk,$$

откуда

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Значит, с помощью стереоинверсора можно получить всегда резкое изображение.

На преобразователях изображений на одном листе обозначаются места четырёх опорных точек при составлении верной пропорции. Преобразователь изображения устанавливается так, чтобы образ проецируемого изображения совпадал с соответствующими точками, и тогда всё изображение будет верным по пропорции.

Резюме

Статья занимается Эвклидовой теорией построения, формулой и её точностью.

Из шарнирных конструкций представлены приборы, служащие для черчения простейшей прямой. Прямые, построенные ими, дают теоретически и практически полную точность.

Наконец, работа знакомит с принципиальным устройством преобразования изображений.

Литература

1. Керекдьярто Б., Основы геометрии,* 1944.
2. Гайош Д., Введение в геометрию,* 1964.
3. Ганко Г., Изготовление фотопланов,* 1945.

Др Калман Кориш с. р. доцент H-1521 Будапешт.

* на венгерском языке