RÄUMLICHE VIERECKE WINDSCHIEFER FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

G. PETRICH

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, TU Budapest

Eingegangen am 26. Februar 1979

Sämtliche schneidenden Geraden (kurz: Sekanten) dreier Geraden von paarweise windschiefer Lage ergeben die *Erzeugungslinienschar* einer windschiefen Fläche zweiter Ordnung. Sämtliche Sekanten der Erzeugungslinienschar bilden die andere Erzeugungslinienschar der Fläche, zu dieser Linienschar gehören selbstverständlich auch die drei Geraden von paarweise windschiefer Lage. Die Geraden der beiden Erzeugungslinienscharen schneiden einander, innerhalb derselben Erzeugungslinienschar sind aber die Geraden im Verhältnis zueinander windschief. Drei beliebige Geraden einer beliebigen Erzeugungslinienschar können als *Träger* der anderen Erzeugungslinienschar gewählt werden, und durch diese drei Geraden sind sowohl die beiden Erzeugungslinienscharen als auch die Fläche selbst eindeutig bestimmt.

Würden sich innerhalb der einen Erzeugungslinienschar zwei Erzeugungslinien schneiden, so würden sich je zwei Punkte aller drei diese schneidenden Trägergeraden und damit auch die drei Trägergeraden selbst in der Verbindungsebene der beiden Erzeugungslinien befinden. Die Träger sind jedoch Geraden von paarweise windschiefer Lage, daher können sie nicht in derselben Ebene liegen. Deshalb sind zwei beliebige Sekanten der Träger, also zwei beliebige Erzeugungslinien der Erzeugungslinienschar notwendigerweise von windschiefer Lage.

Gibt es keine Ebene, zu der alle drei Trägergeraden parallel sind, so bestimmen sie infolge ihrer räumlichen Lage ein sog. *windschiefes Hyperboloid*, gibt es eine solche Ebene, dann ein *hyperbolisches Paraboloid*. Im ersteren Falle spricht man von einem *hyperboloidischen* Trägertripel, im zweiten Falle von einem *paraboloidischen* Trägertripel.

Es ist bekannt, daß vier Punkte, die nicht in derselben Ebene des Raumes und je zu dreien nicht in der gleichen Geraden liegen, in einer bestimmten Reihenfolge verbunden, ein *räumliches Viereck* bestimmen. Je zwei Spitzen sind nicht durch Seiten, sondern durch Diagonalen verbunden. Abb. la zeigt, daß auf je zwei gegenüberliegende windschiefe Seiten und auf die beiden windschiefen Diagonalen ein paralleles Ebenenpaar gelegt werden kann. So bestimmen die sechs Ebenen den das räumliche Viereck *ABCD* tragenden *Parallelsechskant*.

In dieser Arbeit wird untersucht, ob auf den zweierlei windschiefen Flächen zweiter Ordnung *räumliche Vierecke* angesetzt werden können und wie auf den Flächen verschiedenartige räumliche Vierecke gezeichnet werden; schließlich wird darauf lediglich hingewiesen, daß durch die Verbindung der räumlichen Vierecke und der durch diese begrenzten Flächenteile welche zusammengesetzte Gerippekonstruktionen und Dachflächen ausgestaltet werden können, die für die Bauausführung von Interesse sind.

1. Die räumlichen Vierecke des windschiefen Rotationshyperboloids

Das *räumliche Quadrat* und der *räumliche Rhombus* haben zwei Symmetrieebenen, die durch je eine Diagonale mit der Mittellinie bestimmt werden. In Abb. 1b ist ein räumliches Quadrat mit seinem regelmäßigen vierseitigen *Trägerprisma* dargestellt. Die Seiten *a*, die *Winkel* α sowie die *Diagonalen d* des räumlichen Quadrats sind gleich, seine *Mittellinie* ist *o* und seine *Symmetrieebenen* sind: S_1, S_2. Es sei bemerkt, daß falls die Diagonale und die Seite gleich lang sind, das räumliche Quadrat durch einen *Würfel* getragen wird, und dieses Viereck wird ein *regelmäßiges räumliches Quadrat* genannt. In diesem Falle ist der *Kerntetraeder ABCD* ein regelmäßiger Tetraeder, wo zwei benachbarte Seiten einen Winkel von 60° bilden. Der Winkel der Ebenen der beiden sich an die eine Diagonale anfügenden *Diagonaldreiecke* ist in dieser Lage ein *Randwinkel*, unter dem man ein *gestrecktes* (Abb. 1b), über dem man ein *gedrücktes* räumliches Quadrat unterscheidet.

Alle durch den *Kehlkreis* des windschiefen Rotationshyperboloids sowie durch seine *Drehachse* durchgehenden Ebenen sind *Symmetrieebenen* der Fläche. Deshalb müssen die gegenüberliegenden Eckpunktpaare des räumlichen Quadrats und des räumlichen Rhombus notwendigerweise in irgendeiner Symmetrieebene liegen. Es können zwei Fälle unterschieden werden:

1. Die eine Diagonale liegt in der Ebene des Kehlkreises, die andere in einer durch die Achse durchgehenden Ebene.

2. Beide Diagonalen liegen in je einer, durch die Achse durchgehenden und aufeinander senkrechten Symmetrieebene.

Im ersteren Falle befinden sich zwei Eckpunkte des räumlichen Quadrats bzw. des räumlichen Rhombus in der Kehlkreislinie, die beiden anderen Eckpunkte in der durch den Halbierungspunkt der auf den Kehlkreis fallenden Diagonalen durchgehenden Symmetrieebene. Im zweiten Falle — wenn es sich um einen räumlichen Rhombus handelt — kann als einer der Eckpunkte, außer der Punkte des Kehlkreises, ein beliebiger hyperboloidaler Punkt gewählt werden, und die weiteren drei Eckpunkte sind durch die durch diesen

Punkt gehenden Erzeugungslinien und infolge der Symmetrie bereits bestimmt. Wie es in der untenstehenden graphischen Darstellung zu sehen ist, kann als Eckpunkt eines räumlichen Quadrats kein beliebiger Punkt gewählt werden.

Abb. 2a zeigt ein windschiefes Rotationshyperboloid in Ansicht und in Grundriß. In der Kehlkreislinie k haben wir die Diagonale AD des räumlichen Rhombus, sodann das durch die Punkte A und D durchgehende hyperboloidale Erzeugungslinienpaar angesetzt (Fall 1). Die Schnittpunkte B und C derselben sind erste Deckpunkte. Da die Halbierungspunkte der Diagonalen durch die

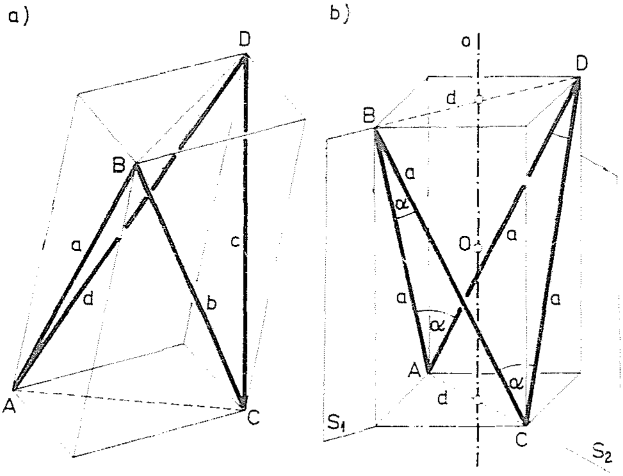

Abb. 1

Mittellinie o aller räumlichen Parallelogramme verbunden sind, und diese jetzt ein zweiter Projektionsstrahl ist, ist das den räumlichen Rhombus tragende Prisma ein zweites Projektionsprisma. Aus dem Umstand, daß $A''B''D''C''$ ein Rhombus ist, folgt, daß $ABDC$ ein räumlicher Rhombus ist. Auf dem Hyperboloid erhält man kongruente räumliche Rhomben, wenn man $ABDC$ um die Rotationsachse t in eine beliebige neue Lage dreht. Es ist leicht einzusehen, daß — außerhalb des Kehlkreises einen beliebigen Punkt des Hyperboloids (z. B. B) angesetzt — zu diesem mit der Diagonalen in der Kehlkreisebene nur ein einziger räumlicher Rhombus gezeichnet werden kann (mit Hilfe der aus B' zu dem Kehlkreis gezogenen Tangenten). Man erhält kongruente räumliche Rhomben, wenn der beliebige Punkt B auf demselben Parallelkreis des Hyperboloids angesetzt wird.

Wir finden zum Kehlkreis symmetrisch zwei parallele Kreise, zu deren Punkten räumliche Quadrate gehören (Abb. 2b). Der Radius ϱ eines solchen Kreises ist zeichnerisch zu ermitteln. Das Trägerprisma des räumlichen Quadrats ist ein quadratisches Prisma. Bei unserem gegenwärtigen Ansatz steht dieses auf die zweite Bildebene senkrecht, daher ist das zweite Bild $U''V''Z''W''$ des räumlichen Quadrats ebenfalls ein Quadrat. Die Seiten $U''V''$ und $U''W''$ müssen also beide mit t'' Winkel von 45° bilden. So wurden auch die zweiten Bilder der Seiten gezeichnet. Da diese in die Tangenten der zweiten Bildgrenzenhyperbel fallen, können sie nur dargestellt werden, wenn die Endtangenten der zweiten Bildgrenze des Hyperboloids mit t'' einen Winkel über 45° bilden.

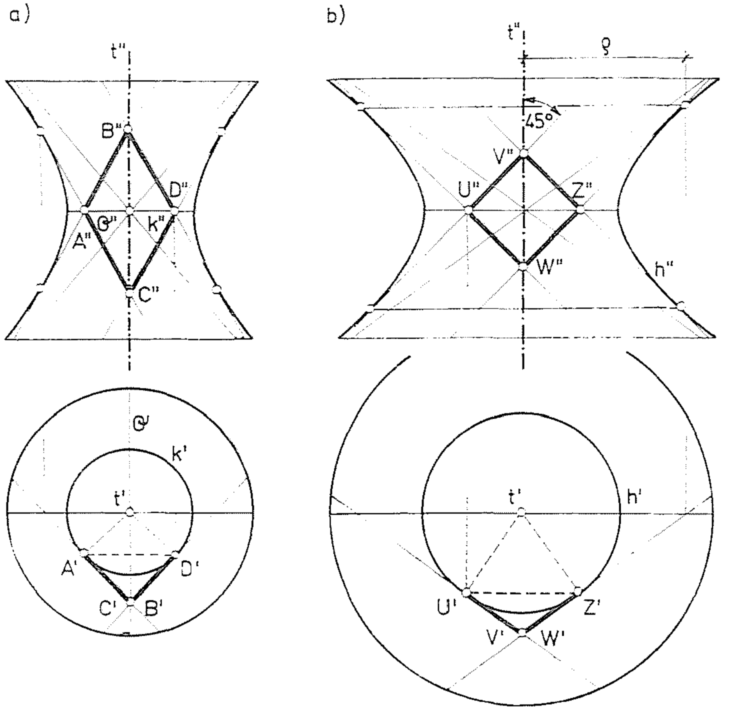

Abb. 2

Es sei bemerkt, daß falls die halbe Öffnung des Asymptotenkegels des Hyperboloids 45° beträgt, der Radius ϱ unendlich groß und die Diagonale UZ der Kehlkreisdurchmesser ist, wobei das räumliche Viereck in je ein durch die Punkte U und Z durchgehendes Erzeugungslinienpaar zerfällt. Man sagt dann, daß das räumliche Quadrat *doppelt offen* ist. *Einfach offen* ist ein räumliches Viereck, wenn nur einer seiner Eckpunkte im Unendlichen liegt.

Schließlich liegt die Symmetrische der für den Fall 1 gezeichneten Parallelogramme — hinsichtlich der zu ihrer Diagonalen in der Kehlkreisebene parallelen Symmetriebene — auf dem Hyperboloid.

In Abb. 3 ist das windschiefe Rotationshyperboloid wieder dargestellt. In der Profilsymmetrieebene wurde die Diagonale AD beliebig angenommen, so daß ihre Endpunkte zweite Deckpunkte seien (Fall 2). Dann wurde im ersten Bild das erste Bild der vier Seiten des räumlichen Parallelogramms als Tangenten des Kehlkreises gezeichnet. Diese Erzeugungslinien schneiden sich in der auf die Diagonale AD des Hyperboloids senkrechten Symmetrieebene in den beiden anderen Eckpunkten B und C. Weil $A'B'D'C'$ ein Rhombus ist,

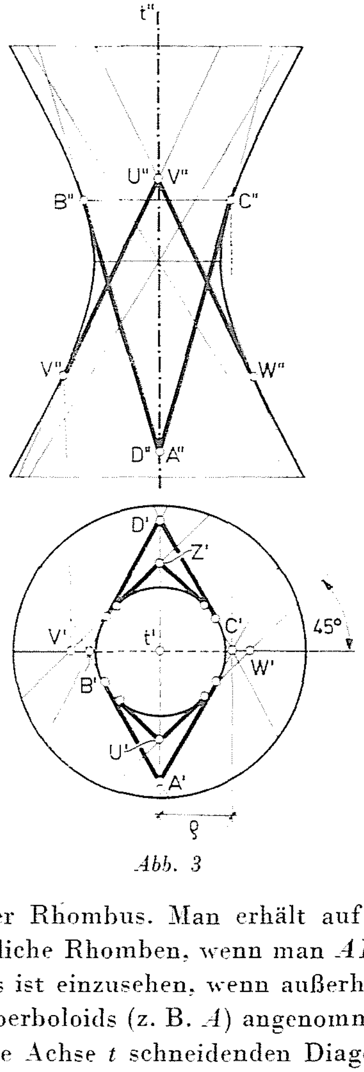

Abb. 3

ist $ABDC$ ein räumlicher Rhombus. Man erhält auf dem Hyperboloid mit diesem kongruente räumliche Rhomben, wenn man $ABDC$ um t in eine beliebige neue Lage dreht. Es ist einzusehen, wenn außerhalb des Kehlkreises ein beliebiger Punkt des Hyperboloids (z. B. A) angenommen wird, zu diesem auf dem Hyperboloid mit die Achse t schneidenden Diagonalen nur ein einziger räumlicher Rhombus gezeichnet werden kann (mit Hilfe der aus A' und aus der Symmetrischen von D' zur dem Kehlkreis geführten Tangenten). Man erhält kongruente räumliche Rhomben auf dem Hyperboloid, wenn der Punkt auf demselben Parallelkreis des Hyperboloids angenommen wird. Die Symmetrische dieses räumlichen Rhombus zu der Kehlkreisebene ist wieder ein räumlicher Rhombus auf dem Hyperboloid.

Zum Kehlkreis symmetrisch (im Falle 2) finden wir stets zwei Kreise, zu deren Punkten räumliche Quadrate gezeichnet werden können. Das ein räumliches Quadrat tragende Prisma ist ein quadratisches Prisma mit in der Aufnahme auf die erste Bildebene senkrechten Seitenkanten. Daher ist auch das erste Bild $U'V'Z'W'$ des räumlichen Quadrats ein Quadrat. Damit fallen die Bilder der Seiten UV und UW auf die Erzeugendenbilder, die mit den Bildern der Diagonalen einen Winkel von 45° bilden. Damit haben wir im ersten Bild ϱ gezeichnet, das — wie es zu sehen ist — gleich der Länge der halben Diagonalen ist. Ist die halbe Öffnung des Asymptotenkegels des Hyperboloids gleich 45° (orthogonaler Kegel), so ist das das räumliche Quadrat tragende Prisma ein Würfel und daher ist *$UVZW$ ein regelmäßiges räumliches Quadrat.*

Das *räumliche Oblongum* und das räumliche *Rhomboid* haben keine Symmetrieebenen, die der Mittellinie gegenüberliegenden Seitenpaare bilden unterschiedliche Winkel, daher sind sie auf keinem windschiefen Rotationshyperboloid zu finden.

Schließlich darf festgestellt werden, daß: *a)* durch ein auf einem windschiefen Rotationshyperboloid liegendes räumliches Quadrat bzw. einen Rhombus tragendes Prisma aus dem Hyperboloid ein weiteres räumliches Quadrat bzw. ein Rhombus herausgeschnitten wird. Die beiden räumlichen Quadrate bzw. räumlichen Rhomben sind zu der Ebene des auf die gemeinsame Mittellinie senkrechten Kehlkreises symmetrisch; *b)* die Mittellinien des im Falle 1 behandelten räumlichen Rhombus und räumlichen Quadrats fallen in die Gerade der Radien des Kehlkreises und die Mittelpunkte sind Punkte der Kehlkreisebene außerhalb des Kehlkreises. Befinden sich auch räumliche Quadrate auf dem Hyperboloid, so liegen deren Mittelpunkte auf einem mit dem Kehlkreis konzentrischen Kreis mit dem Radius ϱ (Abb. 2b); die Mittellinien des im Falle 2 behandelten räumlichen Rhombus und räumlichen Quadrats sind mit der Achse t identisch, ihre Mittelpunkte fallen in die Achse t. Die Mittelpunkte der regelmäßigen räumlichen Quadrate sind mit dem Mittelpunkt des Hyperboloids identisch; *c)* durch das räumliche Quadrat bzw. den Rhombus wird das durch diesen durchgehende windschiefe Rotationshyperboloid eindeutig bestimmt.

1.2 *Räumliche allgemeine Vierecke auf dem windschiefen Rotationshyperboloid*

In Abb. 4 berühren die ersten Bilder sämtlicher Erzeugungslinien des windschiefen Rotationshyperboloids das erste Bild k' des Kehlkreises. Beliebige zwei Erzeugende einer Erzeugungslinienschar bestimmen mit zwei Erzeugenden der anderen Erzeugungslinienschar ein räumliches Viereck. Durch je zwei Erzeugendenpaare in erster Deckung wird — wie es in Abb. 2 zu sehen ist — ein räumlicher Rhombus bestimmt; nun werden wir uns also nicht wieder mit vier Erzeugenden in solcher Lage beschäftigen. Durch das erste Bild der zweimal zwei Erzeugenden wird ein Berührungsviereck des ersten Bildes des Kehlkreises bestimmt; in der Abbildung ist es $A'B'D'C'$. Da diese Geraden der Seiten mit der Kehlkreisebene den gleichen Winkel bilden, stimmt das Verhältnis der Projektion der Seiten mit ihrem wirklichen Größenverhältnis überein. Die Seiten sind also von unterschiedlicher Länge und die Winkel von unterschiedlicher Größe. Daher ist $ABDC$ ein räumliches allgemeines Viereck,

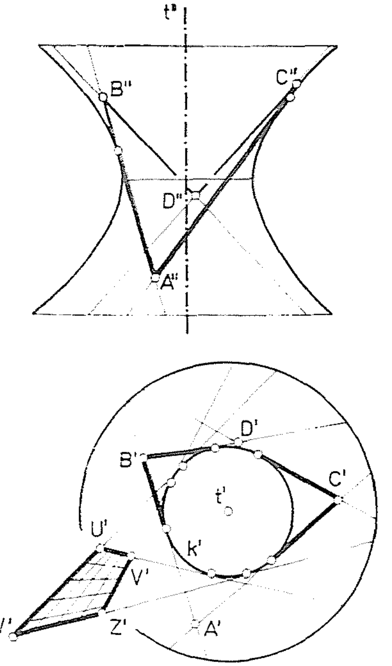

Abb. 4

dessen Kerntetraeder auch ganz allgemein ist. Das räumliche allgemeine Viereck $ABDC$ wird durch die Kehlkreisebene geschnitten. Das räumliche allgemeine Viereck $UVZW$ wird durch die Kehlkreisebene nicht geschnitten. Verdreht man beide räumlichen allgemeinen Vierecke um die Achse t, werden sie sich in allen neuen Lagen auf der Fläche befinden, die zu der Kehlkreisebene gezeichneten Symmetrischen sämtlicher räumlicher allgemeiner Vierecke sind ebenfalls oberflächliche räumliche allgemeine Vierecke.

In Abb. 5 stellt man sich den Kehlkreis des windschiefen Rotationshyperboloids in der Ebene der Zeichnung vor und zeichnet nur die in der Zeichnungsebene liegenden Projektionen der weiteren Viereckarten. In Abb. 5a wurden die Projektionen des auf dem unteren Halbhyperboloid befindlichen bzw. des durch die Kehlkreisebenen geschnittenen *räumlichen Deltoids* $ABDC$ bzw. $UVZW$ gezeichnet. Eine Symmetrieebene jedes räumlichen Deltoids geht durch die Achse t. Je zwei benachbarte Seiten sind gleich lang und auch die durch die beiden Seitenpaare verschiedener Länge gebildeten Winkel sind gleich. Eine ihrer Diagonalen ist parallel zur Kehlkreisebene, die andere steht auf die erste senkrecht und ihre Gerade schneidet die Achse t. In Abb. 5b ist die »Fensterprojektion« eines räumlichen Deltoids $ABDC$ zu sehen, die durch die Kehlkreisebene geschnitten wird. Abb. 5c zeigt das erste Bild des *einfach offenen* räumlichen Deltoids $EFHG_\infty$.

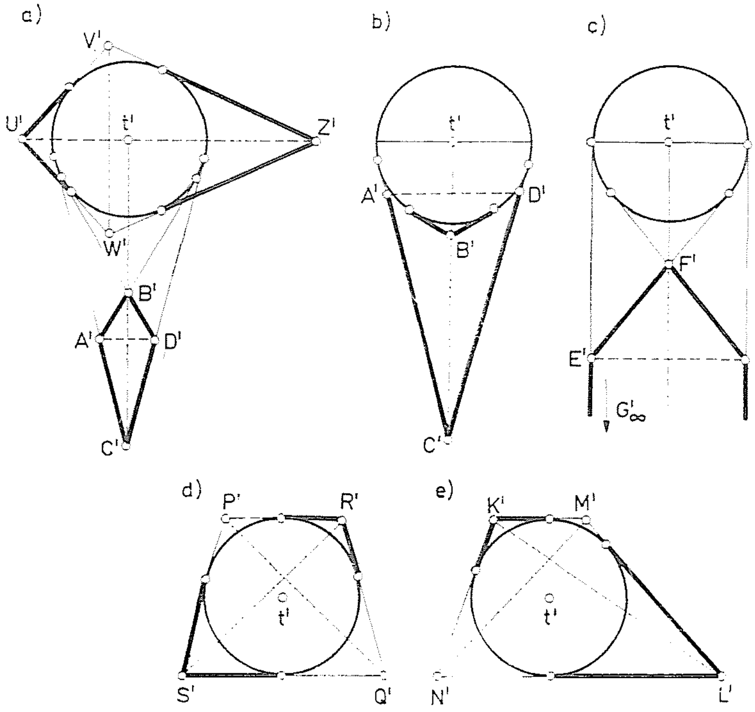

Abb. 5

Abb. 5d zeigt das erste Bild des *räumlichen gleichschenkligen Trapezes* $PRQS$. Die Seite PS ist auch im Raum gleich der Seite QR. Das Trapez hat keine Symmetrieebene. Die Winkel an den »parallelen Seiten« PR und QS sind gleich.

In Abb. 5e wurde das erste Bild des räumlichen Trapezes $KLMN$ gezeichnet. Es hat keine Symmetrieebene. Seine Seiten und Winkel sind im allgemeinen von verschiedener Größe.

Schließlich gilt es für alle auf einem windschiefen Rotationshyperboloid liegenden räumlichen Vierecke (weil in der Kehlkreisebene ihre Projektion ein Berührungsviereck ist und ihre Seiten mit dieser Ebene den gleichen Winkel bilden), daß die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich sind.

2. Die räumlichen Vierecke des allgemeinen windschiefen Hyperboloids

2.1 *Räumliche Parallelogramme auf dem allgemeinen windschiefen Hyperboloid*

Von den drei Symmetrieebenen des allgemeinen oder *dreiachsigen windschiefen Hyperboloids* ist die eine die Ebene der Kehlellipse, die beiden anderen stehen auf diese senkrecht und gehen durch die Achsen der Ellipse. Durch diese Ebenen wird die Fläche in je einer Hyperbel geschnitten. Das räumliche Viereck liegt auf dem Hyperboloid, wenn die Geraden zweier gegenüberliegender Seitenpaare zu je einer Erzeugungslinienschar des Hyperboloids gehören. Die Projektionen sämtlicher Erzeugender des Hyperboloids in der Kehlellipsenebene sind Tangenten der Kehlellipse.

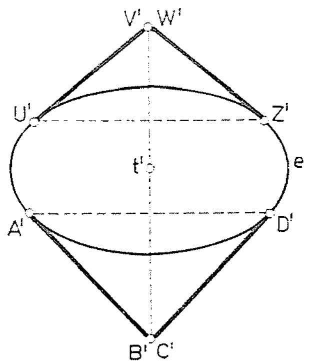

Abb. 6

Eine durch die Tangente durchgehende und auf die Kehlellipsenebene senkrechte Ebene ist die Berührungsebene des Hyperboloids, durch die aus der Fläche zwei Hyperboloiderzeugende ausgeschnitten werden, die sich im Punkt der Kehlellipse schneiden und gleichzeitig mit der Kehlellipsenebene einen gleichen Winkel bilden. Ferner werden durch zwei Erzeugendenpaare, die sich in den zwei Endpunkten der einen Diagonalen der Kehlellipse schneiden, mit der Kehlellipsenebene gleich große Winkel gebildet.

In Abb. 6 ist in der Ebene der Zeichnung die Kehlellipse e des windschiefen Hyperboloids angegeben. Ist die Projektion eines räumlichen Vierecks $A'B'D'C'$ und der Abschnitt zwischen den Punkten B und C des Hyperboloids gleich dem Abschnitt AD, dann ist $ABDC$ ein *räumliches Quadrat*, weil die Seiten für sich sowie die Diagonalen für sich gleich sind. In diesem Falle sind auch die Winkel gleich, da ja die Diagonaldreiecke kongruent sind, weil ihre entsprechenden Seiten gleich sind. Es bedarf jedoch einer gründlicheren Überlegung, wie bei einem vorgegebenen Hyperboloid das räumliche Quadrat der Fläche gezeichnet werden soll. Für die durch die große Achse der Kehlellipse durchgehende Symmetrieebene ist auch die Symmetrische des räumlichen Quadrats ein räumliches Quadrat.

Es seien in Abb. 6 die Projektion des räumlichen Vierecks $U'V'Z'W'$ und der Abschnitt zwischen den Punkten V und W des Hyperboloids ungleich dem Abschnitt UZ. Dann ist *$UVZW$ ein räumlicher Rhombus*, da die Seiten gleich, die Diagonalen UZ und VW aufeinander senkrecht, ferner die einander gegenüberliegenden Winkelpaare einander gleich sind: $UVZ \measuredangle = UWZ \measuredangle$ und $VUW \measuredangle = VZW \measuredangle$. Einen beliebigen Punkt der großen und der kleinen Achse der Ellipse außerhalb derselben als $V' \equiv W'$ gewählt, erhält man in jedem Falle einen neuen räumlichen Rhombus. Selbstverständlich liegen die zu der Symmetrieebene der Diagonalen in der Kehlellipsenebene Symmetrischen aller räumlicher Rhomben des Hyperboloids ebenfalls auf dem Hyperboloid.

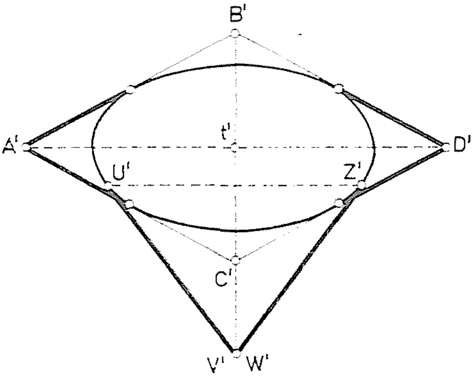

Abb. 7

In Abb. 7 ist der die Kehlellipse berührende Rhombus $A'B'D'C'$ ebenfalls die Projektion eines *räumlichen Rhombus* des Hyperboloids. Aus der Abbildung ist leicht zu erkennen, daß die Seiten gleich, die gegenüberliegenden Winkelpaare gleich, die Diagonalen aufeinander senkrecht und ihre Halbierungspunkte durch die Achse t des Hyperboloids verbunden sind.

Das Oblongum $A'B'D'C'$ in Abb. 8 ist die Projektion eines *räumlichen Oblongums*. Es ist leicht einzusehen, daß die gegenüberliegenden Seitenpaare gleich lang, die Winkel gleich sind, weil die entsprechenden Schenkel mit der Horizontalebene gleich große Winkel bilden. Die die Halbierungspunkte der Diagonalen AD und BC verbindende Mittellinie o fällt mit der Achse t des Hyperboloids zusammen und erscheint im Bilde als Punkt. Das Oblongum von allgemeiner Lage $U'V'Z'W'$ in Abb. 8 ist die Projektion eines der räumlichen Oblonge des Hyperboloids und gilt für alle die Kehlellipse berührende Oblongen.

Das beliebige, die Kehlellipse berührende Rhomboid $A'B'D'C'$ in Abb. 9 ist die Projektion eines der *räumlichen Rhomboide* des Hyperboloids. Das ist leicht einzusehen, da sich die Gleichheit der gegenüberliegenden Seitenpaare aus den durch die Hyperboloiderzeugenden und die Kehlellipsenebene gebildeten Winkeln ableiten läßt, ferner die Gleichheit der beiden gegenüberliegenden Winkelpaare, jedes für sich, aus der Kongruenz der Diagonaldreiecke folgt. Schließlich fällt die die Halbierungspunkte verbindenden Mittellinie *o* mit der Achse *t* des Hyperboloids zusammen und bildet so mit diesen gegenüberliegenden Seitenpaaren, jedem für sich, einen Winkel gleicher Größe. Das Gesagte gilt für alle, die Kehlellipse berührenden Rhomboide.

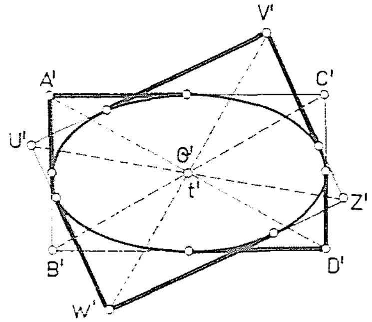

Abb. 8

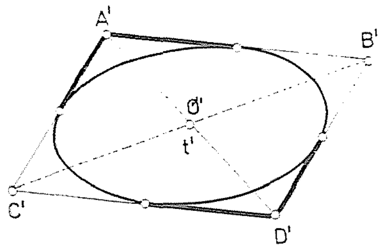

Abb. 9

Es sei bemerkt, daß die Symmetrischen zu allen drei Symmetrieebenen des Hyperboloids sämtlicher räumlicher Parallelogramme desselben räumliche Parallelogramme des Hyperboloids ergeben.

2.2 *Weitere räumliche Vierecke auf dem allgemeinen Hyperboloid*

Die Projektionen je zweier benachbarter Seiten des räumlichen Vierecks $ABDC$ sollen auf zwei beliebige Berührungslinien der Kehlellipse des allgemeinen windschiefen Hyperboloids in Abb. 10 fallen. Aus der Projektion folgt, daß $AB = AC$ und $BD = CD$, und AD zu BC senkrecht steht, also ein *räumliches Deltoid* dargestellt wurde. Die Kehlellipsenebene ist die einzige Symmetrieebene des Deltoids. Wird also ein beliebiger Punkt (z. B. B) des Hyperboloids außerhalb seiner zwei Hyperbel-Hauptschnitte angesetzt, so bestimmt dieser bereits eindeutig ein räumliches Deltoid des Hyperboloids.

In Abb. 10 wurde auch die Projektion eines räumlichen Deltoids $UVZW$ gezeichnet, dessen Symmetrieebene mit der durch die große Achse der Kehlellipse durchgehenden Symmetrieebene des Hyperboloids zusammenfällt. Wird also je ein beliebiger Punkt, z. B. U und Z, in zwei verschiedenen Ästen eines Hyperbel-Hauptschnittes des Hyperboloids und auf derselben Seite der Kehlellipsenebene angenommen, so bestimmen diese Punkte ein räumliches Deltoid.

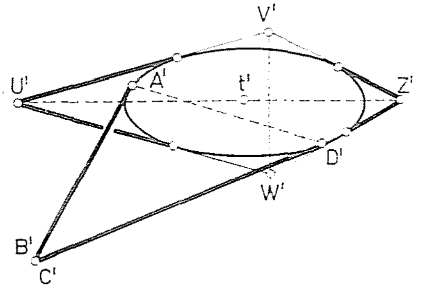

Abb. 10

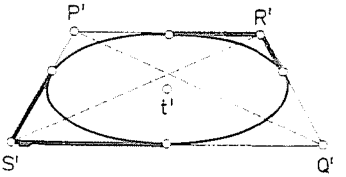

Abb. 11

Das Grundformat des durch das räumliche Viereck gelegten Projektionsprismas in Abb. 11 ist das die Kehlellipse berührende, gleichschenklige Trapez $P'R'Q'S'$. Da der räumliche Abschnitt PS gleich dem Abschnitt QR ist (weil beide mit der Kehlellipsenebene gleiche Winkel bilden) und die Seiten PR und QS mit der Umrißkante des Projektionsprismas gleiche Winkel bilden, ferner die Seitenflächen des durch diese gehenden Projektionsprismas mit den Seitenflächen des Trägerprismas identisch sind, wird das räumliche Viereck $PRQS$ ein *räumliches gleichschenkliges Trapez genannt.* Die Erzeugenden $P'R'$ und $W'S'$ beibehalten, erhält man weitere räumliche gleichschenklige Trapezen, wenn man die Ellipsenberührungslinien $P'S'$ und entsprechend $Q'R'$ — unter Beibehaltung ihrer gleichen Länge — in eine veränderte Lage bringt. Vertauscht man die Rollen der großen und der kleinen Achse der Kehlellipse, gelangt man zu einer weiteren Menge von räumlichen gleichschenkligen Trapezen.

Das Grundformat des Projektionsprismas des räumlichen Vierecks in Abb. 12, das die Kehlellipse berührende Trapez $K'M'L'N'$ ist die Projektion eines *räumlichen Trapezes.* Bei der Untersuchung ihrer Anzahl kann man in der gleichen Weise verfahren, wie beim räumlichen gleichschenkligen Trapez.

In Abb. 13 wurden die Projektionen in der Kehlellipsenebene des durch die Kehlellipsenebene geschnittenen allgemeinen räumlichen Vierecks *ABDC* und des unter dieser Ebene befindlichen *allgemeinen räumlichen Vierecks UVZW* gezeichnet. Vier beliebige Berührungslinien der Kehlellipse sind stets die Projektionen von vier Erzeugungslinien, von denen die je zwei gegenüberliegenden von windschiefer Lage sind. Durch diese vier Erzeugenden wird ein

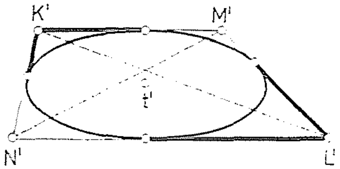

Abb. 12

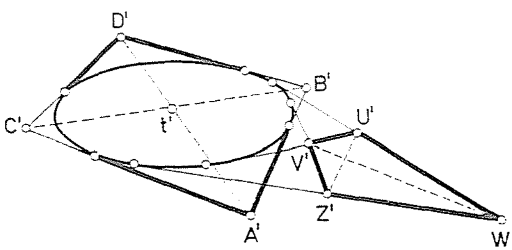

Abb. 13

räumliches allgemeines Viereck des allgemeinen windschiefen Hyperboloids bestimmt. Sind z. B. *A* und *D* zwei beliebige Punkte des Hyperboloids, so bestimmen diese mit den durch sie gehenden Erzeugungslinien eines der räumlichen allgemeinen Vierecke des Hyperboloids. Es könnte noch weiter untersucht werden, wie räumliche allgemeine Vierecke genauer kategorisiert werden können, der Umfang dieses Beitrags gestattet jedoch nicht, darauf näher einzugehen.

Wird ein beliebiges räumliches Viereck des allgemeinen windschiefen Hyperboloids in einer beliebigen seiner drei Symmetriebenen gespiegelt, erhält man auf der Fläche wieder ein räumliches Viereck.

3. Die räumlichen Vierecke des hyperbolischen Paraboloids

3.1 *Räumliche Parallelogramme auf dem hyperbolischen Paraboloid*

Beide Hauptschnitte des hyperbolischen Paraboloids sind Parabeln, deren Ebenen **A** und **B** aufeinander senkrecht stehen und die zwei Symmetrieebenen der Fläche sind (Abb. 14a). Die asymptotischen Ebenen U und V sind zu beiden symmetrisch und in diesen befinden sich die Haupterzeugenden u und v der Fläche. Die eine Erzeugungslinienschar ist zu der Ebene **U**, die andere zu der Ebene **V** parallel. Die gemeinsame Gerade t der Ebenen ist die einzige Achse der Fläche, deren Parallelen die Fläche nur in einem einzigen Punkte schneiden. u und v stehen auf t senkrecht. Die in den zu den Ebenen **U** und **V** symmetrischen Ebenen liegenden Erzeugenden bilden mit der Ebene der Zeichnung einen gleichen Winkel, ihre Neigung ist jedoch entgegengesetzt. In der Abbildung ist der räumliche Rhombus $PSQR$ dargestellt, dessen Projektionsprisma mit seinem Trägerprisma zusammenfällt. Wird der Punkt R in

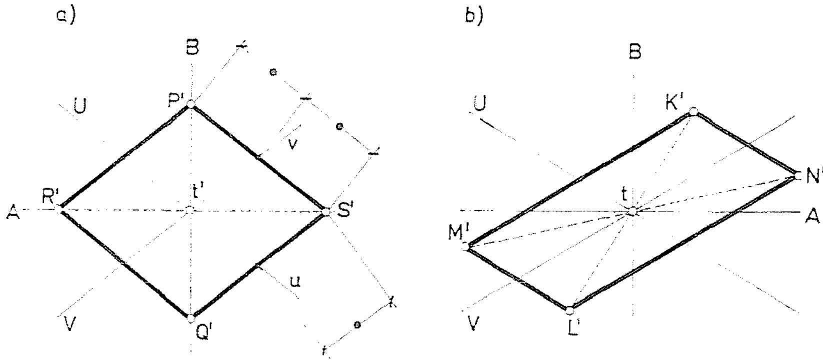

Abb. 14

beliebigen Punkten der beiden Hauptschnittparabeln angesetzt, erhält man weitere räumliche Rhomben der Fläche. Die Symmetrieebenen aller räumlichen Rhomben fallen mit der Symmetrieebene des Paraboloids zusammen.

In Abb. 14b ist die Projektion des *räumlichen Rhomboids KNLM* zu sehen. Die Mittellinie, welche die Halbierungspunkte der horizontalen Diagonalen MN und KL verbindet, ist die Achse t selbst. Die gegenüberliegenden Seiten sind von gleicher Länge und aus der Kongruenz der Diagonaldreiecke mit je zwei gemeinsamen Seiten folgt, daß auch die gegenüberliegenden Winkel gleich sind. Wird Punkt M auf der Fläche beliebig, jedoch in keinem Hauptschnitt angenommen, bestimmt er auf der Fläche stets ein einziges räumliches Rhomboid.

In Abb. 15a wurde die Projektion des *räumlichen Quadrats PSQR*, das Quadrat $P'S'Q'R'$ auf dem *gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid* angesetzt. Die asymptotischen Ebenen dieser Fläche sind aufeinander senkrecht und die Hauptschnitte sind kongruente Parabeln. Es liegt auf der Hand, daß die Seiten, die Winkel und die aufeinander senkrechten Diagonalen des angenommenen räumlichen Quadrats gleich sind. Bewegt sich der Punkt P auf der Parabel der Symmetrieebene **A**, bestimmt er in jeder Lage ein anderes räumliches Quadrat und jedes ein räumliches Quadrat tragende Prisma hat offenbar ein anderes Grundquadrat. Das räumliche Quadrat, dessen Seiten mit der Ebene der Erzeugungslinien u und v einen Winkel von 45° bilden, wird durch einen Würfel getragen, und somit ist es das einzige *räumliche regelmäßige Quadrat*, das auf der Fläche gezeichnet werden kann. In den Abbildungen ist das $KNLM$, bei dem die einander gleichen Diagonalen KL und MN gleich den räumlichen Seiten MK, KN, NL und LM sind.

In Abb. 15b ist $P'R'Q'S'$ die Projektion eines *räumlichen Oblongums*, das sich nur auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid befinden kann. Mit der Ausnahme der Punkte der Hauptschnitte, wird durch jeden beliebigen Punkt der Fläche ein auf der Fläche liegendes räumliches Oblongum bestimmt.

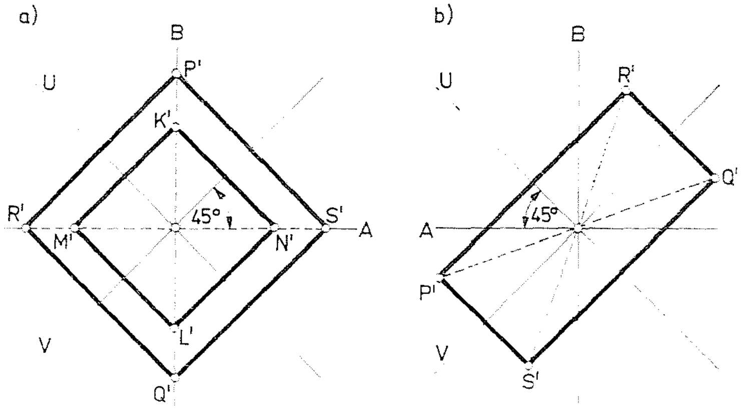

Abb. 15

3.2 *Räumliche allgemeine Vierecke auf dem hyperbolischen Paraboloid*

Befinden sich das eine oder beide von je einer Erzeugungslinienschar der Fläche ausgewählten Erzeugendenpaare in einem zu den asymptotischen Ebenen nicht symmetrischen, parallelen Ebenenpaar, erhält man kein räumliches Parallelogramm mehr, sondern ein räumliches allgemeines Viereck, auf das hier nicht eingegangen werden soll.

4. Skelettkonstruktionen aus räumlichen Vierecken

Durch ein räumliches Viereck sowohl auf dem windschiefen Hyperboloid als auch auf dem hyperbolischen Paraboloid wird ein Teil der Fläche umgrenzt. Nur auf dem windschiefen Hyperboloid sind räumliche Vierecke vorhanden, durch welche die Fläche in zwei Teile geteilt wird. In Abb. 5 sind z. B. beide, sowohl das *umgrenzende* Viereck $ABDC$ als auch das *Zweiteilungsviereck* $UVZW$

räumliche Vierecke. Der durch das räumliche Viereck umgrenzte Flächenteil wird als *hyperboloidisches* bzw. *paraboloidisches Element* bezeichnet. Vor allem die einfacheren räumlichen Parallelogramme sind für die Ausgestaltung von Skelettkonstruktionen und diese abdeckenden zusammengesetzten Flächen geeignet. Aus räumlichen Quadraten können kongruente, für Reihenfertigung geeignete Stabwerke und Schalenelemente entworfen werden und durch deren verschiedene Aufreihungen Dachschalen, jedoch auch Seitenwände zusammengestellt werden. Diese Arbeit setzte sich selbstverständlich nicht die Projektierung derartiger Konstruktionen zum Ziele, es sollten lediglich die geometrischen Zusammenhänge geklärt werden.

Zusammenfassung

Von zwei verschiedenen Erzeugungslinienscharen sowohl des windschiefen Hyperboloids als auch des hyperbolischen Paraboloids gewählte je zwei Erzeugende schneiden sich insgesamt in vier Punkten. Diese vier Punkte liegen infolge der windschiefen Lage der zu je einer Erzeugungslinienschar gehörenden Erzeugungslinienpaare nicht in der gleichen Ebene und können zu dreien nicht in derselben Geraden liegen, daher bestimmen sie ein räumliches Viereck. Im Beitrag wird untersucht, ob auf den zwei verschiedenartigen windschiefen Flächen zweiter Ordnung verschiedene räumliche Vierecke von dem einfachsten räumlichen regelmäßigen Quadrat bis zu dem räumlichen allgemeinsten Viereck zu finden sind, und wie diese angenommen werden können.

Durch das auf der Fläche konstruierbare räumliche Viereck wird entweder in der Fläche ein umgrenztes »Fenster« durchbrochen oder die Fläche in zwei Teile unterteilt. Was die praktische Anwendung anbelangt, können vor allem die einfacheren räumlichen Parallelogramme für die Ausgestaltung von Skelettkonstruktionen und diese abdeckenden zusammengesetzten Flächen herangezogen werden. Aus räumlichen Vierecken können kongruente, für Serienfertigung geeignete Stabwerke und Schalenelemente entworfen und durch deren verschiedene Aufreihung zickzackförmige Dachdecken, jedoch auch von der Ebene abweichende Seitenwände zusammengestellt werden. Der Aufsatz hatte selbstverständlich nicht den Zweck, solche Konstruktionen zu projektieren, sondern lediglich die als hinzugehörig betrachteten geometrischen Zusammenhänge zu klären.

Literatur

1. PETRICH, G.: Die Konstruktion Paraboloidschalen tragender, räumlicher Vierecke. Periodica Polytechnica Arch. Vol. 21. (1977) No. 1—2. Budapest.

Prof. Dr. GÉZA PETRICH, H-1521 Budapest