DIE GEOMETRISCHEN ORTE DER ACHSEN PERSPEKTIVER STRAHLENBÜSCHEL IN BEWEGUNG

von

L. VIGASSY

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, TU Budapest

Eingegangen am 12. Februar 1979

1. Zwei Strahlenbüschel (P_1 und P_2) werden als perspektiv bezeichnet, wenn die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen (a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2) in einer Geraden e_{12} liegen (Abb. 1). Aus dieser Definition folgt, daß die Verbindungsgerade (c_1 und c_2) der Träger P_1 und P_2 der beiden Strahlenbüschel sich selbst entspricht (c_{12}). Da eine Gerade e_{12} durch zwei Punkte (A, B) schon bestimmt ist, kann folglich von den perspektiven Strahlenbüscheln keine weitere Gerade frei gewählt werden.

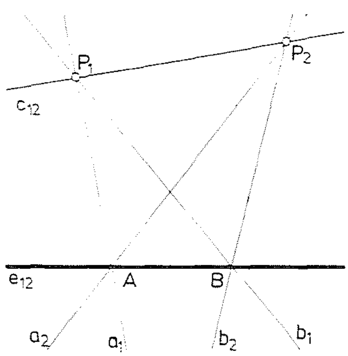

Abb. 1

Wird der Träger P_2 des zweiten Strahlenbüschels in einen anderen Punkt P_3 der Ebene verlegt, jedoch in der Weise, daß *das Strahlenbüschel mit dem Träger P_3 zu dem Strahlenbüschel mit dem Träger P_2 kongruent bleibe*, dann werden im allgemeinen die Strahlenbüschel P_1 und P_3 nicht perspektiv bleiben (Abb. 2). Es ist bekannt, daß in diesem Falle die beiden Strahlenbüschel als projektiv bezeichnet werden, wobei der geometrische Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Geraden ein Kegelschnitt ist.

Im weiteren sei das Strahlenbüschel mit dem Träger P_1 fest, das Strahlenbüschel P_2 bewege sich aber in der Weise, daß

1. P_2 in verschiedene Punkte der Ebene (P_3, P_4 . . .) zu liegen komme;
2. mit dem Strahlenbüschel P_2 kongruent und
3. zu dem Strahlenbüschel P_1 perspektiv bleibe.

Gesucht wird die neue perspektive Achse e_{13}.

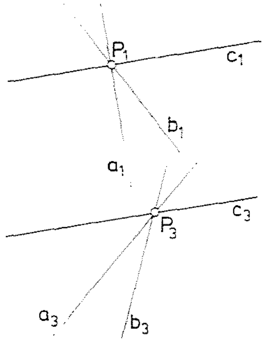

Abb. 2

2. Werden in dem einen Strahlenbüschel zwei aufeinander senkrechte Strahlen angesetzt, so werden die diesen im perspektiven Strahlenbüschel entsprechenden Strahlen im allgemeinen nicht senkrecht sein. Es ist bekannt, daß es in dem einen Strahlenbüschel immer zwei senkrechte Strahlen gibt, deren Gegenstücke auch aufeinander senkrecht sind ($q_1 \perp r_1$ und $q_2 \perp r_2$ in Abb. 3). Da ein solches aufeinander senkrechtes Geradenpaar stets vorhanden ist, *werden im weiteren die perspektiven Strahlenbüschel durch die Strahlen* $P_1(c_1q_1r_1)$ und $P_2(c_2q_2r_2)$ *angegeben*.

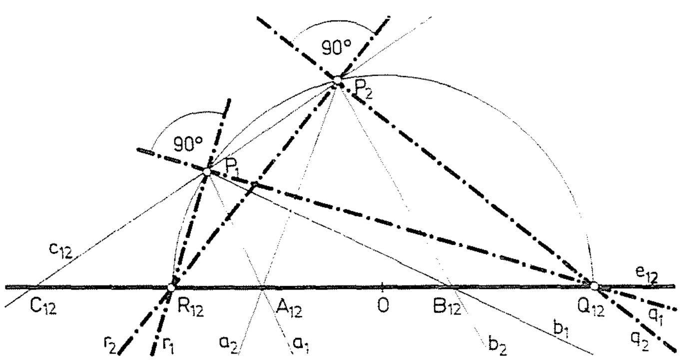

Abb. 3

3. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel:* $P_1(c_1q_1r_1)$ und $P_2(c_2q_2r_2)$. *Die perspektive Achse ist* e_{12}. *Verschieben wir nun das perspektive Strahlenbü-*

schel P_2 zu sich selbst parallel die sich selbst entsprechende Gerade c_{12} entlang in eine beliebige Lage P_3. Gesucht wird die perspektive Achse e_{13} (Abb. 4).

So erhält man statt dem Strahlenbüschel P_2 das Strahlenbüschel P_3.

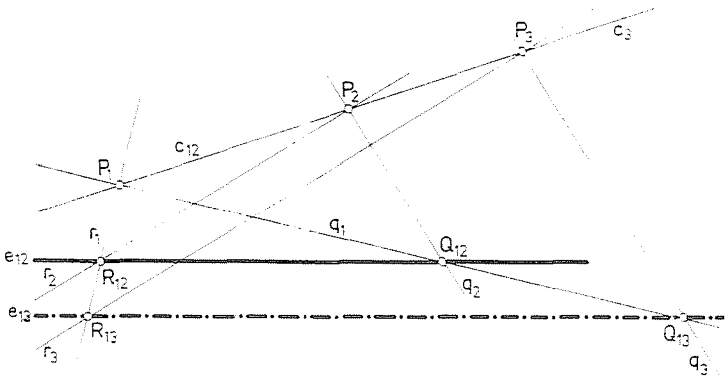

Abb. 4

Wegen der Verschiebung in eine besondere Richtung ist $c_3 = c_1$.

Da r_3 zu r_2 parallel ist, gilt $\dfrac{P_1R_{12}}{R_{12}R_{13}} = \dfrac{P_1P_2}{P_2P_3}$.

Da q_3 zu q_2 parallel ist, gilt $\dfrac{P_1P_2}{P_2P_3} = \dfrac{P_1Q_{12}}{Q_{12}Q_{13}}$.

Daraus folgt, daß $\dfrac{P_1R_{12}}{R_{12}R_{13}} = \dfrac{P_1Q_{12}}{Q_{12}Q_{13}}$.

Das ist nur möglich, wenn e_{13} zu e_{12} parallel ist.

I. Wird das eine perspektive Strahlenbüschel die sich selbst entsprechende Gerade entlang verschoben, bleibt die neue perspektive Achse zu der ursprünglichen parallel.

Das ist kein neuer Zusammenhang, den wir aber noch brauchen werden.

4. *Gegeben seinen zwei perspektive Strahlenbüschel: P_1* und *P_2. Verschieben wir P_2 in einen beliebigen Punkt P_3 in der Weise, daß es zu P_1 perspektiv bleibe* (Abb. 5).

Das ist dadurch bedingt, daß $d_1 \equiv d_3$ d. h. die Verbindungsgerade der Zentren P_1 und P_3 sich selbst entspreche. Das ist nur möglich, wenn das Strahlenbüschel P_3 im Verhältnis zu P_2 *verdreht* ist. P_2 ist zu P_3 kongruent, daher gelten:

$$r_2d_2 \sphericalangle = r_3d_3 \sphericalangle = \varphi \text{ und } c_3r_3 \sphericalangle = c_2r_2 \sphericalangle \equiv q_1e_{12} \sphericalangle = \alpha.$$

Daraus lassen sich r_3 und q_3 graphisch darstellen. Die perspektive Achse der Strahlenbüschel P_1 und P_3 ist die Gerade $e_{13} = |Q_{13}R_{13}|$. Sowohl P_1 als auch P_3 liegen in der Kreislinie mit dem Durchmesser $R_{13}Q_{13}$, also ist aufgrund der Umfangswinkel auf demselben Bogen:

$$q_1 e_{13} \sphericalangle = r_3 d_3 \sphericalangle = \varphi.$$

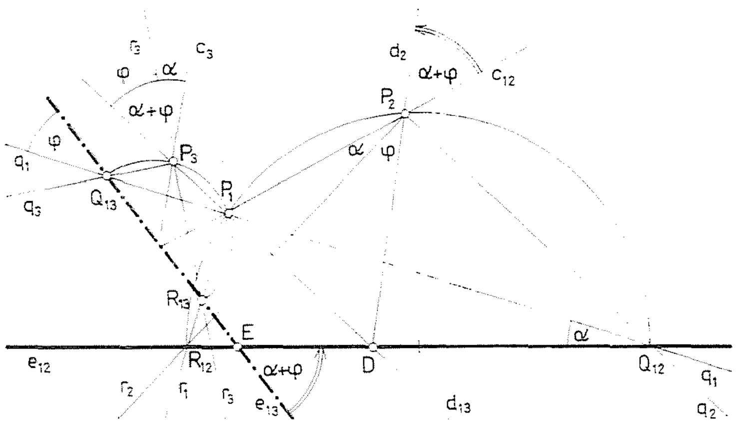

Abb. 5

Damit ist in $Q_{13}EQ_{12} \sphericalangle = e_{13}e_{12} \sphericalangle = \varphi + \alpha$, wobei durch α die Lage des Strahlenbüschels P_1 im Verhältnis zu der Achse e_{12} gekennzeichnet wird. Da $P_1P_2R_{12} \sphericalangle = \alpha$, gilt:

$$\varphi + \alpha = c_2 d_2 \sphericalangle = c_3 d_3 \sphericalangle = e_{13}e_{12} \sphericalangle$$

$$\underline{c_2 d_2 \sphericalangle = e_{13}e_{12} \sphericalangle}\,.$$

Die sich selbst entsprechenden Geradenpaare sind c_{12} im System P_1P_2, und d_{13} im System P_1P_3. Daher läßt sich das obige Ergebnis wie folgt formulieren: *Durch die alte und die neue Achse wird ein Winkel gleicher Größe gebildet, wie durch die neue und die alte sich selbst entsprechende Gerade.*

Macht also die Gerade d_2, welche die Lage von P_3 bestimmt, einen Winkel von 180°, dann nimmt die Achse e_{13} alle möglichen Richtungen an. Somit gibt es keine zwei Punkte P_2, die mit P_1 die gleiche Achse bestimmen würden.

Auch im weiteren werden wir uns nur mit gleichgerichteten Strahlenbüscheln beschäftigen.

5. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2. Gesucht wird der Winkel φ_0, bei dem die Verbindungsgerade d_{13} der Zentren P_1 und P_3 parallel zu der Achse e_{13} ist* (Abb. 6.)

Wegen der Kongruenz gilt: $d_2r_2 \sphericalangle = d_3r_3 \sphericalangle = \varphi_0$

Wegen der Umfangswinkel in der Bogenlinie P_1R_{13} ist:

$$d_3r_3 \sphericalangle = q_1e_{13} \sphericalangle = \varphi_0$$

Da $d_{13} \parallel e_{13}$, ist $q_1e_{13} \sphericalangle = q_1d_{13} \sphericalangle = \varphi_0$

Schließlich ergibt sich $r_2d_2 \sphericalangle = d_{13}q_1 \sphericalangle = \varphi_0$.

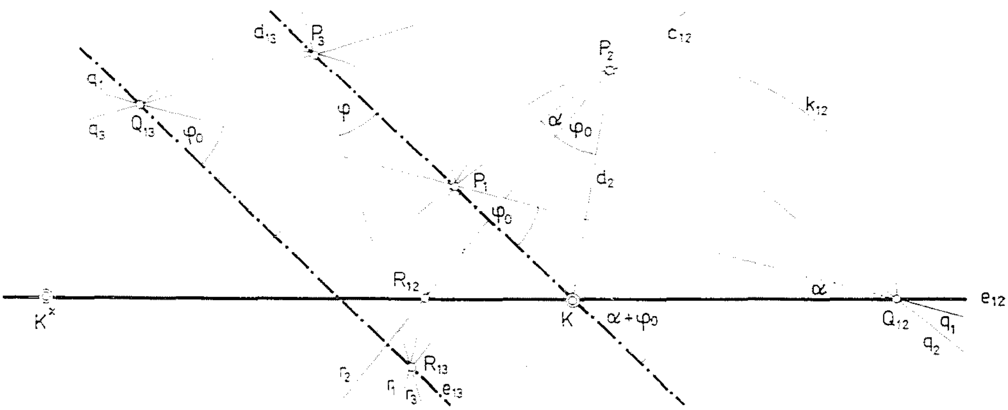

Abb. 6

Um den gesuchten Wert φ_0 zu finden, setzen wir φ als Veränderliche an, jedoch in der Weise, daß diese in den beiden Strahlenbüschen gleich bleibe. So werden die aus den Geraden d erhaltenen beiden Strahlenbüschel in entgegengesetzter Richtung kongruent, also projektiv sein. Die beiden Strahlenbüschel ergeben in e_{12} zwei projektive Punktreihen, deren Doppelpunkte K, K^x die gesuchten Geraden d liefern.

Beachten wir, daß der eine Winkel des Dreiecks $P_1KR_{12} \sphericalangle = \alpha + \varphi_0$ ist, da er ja der Außenwinkel des Dreiecks P_1KQ_{12} ist. Auch der Peripherienwinkel des Kreises der Punkte P_1P_2K bei P_2 ist $\alpha + \varphi_0$. Daraus folgt, daß e_{12} die Berührungslinie der Kreislinie in K ist.

K wird also wie folgt graphisch dargestellt: Die Berührungspunkte der durch die Punkte P_1 und P_2 durchgehenden und e_{12} berührenden beiden Kreise sind K und K^x. Da das Strahlenbüschel der d-s entgegengesetzt ist und e_{12} die Träger nicht trennt, hat die Aufgabe stets (zwei) Lösungen. *Man verstößt also nicht gegen die Allgemeingültigkeit, wenn die Träger P_1 und P_2 im weiteren so gewählt werden, daß die Gerade $|P_1P_1| = c_{12}$ zu e_{12} parallel sei.*

6. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2 in der Weise, daß c_{12} parallel zu e_{12} sei. Ermitteln wir graphisch P_3 so, daß d_{13} parallel zu e_{13} sei* (Abb. 7).

Von den beiden Lösungen des vorigen Punktes ist die eine bekannt, da ja $c_{12} \parallel e_{12}$. Damit läßt sich d_{13} leicht darstellen. Es sei $P_1P_3 = d_{13}$ die Gerade, die e_{12} im Mittelpunkt D des Kreises k_{12} schneidet. In diesem Falle ist das Dreieck P_1DP_2 gleichschenklig. Damit ist

$$d_1c_1 \sphericalangle = c_2d_2 \sphericalangle = \varphi + \alpha.$$

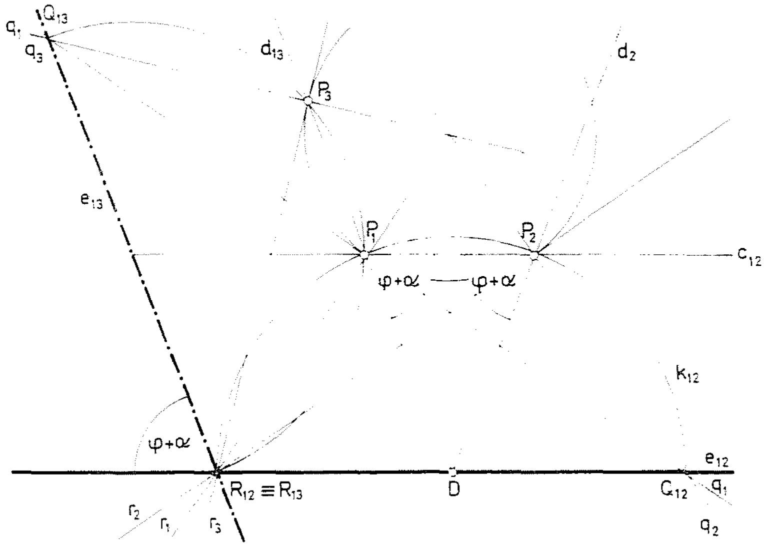

Abb. 7

Wie wir gesehen haben, ist aber

$$c_2d_2 \sphericalangle = e_{13}e_{12} \sphericalangle.$$

So ist e_{13} parallel zu d_{13}.

In der Abbildung ist $P_1P_3 = P_1P_2$ daher ist $R_{12} = R_{13}$ der Schnittpunkt von e_{12} und e_{13}.

7. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1* und *P_2. Verschieben wir P_2 in einen beliebigen Punkt P_3, so daß es zu P_1 perspektiv bleibe. Es soll bewiesen werden, daß der Schnittpunkt E von e_{12} und e_{13}* in *der Kreislinie der Punkte P_2P_3D liegt.* Da P_3 zu P_2 kongruent ist (Abb. 8), gilt

$$c_2c_3 \sphericalangle = d_2d_3 \sphericalangle = q_2q_3 \sphericalangle = r_2r_3 \sphericalangle = \delta.$$

Daher befinden sich die Punkte $P_2P_3CDQ_{23}R_{23}$ auf *derselben* Kreislinie k.

Da aber auch $$e_{12}e_{13} \sphericalangle = \varphi + \alpha$$

und die Größe der Winkel auf der Bogenlinie CD $\varphi + \alpha$ ist, *liegt Punkt E in der Kreislinie k.*

8. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1* und *P_2. Legen wir auf diese beiden Träger einen beliebigen Kreis k. Es soll bewiesen werden, in welchem*

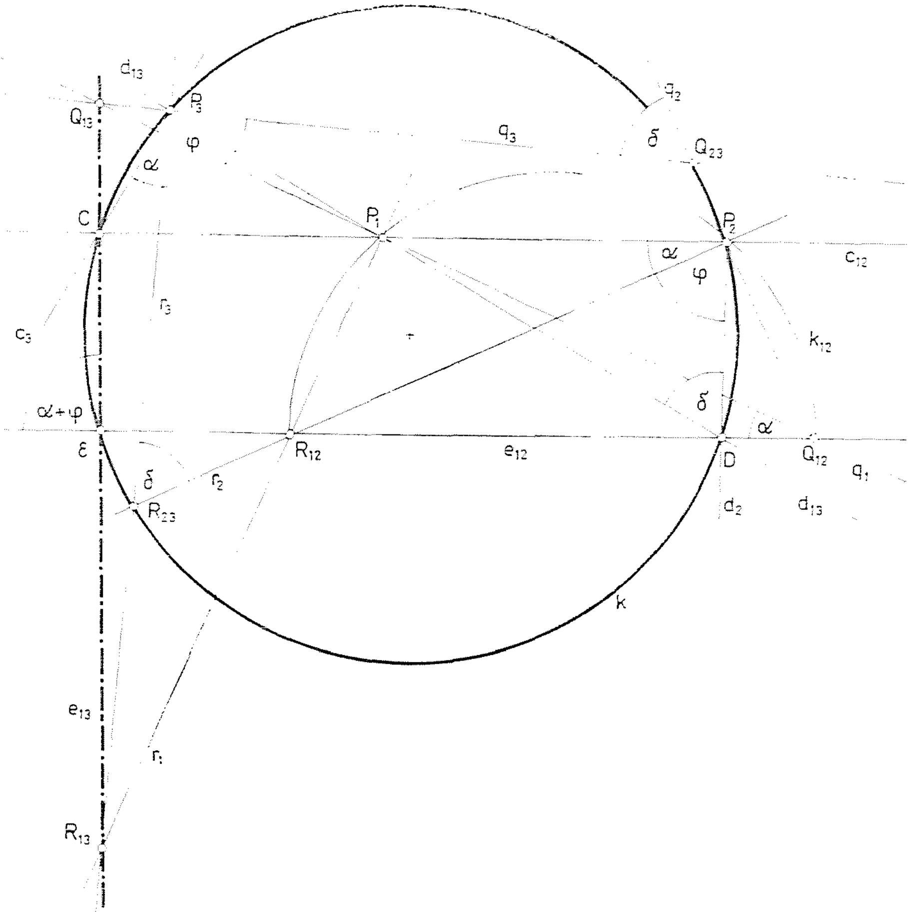

Abb. 8

Punkt dieses Kreises auch immer der Punkt P_3 angenommen wird, e_{13} immer in demselben Punkt E die Gerade e_{12} schneidet.

Durch die Tangente in P_2 des Kreises k wird E ausgeschnitten (Abb. 9).

Es sei $P_2P_3P_1 \sphericalangle = \lambda$. Daraus folgt, daß für jeden beliebigen Punkt P_3 des Kreises k auch $DP_3P_2 \sphericalangle = \lambda$.

Es sei E der andere Schnittpunkt des Kreises k_3 der Punkte DP_3P_2 mit e_{12}, dann ist auch der Ergänzungswinkel des Umfangswinkels in Punkt E

gleich λ. Da aber c_{12} zu e_{12} parallel ist, ist die Gerade P_2E die Tangente des Kreises k, die jedoch von der Lage des Punktes P_3 in der Kreislinie k unabhängig ist. Daher ergibt sich:

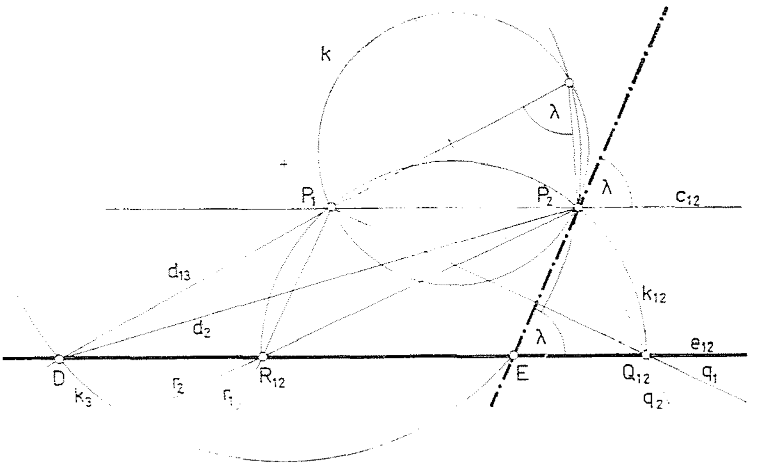

Abb. 9

II. Wird durch den Punkt P_3 ein durch die Punkte P_1 und P_2 durchgehender, beliebiger Kreis k beschrieben, so bilden die entsprechenden perspektiven Achsen ein Strahlenbüschel, dessen Träger ein bestimmter Punkt E von e_{12} ist.

Entartet der Kreis k zu der Geraden c_{12}, dann wird der Punkt E ein idealer Punkt von e_{12} sein, da ja dann $e_{13} \parallel e_{12}$.

9. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2. Wo werden die geometrischen Orte der perspektiven Achsen liegen, wenn P_3 die Kreislinie k beschreibt, in der P_1 liegt, P_2 jedoch nicht?*

Wählen wir zuerst P_3 in der Weise, daß die Gerade P_1P_3 durch den Mittelpunkt D des Kreises k gehe (Abb. 10). Man weiß, daß dann $e_{13} \parallel d_{13}$ ist. Man weiß aber auch, daß dann der Punkt $E = (e_{12}e_{13})$ durch die Tangente in P_2 des Kreises $P_1P_2P_3$ (k^*) aus der perspektiven Achse e_{12} ausgeschnitten wird.

Übergehen wir nun auf das System $P_1P_3e_{13}$. Hier sitzt der Kreis k auf beiden Trägern, so wird also der Punkt E^* aus e_{13} durch die Tangente in P_3 des Kreises k ausgeschnitten, in der die zu sämtlichen Punkten des Kreises k gehörenden perspektiven Achsen liegen. Es darf daher ausgesagt werden:

III. Fährt P_3 über einen in P_1 liegenden, jedoch nicht in P_2 liegenden, beliebigen Kreis, dann stellen die geometrischen Orte der perspektiven Achsen ein Strahlenbüschel dar.

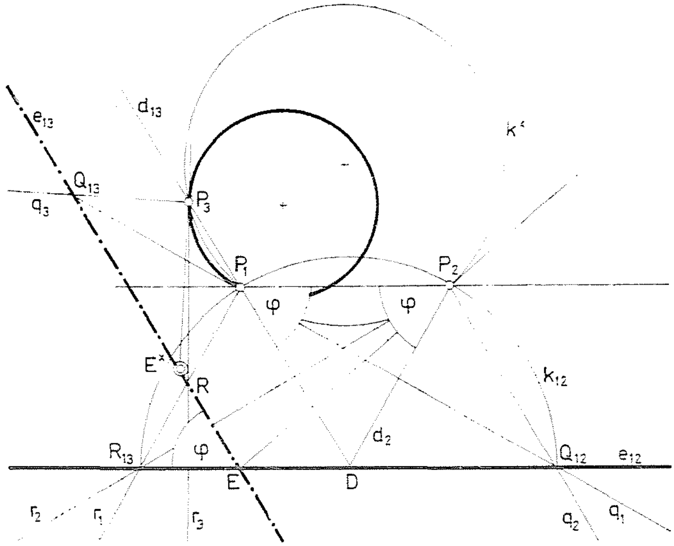

Abb. 10

10. *Gegeben sind zwei perspektive Strahlenbüschel P_1 und P_2. Welche sind die geometrischen Orte der perspektiven Achsen e_{14}, wenn P_3 über eine Gerade p fährt, die nicht an P_1 stößt?* Wählen wir in Abb. 11 zuerst eine Gerade p, die an P_2 stößt. Der durch den zu dem Punkt P_1 des Kreises k_{12} gehörenden Kreisdurchmesser d_{13} aus p ausgeschnittene Punkt sei P_3. Man weiß, daß dann $e_{13} \parallel d_{13}$ und e_{13} durch den Punkt E_3 geht, der durch die Tangente in P_2 des Kreises $P_1P_2P_3$ aus e_{12} ausgeschnitten wird.

Wählen wir nun in der Geraden p einen ganz beliebigen Punkt P_4 und stellen wir die entsprechende perspektive Achse e_{14} graphisch dar.

Durch die Tangente in Punkt P_2 des Kreises $P_1P_2P_4$ wird aus e_{12} der Punkt E_4 herausgeschnitten, in dem die unbekannte Gerade e_{14} die Gerade e_{12} schneidet. Das ist nun schon ein Punkt von e_{14}. Da $e_{13} \parallel d_{13}$ ist, wird im System P_1P_3 durch die Tangente in P_3 des Kreises $P_1P_3P_4$ aus e_{13} der Punkt E_4^* ausgeschnitten, in dem die unbekannte e_{14} die Gerade e_{13} schneidet. Die Verbindungsgerade von E_4 und E_4^* wird die perspektive Achse e_{14} sein.

Der Mittelpunkt K_4 des Kreises $P_1P_2P_4$ befindet sich einerseits in der oberen Senkrechten o des Abschnitts P_1P_2, anderseits in der Mittelsenkrechten im Halbierungspunkt F_4 des Abschnittes P_1P_4. Ändert P_4 seinen Ort in der Geraden p, wird auch E_4 in der Geraden e_{12} an einem anderen Ort liegen.

Es wird versucht, einen Zusammenhang zwischen den Punkten P_4 der Geraden p und den Punkten E_4 der perspektiven Achse e_{12} zu suchen.

Es ist klar, daß die Reihe der Punkte P_4 zu der Punktreihe F_4 perspektiv ist. Die Punktreihe F_4 liegt in einer Geraden f, durch welche die Entfernung P_1p halbiert wird und die zu p parallel ist. So kann ausgesagt werden, daß P_1 der Fokus einer Parabel ist, deren Scheiteltangente f ist und deren Tangenten die Halbierungssenkrechten F_4K_4 sind. Zu diesen Halbierungssenkrechten, also zu den Tangenten der Parabel gehört auch die Gerade o. Da zwei feste Tangenten o und f einer Parabel durch die anderen veränderlichen Tangenten in einer

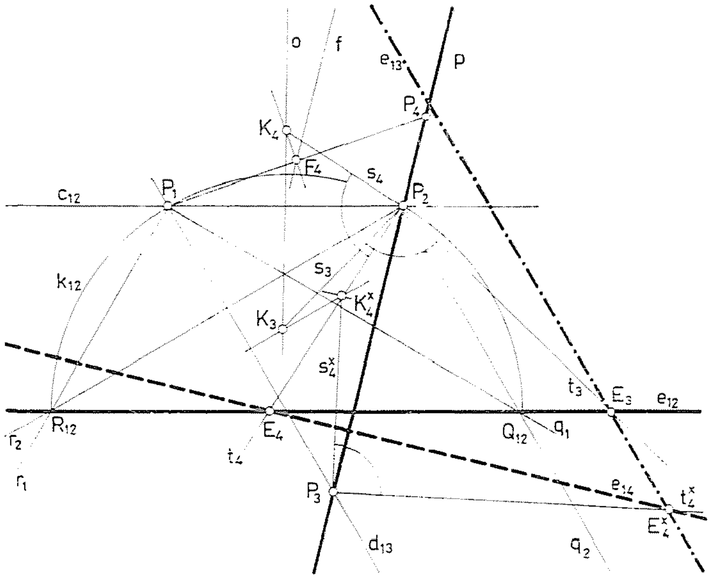

Abb. 11

projektiven Punktreihe geschnitten werden, darf ausgesagt werden, daß die Reihe der Punkte F_4 und jene der Punkte K_4 projektiv sind. Zu der Punktreihe K_4 ist jedoch das in P_2 liegende Strahlenbüschel s_4 perspektiv, da diese Strahlen die Radien der jeweiligen Kreise sind. Auf jeden Radius steht die zum Tangentenpunkt P_2 gehörende Tangente t_4 senkrecht. Daher ist das Strahlenbüschel der Tangenten zu dem Strahlenbüschel der Radien projektiv, da sie ja um 90° verdreht sind. Durch das Strahlenbüschel der Tangenten wird aus e_{12} die Punktreihe E_4 ausgeschnitten.

Ausführlich angeschrieben:

$$P_4 \ldots \wedge F_4 \ldots \overline{\wedge} K_4 \ldots \wedge s_4 \ldots \overline{\wedge} t_4 \ldots \wedge E_4 \ldots$$

also

$$P_4 \ldots \overline{\wedge} E_4 \ldots$$

Nach dem gleichen Gedankengang darf ausgesagt werden, daß $P_4 \ldots \overline{\wedge} E_4^* \ldots$ Durch Summierung der beiden Ergebnisse ergibt sich:

$$E_4 \ldots \overline{\wedge} E_4^* \ldots$$

So erhält man in den Geraden e_{12} und e_{13} zwei projektive Punktreihen. Unter 4 haben wir jedoch gesehen, daß

$$c_2 d_2 \sphericalangle = e_{13} e_{12} \sphericalangle .$$

Wird also für e_{14} eine beliebige Richtung gewählt, läßt sich zu dieser stets ein einziger Punkt P_4 konstruieren, da ja eine Gerade die Gerade p nur in einem einzigen Punkte schneiden kann. Eine solche Gerade ist aber auch in jedem Falle vorhanden. Somit ist der gesuchte geometrische Ort eine *Parabel.*

Wenn sich schließlich die Gerade p auch an P_2 nicht anfügt, so schneidet sie c_{12} in einem Punkt P_2^*. Dazu gehört eine Gerade e_{12}^*, die parallel zu e_{12} ist. In diesen System tritt jedoch schon ein Fall ein, in dem sich p an P_2^* anfügt. Nun kann bereits die gestellte Frage beantwortet werden:

IV. Der geometrische Ort der zu den Punkten einer beliebigen, sich nicht an P_2 fügenden Geraden perspektiven Achsen ist eine Parabel.

11. *In Abb. 12 sind die wesentlichen Daten einer Parabel graphisch dargestellt, die durch die zu den Punkten einer in P_2 sitzenden Geraden p von allgemeiner Lage gehörenden perspektiven Achsen bestimmt wird.*

Es ist bekannt, daß zu der Parabel aus jedem beliebigen Punkt der Leitlinie zwei Tangenten geführt werden können, die aufeinander senkrecht stehen.

Eine beliebige Tangente sei gerade e_{12}. Zu dieser wird die Senkrechte e_{13} geführt. Da $c_2 d_2 \sphericalangle = e_{13} e_{12} \sphericalangle$, und dieser Winkel im vorliegenden Falle gerade 90° ist, kann d_2 gezeichnet werden. Durch letztere wird d_1 und durch diese P_3 bestimmt. Durch die Tangente t_3 in P_2 des Kreises $P_1 P_2 P_3$ wird E_3, der Schnittpunkt von e_{12} mit e_{13} aus e_{12} ausgeschnitten. Da e_{13} zu e_{12} senkrecht steht, ist E_3 bereits ein Punkt der gesuchten Leitlinie.

Da r_1 und q_1 im Punkt P_1 aufeinander senkrecht stehen, gelten nach dem gleichen Gedankengang $(q_1 p) = P_5$ und $(r_1 p) = P_4$. Durch die Tangente t_4 in P_2 des Kreises $P_1 P_2 P_4$ wird aus e_{12} der Punkt E_4 ausgeschnitten. Durch die Tangente t_5 in P_2 des Kreises $P_1 P_2 P_5$ wird aus e_{12} der Punkt E_5 ausgeschnitten. Aufgrund der Gleichheit $c_2 d_2 \sphericalangle = e_{13} e_{12} \sphericalangle$ ist $c_2 r_2 \sphericalangle = e_{14} e_{12} \sphericalangle$

und $c_2q_2 \sphericalangle = e_{15}e_{12} \sphericalangle$. So stehen e_{14} und e_{15} aufeinander senkrecht, und ihr Schnittpunkt ergibt einen anderen Punkt der Leitlinie.

Die Leitlinie auf eine beliebige Tangente gespiegelt, erhält man Geraden, die durch den Fokus F gehen.

12. *Es ist jedoch kein Zufall, daß in Abb. 12 der Tangentenpunkt der Parabel in e_{12} mit dem Schnittpunkt E der Geraden p und e_{12} gerade zusammenfällt.*

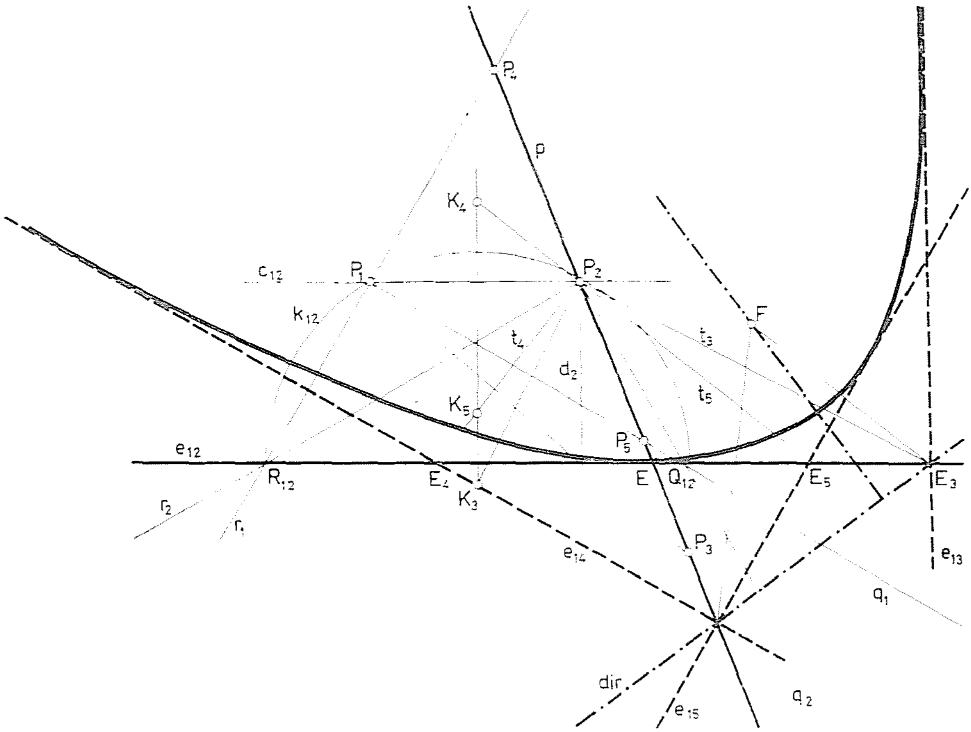

Abb. 12

Es ist bekannt, daß der Schnittpunkt zweier einander unendlich nahe liegender Tangenten der Tangentenpunkt ist. Es sei X ein Punkt der Geraden p, der zu P_2 unendlich nahe ist. Zu P_2 gehört die Parabeltangente e_{12}. Die Tangente in P_2 des Kreises der Punkte P_1P_2X ist die Gerade p selbst, durch die aus e_{12} ein Punkt der zu X gehörenden Parabeltangente ausgeschnitten wird. Diese Tangente wird zu e_{12} unendlich nahe sein, daher ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten wegen des Grenzübergangs der Tangentenpunkt selbst.

13. Wir haben gesehen, daß im allgemeinen zu jeder Geraden der Ebene eine durch die perspektiven Achsen als Tangenten gebildete Parabel gehört. Um einen Zusammenhang zwischen diesen Parabeln zu finden, wurde ein rechtwinkliges Koordinatensystem angenommen, wo der Koordinatenursprung P_2 und die x-Achse e_{12} ist.

Der beschränkte Umfang dieses Beitrags würde die Beschreibung unserer Untersuchungen nicht gestatten, daher sollen hier ohne jede Beweisführung nur die Ergebnisse stehen.

V. Die Fokusse sämtlicher Parabeln liegen in derselben Kreislinie, deren Mittelpunkt sich auf der y-Achse befindet. Der Kreis geht durch den Punkt P_1.

Die Gleichung dieses Kreises lautet:

$$x^2 + \left(y - 2 \cdot \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)^2 = 4 \cdot \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

VI. Die Leitlinien sämtlicher Parabeln gehen durch einen festen Punkt M mit den Koordinaten

$$M\left(-2 \cdot \cos 2\alpha;\ -2\,\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)$$

wobei durch α die relative Lage von P_1P_2 zu e_{12} festgelegt wird. Der Radius von k_{12} ist gleich der Einheit.

In [1] S. 213—214 wird die Parabelschar behandelt. Unter dieser wird die Gesamtheit der Parabeln verstanden, welche die Geraden an den drei Seiten eines Dreiecks berühren. Hier gelten folgende zwei Zusammenhänge:

1. Die Fokusse der zu der Parabelschar gehörenden sämtlichen Parabeln liegen in der um das Dreieck geschriebenen Kreislinie.

2. Die Leitlinien r sämtlicher zu der Parabelschar gehörender Parabeln berühren den Höhenpunkt M des Dreiecks.

Im vorliegenden Falle ist eine der Geraden des Tangentendreiecks e_{12}, die sämtliche Parabeln berührt. Die beiden anderen Seiten des Dreiecks sind imaginär. Der reelle Schnittpunkt dieser beiden imaginären Geraden ist P_1, der also die e_{12} gegenüberliegende Ecke des Dreiecks darstellt.

Da der Fokussenkreis e_{12} nicht schneidet (deshalb sind die beiden anderen Seiten des Dreiecks imaginär), wird durch diesen auf e_{12} eine elliptische Involution mit dem Mittelpunkt O^x induziert (Abb. 13). Das ist der dem Kreis am nächsten liegende Punkt von e_{12}. Der Abschnitt P_1O^x ist eine der Schwerlinien des Dreiecks, die im Verhältnis 2 : 1 durch den Schwerpunkt S geteilt ist. Da der Mittelpunkt des Kreises, der um das Dreieck geschrieben werden kann, K und der Höhenpunkt M ist, liegen die Punkte M, S, K in der Eulerschen Geraden und

$$MS : SK = 2 : 1.$$

Schließlich liegt das auf die Seite e_{12} des Dreiecks fallende Spiegelbild M^* des Höhenpunktes M tatsächlich in der Kreislinie.

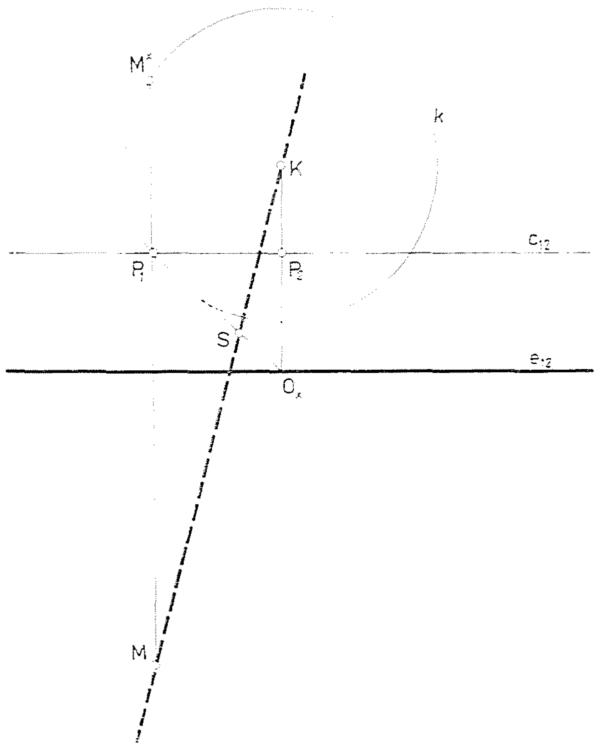

Abb. 13

14. Die bisherigen Feststellungen über die Parabelschar können auch durch einen anderen Gedankengang bekräftigt werden. Es ist bekannt, daß durch vier gemeinsame Tangenten eines Kegelschnittbüschels ein vollständiges Vierseit bestimmt wird, das sechs Spitzen hat. Die Verbindungsgeraden zwischen zwei gegenüberliegenden Spitzen bilden ein Dreieck, welches das gemeinsame Polardreieck sämtlicher Kegelschnitte im Kegelschnittbüschel ist [2].

Im vorliegenden Falle handelt es sich um eine Parabelschar, von den vier gemeinsamen Tangenten ist also eine die ideale (unendlich ferne) Gerade f der Ebene. Eine andere gemeinsame Tangente ist die Gerade e_{12}, während die dritte und die vierte gemeinsame Tangente (a, b) imaginär sind. Nur ihr Schnittpunkt P_1 ist reell.

Versuchen wir nun, das gemeinsame Polardreieck der Parabelschar, als die Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Spitzen des vollständigen Vierseits, darzustellen:

$$|(af_\infty)\,(be_{12})| = u;\ |(bf_\infty)\,(ae_{12})| = v;\ |(e_{12}f_\infty)(ab)| = c_{12}$$

u und v sind imaginär, während c_{12} reell ist. Trotzdem läßt sich der reelle Schnittpunkt C der beiden imaginären Seiten graphisch ermitteln. Nach un-

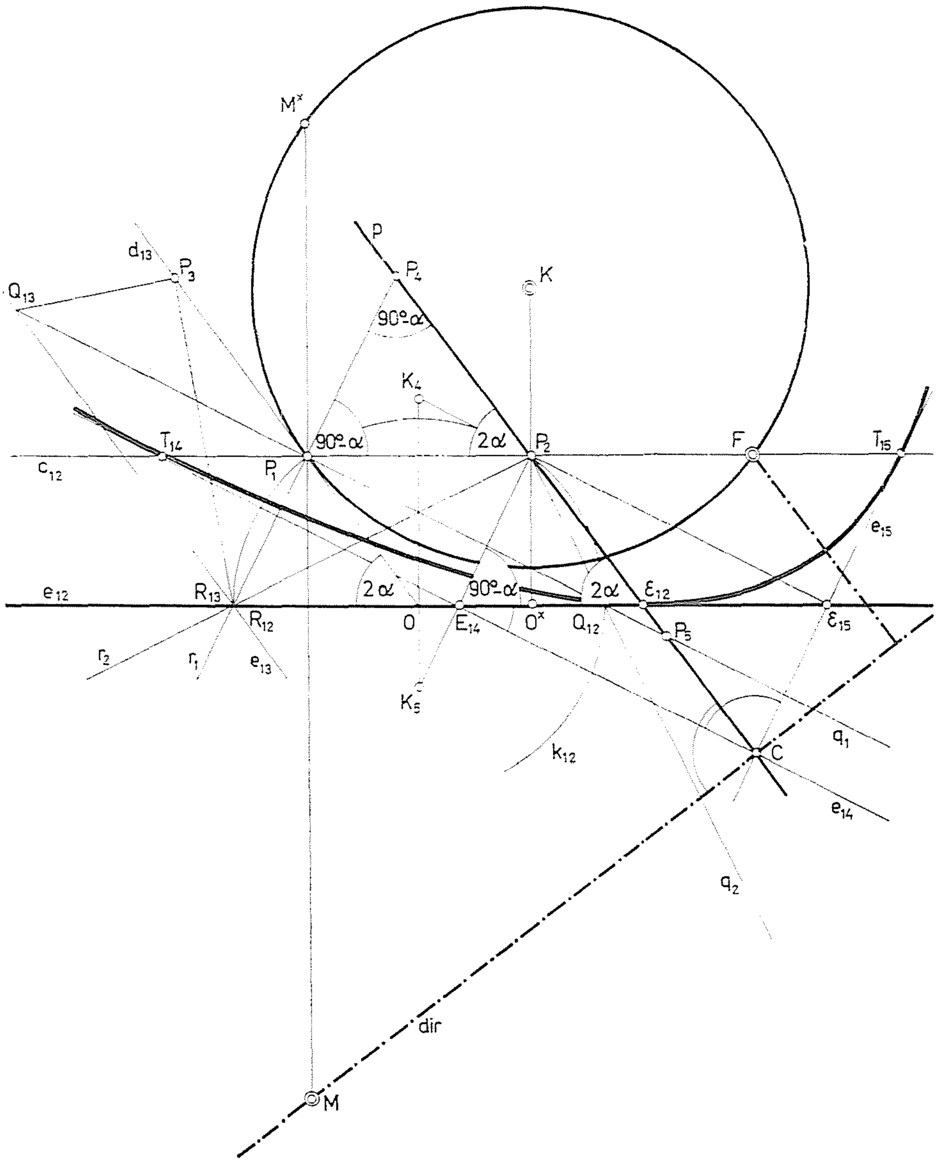

Abb. 14

serer Annahme sind $u \parallel a$ und $v \parallel b$, daher bilden die Geraden *abuv* ein Parallelogramm mit einer Spitze P_1 und dem Mittelpunkt O^*, welcher der Mittelpunkt der Involution in e_{12} ist. Das ist aber die Projektion von P_2 in der Geraden e_{12}. *Wird also* P_1 *auf* O^x *abgespiegelt, erhält man* C. C und c_{12} stellen die einzige reelle Spitze bzw. reelle Seite des gemeinsamen Polardreiecks dar. Werden also von C aus zu einem beliebigen Glied der Parabelschar Tangenten geführt, so liegen die Tangentenpunkte T_{14} T_{15} in der Geraden c_{12}.

15. Für einen Sonderfall wird diese Konstruktion auch durchgeführt. p sei parallel zu der Geraden P_1O. Das Dreieck $OE_{12}P_2$ ist gleichschenklig und O^* ist der Halbierungspunkt der Grundlinie. Da $P_1O^* = O^*C$, ist P_1OCE_{12} ein Parallelogramm. Damit liegt C in der Geraden p und der Halbierungspunkt des Abschnittes P_2C ist E_{12}.

Suchen wir nun die Parabeltangente (perspektive Achse), die zu dem Zentrum $P_4 = (pr_1)$ gehört.

Durch die Tangente in P_2 des um das gleichschenklige Dreieck $P_1P_2P_4$ geschriebenen Kreises wird aus e_{12} der Punkt E_{14} ausgeschnitten, den die Parabeltangente e_{14} berührt. Da das Dreieck gleichschenklig ist, ist die Kreistangente in P_2 parallel zu r_1 und bildet mit e_{14} einen Winkel $90° - \alpha$. Nach dem Prinzip: $c_2d_2 \sphericalangle = e_{14}e_{12} \sphericalangle$ ist $e_{14}e_{12} \sphericalangle = \alpha$. In diesem Falle ist aber e_{14} senkrecht zu der Kreistangente in P_2. Das ist nur möglich, wenn E_{14} ein Punkt des Kreises mit dem Durchmesser P_2C ist, d. h. e_{14} durch C durchgeht. Daraus folgt, daß e_{14} eine aus C zur Parabel führbare Tangente ist.

Durch einen ähnlichen Gedankengang läßt sich das auch von der zu P_5 gehörenden Geraden e_{15} beweisen, wo P_5 der Schnittpunkt von p und q_1 ist.

Da die Gerade p parallel zu d_{13} und somit auch zu e_{13} ist, entspricht ihr im System P_1P_3 eine Parabel mit zu e_{13} paralleler Achse. Mit anderen Worten bedeutet das, daß die Gerade p der Durchmesser unserer Parabel ist. Es läßt sich erkennen, daß der in diesem Durchmesser liegende Parabelpunkt E_{12} und die Tangente in diesem Punkte e_{12} ist. Da jedoch c_{12} parallel zu e_{12} ist, ferner E_{12} die Entfernung CP_2 halbiert, sind die Tangentenpunkte der Tangenten e_{14} und e_{15} die Endpunkte der Parabelsehne c_{12} (Abb. 14).

Zusammenfassung

Es sind in der Ebene zwei gleichgerichtete perspektive Strahlenbüschel gegeben: P_1 und P_2. P_1 sei fest, P_2 beweglich, jedoch in der Weise, daß die beiden Strahlenbüschel stets perspektiv bleiben und P_2 in den verschiedenen Lagen stets zur originalen Lage kongruent bleibe. In der Abhandlung wird nachgewiesen:

1. Wird durch P_2 eine beliebige Gerade p beschrieben, so hüllen die perspektiven Achsen eine Parabel.
2. Die sämtlichen Geraden der Ebene entsprechenden Parabeln bilden eine Parabelschar.

Das bedeutet, daß sämtliche Parabeln die Seiten eines Dreiecks berühren: sämtliche Fokusse liegen in der um das Dreieck geschriebenen Kreislinie; sämtliche Leitlinien gehen durch den Höhenpunkt des Dreiecks. Im vorliegenden Falle sind nur eine Seite und die dieser gegenüberliegende Spitze des Dreiecks reell, während die anderen beiden Seiten imaginär sind.

Literatur

1. KLUG, L.: Elemente der projektiven Geometrie.* Budapest, 1892.
2. VIGASSY, L.: Projektive Geometrie.* Schriftenreihe „Középiskolai Szakköri Füzetek", Budapest, 1970. 150 p.

Dozent em. LAJOS VIGASSY, H-1521 Budapest

* In ungarischer Sprache.