

# BILDUNG PARALLELER EBENER PROJEKTIONEN MIT HILFE EINES RECHNERGESTEUERTEN BILDDARSTELLERS BEI ANGABE DER SICHTBARKEIT

R. GESZLER

Lehrstuhl für Festigkeitslehre und Tragwerke, TU Budapest  
Eingegangen am 15. Mai 1979

Vorgelegt von Prof. Dr. György DEÁK

## 1. Zweck, Anwendungsbereich des Algorithmus

Aus verschiedenen Gründen ist die Automatisierung der technischen Darstellungen erforderlich. Durch das Programm »Automatisierte Technische Projektierung« wird die teilweise Automatisierung der Ingenieur Tätigkeit und der Hilfsarbeiten und damit deren Algorithmisierung vorgesehen. Der technische Hintergrund wird durch die stürmische Entwicklung und weite Verbreitung der Rechenanlagen und graphischen peripheren Geräte (Kurven drucker, graphische Displays, digitale Kurvenschreiber, Mikrofilm-Bildkon servierungsgeräte) sichergestellt.

Das in diesem Aufsatz zu behandelnde Verfahren läßt sich auch bei Parallelprojektion vielfältig verwenden:

- Mongesche Darstellung (bei beliebigen Bildebenen)
- Axonometrie (freie, orthogonale, spezielle geneigte)
- graphische Darstellung verschiedener Durchdringungen
- Schattenkonstruktion.

Der beschriebene Algorithmus läßt sich für die Bereitung sowohl korrekterer technischer Zeichnungen als auch anschaulicher schattierter axonometrischer Bilder verwenden.

## 2. Die Schranken der Darstellung

- Nur *Figuren mit endlicher Ausdehnung* können abgebildet werden.
- Die Figuren können nur aus *durch geschlossene Vielecke begrenzten ebenen Flächen* und durch *ihre Endpunkte bestimmten Strecken* zusammengesetzt sein. Die Ebenen können einander schneiden, die Strecken die Ebenen durchstoßen. Das ermöglicht, durch ebene Flächen begrenzte Körper zu beschreiben und auch ihre Durchdringung zu konstruieren.

## 3. Angaben für die Abbildung

Die *Bildebene* geht stets durch den Koordinatenursprung und hat die Form:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0. \quad (1)$$

Der Richtungsvektor  $r$  der *Projektionsrichtung* soll nach dem Koordinatenursprung gerichtet sein.

Der Ortsvektor  $v$  soll auf einen Punkt der *senkrechten Achse* in der *Zeichnung* zeigen.

Die einzelnen *Strecken* werden durch ihre beiden Endpunkte bestimmt:

$$E_i = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Die polygonalen *ebenen Figuren* werden mit Hilfe der Eckpunkte beschrieben:

$$S_i = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

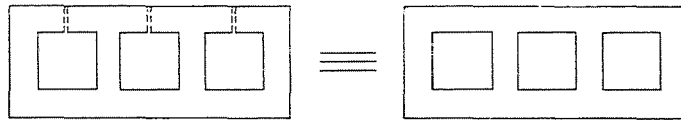


Abb. 1

Nach Einführung des Begriffes der *nicht sichtbaren Strecken* können auch durchlochte Gebilde behandelt werden (Abb. 1).

Die obigen Angaben müssen folgende *Anforderungen* erfüllen:

- die Bildebene soll reell sein
- $r$  kann kein Nullvektor sein
- die Projektionsrichtung darf nicht zur Bildebene parallel sein
- der Ortsvektor  $v$  soll in Richtung eines Bildebenenpunktes zeigen
- die beiden Endpunkte der Strecken dürfen nicht zusammenfallen
- die einzelnen ebenen Figuren sollen drei, die Ebene aufspannende Punkte haben
- die übrigen Punkte der ebenen Figur sollen die Elemente der durch die genannten drei Punkte aufgespannten Ebene sein.

#### 4. Das Verfahren

Zuerst werden die Punkte in der Bildebene *abgebildet* (Abb. 2a). Dieses System in der Bildebene wird in das  $(h, v, t)$  System nach Abb. 2b *transformiert*, wo die Achse  $t$  die Normale der Bildebene,  $h$  und  $v$  die Koordinatenach-

sen in der Zeichnung sind. Es ist einzusehen, daß in diesem Falle in Richtung  $t$  die Koordinaten jedes Projektionspunktes gleich Null sind, die Abbildung sich also mit Hilfe der Koordinaten  $h$  und  $v$  durchführen läßt.

Wir bestimmen die *Schnittlinien der Ebenen* und bilden aus diesen Strecken (Abb. 3a). Die Darstellung erfolgt streckenweise, auch die ebenen Figuren werden streckenweise gezeichnet. Alle anderen Ebenen werden mit der an

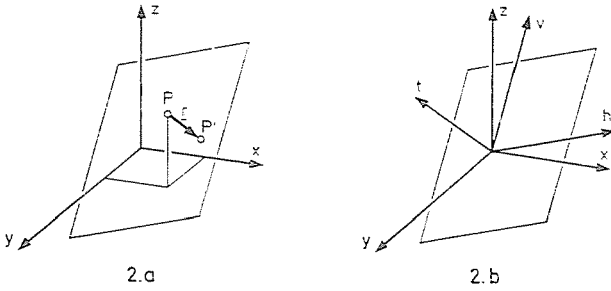


Abb. 2

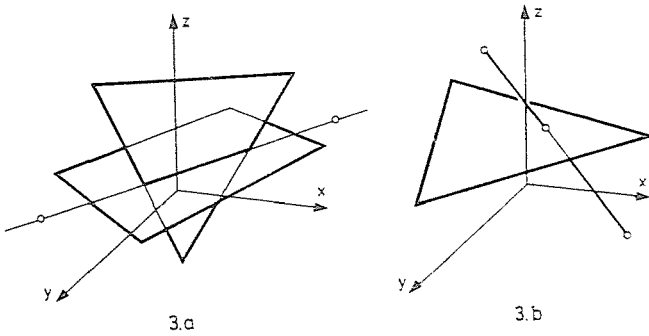


Abb. 3

die Strecke gelegten Geraden durchstoßen (Abb. 3b). Ist ein Durchstoßpunkt ein Element sowohl der Strecke als auch der dazugehörigen ebenen Fläche, so wird dieser Durchstoßpunkt vermerkt. Die untersuchte ebene Figur wird mit der Projektionsebene der Strecke *geschnitten*, die so erhaltene Schnittlinie enthält die Schnittpunkte (Abb. 4a).

Die Schnittpunkte und Durchstoßpunkte werden in der Projektion der Strecke durch je zwei Punkte in beliebigen kleinen Entfernungen von dem ursprünglichen Punkt in beiden Richtungen *ersetzt* (Abb. 4b). Die den einzelnen Strecken entlang so entstandene *Punktfolge* wird zu einer *Reihe entwickelt* und auf die räumliche Strecke *rückprojiziert* (Abb. 5a). Auf je zwei aufeinanderfolgenden Punkten kann je eine *innere Strecke* angeordnet werden, deren

sämtliche Punkte gleich sichtbar sind. Damit genügt es, die Sichtbarkeit je eines Punktes der inneren Strecken zu prüfen, um über die Sichtbarkeit der inneren Strecke ein Urteil zu bilden. Nur jener Teil der Schnittlinie der Ebenen wird dargestellt, der sich innerhalb beider ebener Figuren befindet (Abb. 5b). Um die *Sichtbarkeit* im Verhältnis zueinander eines gegebenen Punktes und einer Ebene zu beurteilen, wird der Punkt parallel zur Projektionsrichtung auf die untersuchte Ebene projiziert (Abb. 2a). Liegt der Durchstoßpunkt

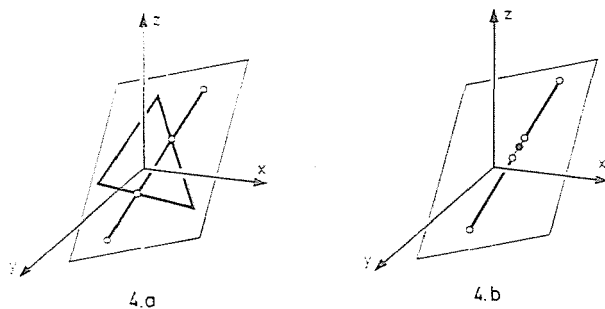


Abb. 4

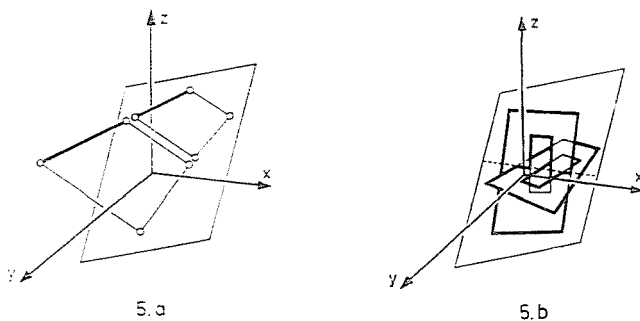


Abb. 5

außerhalb der ebenen Figur, beeinflusst keines der beiden Elemente die Sichtbarkeit des anderen. Befindet sich der Durchstoßpunkt innerhalb der ebenen Figur, so wird auf den Punkt und den Durchstoßpunkt eine zur Projektionsebene parallele Ebene gelegt, die von dem Koordinatenursprung gemessene, bezeichnete Entfernung der beiden Ebenen zeigt die Sichtbarkeit (Abb. 6a). Die Lage eines Punktes in Verhältnis zu einem geschlossenen Polygon (ob er sich innerhalb des Polygons befindet?) läßt sich entscheiden, wenn durch den Punkt in beliebiger Richtung ein Halbstrahl gezogen wird und man die Schnittpunkte abzählt (Abb. 6b). Ist die Anzahl der Schnittpunkte eine ungerade Zahl  $(2n - 1)$ , dann befindet sich der Punkt innerhalb, ist sie eine gerade Zahl  $(2n)$ , dann außerhalb des Polygons. Es ist wichtig, daß die Schnittpunkte keine Eckpunkte seien.

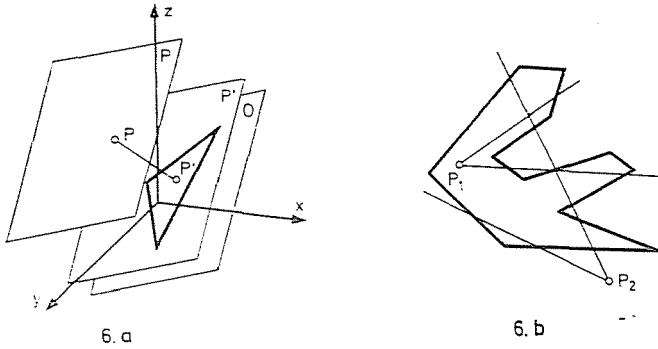


Abb. 6

### 5. Der Algorithmus

Das Verfahren wird nur im Besitz von die Forderungen in Abschnitt 3 erfüllenden, von inneren Widersprüchen freien Angaben in Angriff genommen.

#### 5.1 Projektion eines Punktes auf eine gegebene Ebene

Im Falle eines Richtungsvektors allgemeiner Lage, wenn keine der Komponenten gleich Null ist, wird wie folgt verfahren.

Projektionspunkt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -D \\ \frac{P_x}{r_x} - \frac{P_y}{r_y} \\ \frac{P_x}{r_x} - \frac{P_z}{r_z} \end{bmatrix}, \text{ wo } \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_y} & 0 \\ \frac{1}{r_x} & 0 & -\frac{1}{r_z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ist eine Komponente gleich Null (z. B.  $r_z = 0$ ):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -D \\ \frac{P_x}{r_x} - \frac{P_y}{r_y} \\ P_z \end{bmatrix}, \text{ wo } \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ \frac{1}{r_x} & -\frac{1}{r_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Sind zwei Komponenten gleich Null (z. B.  $r_x = 0$ ):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -D \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}, \text{ wo } \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

### 5.2 Projektion von ebenen Figuren und Strecken auf die Bildebene

Die Eckpunkte der ebenen Figuren und die Endpunkte der Strecken werden punktweise auf die Projektionsebene (1) projiziert. Die Projektionen erhält man aber noch im räumlichen  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem:

$$S_i \rightarrow S_{iv}, \text{ und } E_i \rightarrow E_{iv}. \quad (7)$$

### 5.3 Die Transformation der Bildebene in eine Zeichnungsebene

Nehmen wir das  $(h, v, n)$ -System an, in dem die Ebene  $n, v$  mit der Bildebene identisch,  $n$  deren Normale ist. Nach dem Transformieren des  $(x, y, z)$ -Systems werden seine Koordinaten in der Richtung  $n$  gleich Null sein, damit kann die Projektion mit Hilfe der Koordinaten  $h$  und  $v$  dargestellt werden.

Von den *Koordinatenachsen in der Zeichnung* ist nach Abschnitt 3 der Vektor  $v$  bekannt. Die Normale der Projektionsebene ist:

$$n = \begin{bmatrix} \frac{A}{D} \\ \frac{B}{D} \\ \frac{C}{D} \end{bmatrix}, \text{ wo } D = A \cdot r_x + B \cdot r_y + C \cdot r_z. \quad (8)$$

Die dritte Achse ist das Vektorprodukt der beiden vorigen:

$$h = v \times n. \quad (9)$$

Die Elemente der *Drehmatrix*  $F$  sind die Kosinusse der durch die Koordinatenachsen der beiden Systeme gebildeten Winkel. Als Elemente in Achsenrichtung der Achsen werden dem  $(x, y, z)$ -System die Einheitsvektoren, dem  $(h, v, n)$ -System die Vektoren  $h, v, n$ , axiale Achsenelemente entnommen. Der Kosinus des durch zwei Vektoren gebildeten Winkels ergibt sich zu:

$$\cos(P_1; P_2) = \frac{P_1 \cdot P_2}{|P_1| \cdot |P_2|}. \quad (10)$$

*Die Transformation:*

$$\begin{bmatrix} P_h \\ P_v \\ P_n \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} P_{rx} \\ P_{ry} \\ P_{rz} \end{bmatrix}, \text{ wo } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos(h; x) & \cos(h; y) & \cos(h; z) \\ \cos(v; x) & \cos(v; y) & \cos(v; z) \\ \cos(n; x) & \cos(n; y) & \cos(n; z) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

$P_n$  und die untere Zeile der Drehmatrix können weggelassen werden.

## 6. Sichtbarkeitsverhältnis von Punkt und ebener Figur

Die gegenseitige Sichtbarkeit von Punkt und ebener Figur ist dann fraglich, wenn ihre Projektionen sich decken. Das wird nach dem Verfahren in Abb. 6b entschieden. Es ist zweckmäßig, statt des Halbstrahls, die Strecke  $(a, b)$  anzusetzen, deren anderer Endpunkt hinreichend entfernt ist (z. B. in irgendeiner Richtung nach dem äußersten Punkt liegt).

Bestimmen wir die Schnittpunkte mit den an die einzelnen Polygonseiten gelegten Geraden:

$$\begin{aligned} s &= a + \lambda_1 (b - a) \\ s &= c + \lambda_2 (d - c). \end{aligned} \quad (12)$$

Sind nach Auflösung des Gleichungssystems

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad \text{und} \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad (13)$$

dann wird der Schnittpunktzähler erhöht. Findet man einen Eckpunkt, d. h., ist

$$\lambda_2 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = 1, \quad (14)$$

dann wird, um weitere Untersuchungen zu vermeiden, durch Winkeldrehung ein neuer Halbstrahl angenommen. Bei  $n$  Schnittpunkten ergibt sich die Parität:

$$p = n - \left[ \frac{n}{2} \right] \cdot 2. \quad (15)$$

Ist  $p$  gleich Null, dann liegt der Projektionspunkt außerhalb, ist  $p$  ungleich Null, dann innerhalb der ebenen Figur. Liegt er innerhalb, wird auf die eine Ebene bildenden drei Punkte der ebenen Figur eine Ebene gelegt. Der untersuchte Punkt wird nach Abschnitt 5.1 auf die so erhaltene Ebene projiziert. Nun kann das Verhältnis der im gleichen Projektionsstrahl liegenden zwei Punkte mit Hilfe der Hesseschen Normalform entschieden werden, wenn man weiß, daß  $d$  die bezeichnete Entfernung der durch den vorgegebenen Punkt, parallel zu der Bildebene gelegten Ebene von dem Koordinatenursprung ist:

$$d = \frac{A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (16)$$

## 7. Zeichnen von Gebilden nach Sichtbarkeit

Im Allgemeinfall enthält das darzustellende System neben windschiefen Elementen auch einander schneidende Gebilde.

Man läßt das Polygon der ebenen Figuren streckenweise erscheinen. Beim Streckenzeichnen werden die Schnitte des Bildes der Strecke mit dem Polygon der Projektionen der fremden ebenen Figuren nach den Ausführungen im vorigen Abschnitt bestimmt. Betrachtet man die durch die Ortsvektoren  $a$  und  $b$  bezeichnete Strecke in Abb. 7, so ist die Echtheit eines Schnittpunktes an die Bedingungen

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad \text{und} \quad 0 \leq \lambda_2 \leq 1 \quad (17)$$

gebunden.

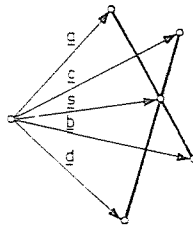


Abb. 7

Kann die Strecke eine Ebene durchstoßen, wird der Durchstoßpunkt wiederum nach dem Verfahren in Abschnitt 5.1 ermittelt. Auch dieser ist nur dann echt, wenn er sich innerhalb sowohl der Strecke als auch des Polygons befindet.

Ordnen wir diese echten inneren Punkte der Strecke je nach ihren Entfernungen von einem der Endpunkte in eine Reihe und ersetzen wir diese dann durch Doppelpunkte den Darstellungsbedingungen des Rechners entsprechend:

$$\mathbf{E}_r^* = \begin{bmatrix} h_1 & v_1 & 0 \\ h_2 & v_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_m & v_m & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Die inneren Punkte werden auf die ursprüngliche Strecke durch Skaleneinteilung übertragen.

$$\mathbf{E}_i^* = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} + \mu(P_m - P_1), \quad \text{wo} \quad \mu = \frac{P_i - P_1}{P_m - P_1}. \quad (19)$$

Man erhält den Vektor  $\mu$  aus der Matrix  $\mathbf{E}_r^*$ , die Punktreihe  $\mathbf{E}_i^*$  wird jedoch im  $(x, y, z)$ -System gebildet. Bei der Darstellung der inneren Teile wird die Sicht-



barkeit eines ihrer Punkte, z. B. des Halbierungspunktes der Strecke dem Abschnitt 5.4 entsprechend geprüft, und nach dieser wird die Intensität des Bildes der inneren Strecke bestimmt.

### Zusammenfassung

Das behandelte Verfahren gehört zu dem Themenkreis der Rechner-Graphik, es untersucht die Frage der Sichtbarkeit im Falle von aus Strecken und durch ein Polygon begrenzten ebenen Flächen bestehenden Gebilden. Das Verfahren ist für die Behandlung in interaktiver Betriebsweise eines in einem strukturierten Datenmodell gespeicherten Systems geeignet, beschäftigt sich jedoch nicht mit den dafür erforderlichen Datentransformationen, lediglich mit der Abbildung. Es läßt sich neben der Parallelprojektion (Mongesche Projektion, Axonometrie) auch für die Bildung verschiedener Durchdringungen verwenden. Durch Einschachtelung des Algorithmus ineinander kann es auch für Schattenkonstruktion benutzt werden. In analoger Weise kann auch bei Zentralprojektion verfahren werden.

### Literatur

1. ROGERS, D. F.—ADAMS, J. A.: Mathematical elements for computer graphics. New York, 1976.
2. Vorträge über das Graphische Display GD71. Budapest, 1978.
3. BECKER, E.: Ein Beitrag zur interaktiven Verarbeitung analytisch beschreibbarer Flächen mittels Rechner-Graphik. Potsdam, 1975.
4. ENCARNACAO, J. L.: Computer-graphics. München—Wien, 1975.
5. LÜBBECKE, N.—WEWER, K.: Interaktive Bearbeitung 3-dim. Körper über einen Katalog topologischer Modelle. Bochum, 1976.

RUDOLF GESZLER, H-1521, Budapest