DIE KONSTRUKTION PARABOLOIDSCHALEN TRAGENDER RÄUMLICHER VIERECKE

G. PETRICH

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, TU Budapest

Eingegangen am 1. September 1976

1. Räumliche Vierecke

Es ist bekannt, daß vier Raumpunkte nicht-konplanarer Lage, von denen beliebige drei nichtkollinear liegen, in drei verschiedenen Reihenfolgen miteinander verbunden werden können, um ein *räumliches Viereck* zu bilden. Werden nacheinander je ein Kantenpaar von den sechs Kanten des durch vier Punkte bestimmten Tetraeders — der als *Kerntetraeder* des räumlichen Vierecks bezeichnet wird — weggelassen, erhält man die drei möglichen Arten räumlicher Vierecke, wie das in Abb. 1 veranschaulicht ist.

Die Spitzen des Kerntetraeders sind mit den *Eckpunkten* des räumlichen Vierecks identisch. Benachbarte Eckpunkte sind die, die durch je eine *Seite* des räumlichen Vierecks verbunden sind. Benachbarte Seiten sind die, die sich schneiden. Nennen wir die weggelassenen (in der Abbildung mit gestrichelter Linie gezeichneten) Kanten des Kerntetraeders die *Diagonalen* des räumlichen Vierecks. Je ein gegenüberliegendes Seitenpaar des räumlichen Vierecks sowie seine zwei Diagonalen sind von windschiefer Lage. Es ist offensichtlich, daß das räumliche Viereck — wenn sich die beiden Diagonalen schneiden — zu einem ebenen Viereck entartet. Eine Diagonale bestimmt mit einem nicht in derselben liegenden Eckpunkt ein sog. *Diagonaldreieck*. Die vier Diagonaldreiecke sind mit den Seitenflächen des Kerntetraeders identisch.

Durch zwei benachbarte Seiten wird einer der *Winkel* des räumlichen Vierecks gebildet. An einer Seite und je einer Seite gegenüber befinden sich stets zwei Winkel. Es ist leicht einzusehen, daß die Summe der vier Winkel des räumlichen Vierecks kleiner als 360° ist. Werden nämlich der Eckpunkt B des Diagonaldreiecks ABC in den Eckpunkt D des Diagonaldreiecks ACD des räumlichen Vierecks, das in Abb. 1 im ersteren Falle vorkommt, und mit dem Punkt B gleichzeitig das Dreieck parallel verschoben, erhält man — da AC zu $A'C'$ parallel und diesem gleich ist — die Pyramide $ACC'A'$ mit parallelogrammförmiger Grundfläche und der Spitze D. Infolge der parallelen Verschiebung sind die Winkel α, β, γ und δ bei der Spitze D gleich den Winkeln des räumlichen Vierecks. Die Summe derselben kann 360° nur erreichen, wenn die vier Seitenkanten der Pyramide in dieselbe Ebene fallen. In diesem Falle entartet das räumliche Viereck zum ebenen Viereck.

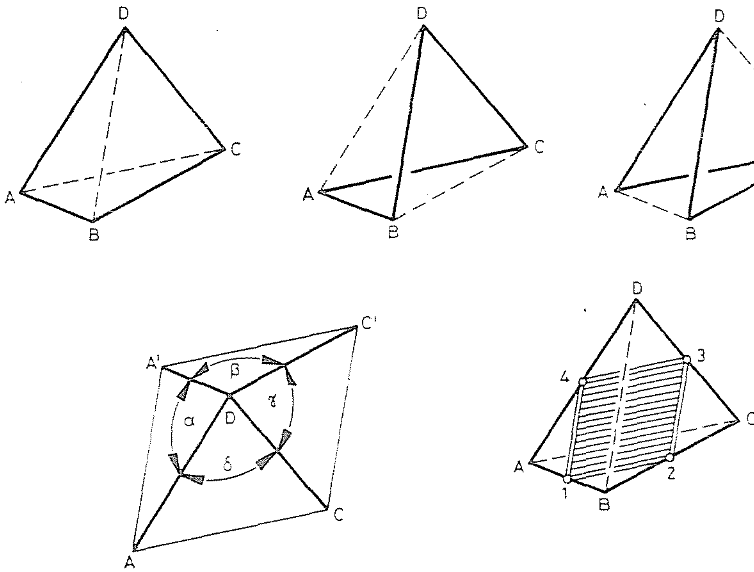

Abb. 1

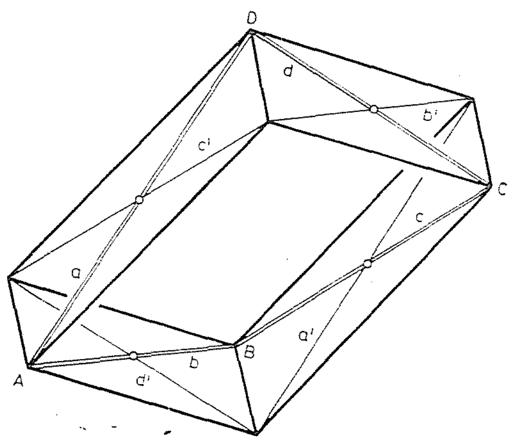

Abb. 2

Einige weitere einfache Eigenschaften des räumlichen Vierecks sind wie folgt:

1. Die Seitenhalbierungspunkte *1, 2, 3* und *4* bestimmen den *Mittelschnitt;* sie sind die Eckpunkte eines Parallelogramms, dessen gegenüberliegende Seitenpaare je einer Diagonalen des räumlichen Vierecks parallel sind, wobei ihre Länge gleich der halben Länge der Diagonalen ist, wie das in Abb. 1 zu sehen ist.

2. Durch die Eckpunkte des räumlichen Vierecks läßt sich eine einzige Kugel zeichnen, deren Mittelpunkt als der *Mittelpunkt* des räumlichen Vierecks bezeichnet werden darf.

3. Die Geraden aller Seiten des räumlichen Vierecks berühren im allgemeinen 8 Kugeln.

Die über gegenüberliegende Seitenpaare des räumlichen Vierecks gelegten, parallelen Ebenenpaare bestimmen die vier Seitenflächen eines Parallelepipedons, wie das in Abb. 2 zu sehen ist. Dieses wird als das *Trägerparallelepipedon* des räumlichen Vierecks bezeichnet. Die räumlichen Vierecke können nach den Maßeigenschaften ihres einzigen Trägerparallelepipedons unterteilt werden.

2. Räumliche Parallelogramme

Räumliche Parallelogramme werden durch gerade Prismen mit Parallelogrammen als Grundfläche getragen. Unternimmt man die Unterteilung nach den Maßeigenschaften der räumlichen Parallelogramme, darf von *räumlichem Quadrat, räumlichem Rechteck, räumlichem Rhombus und räumlichem Rhomboid* gesprochen werden.

Das Trägerparallelepipedon des *räumlichen Quadrats* ist ein regelmäßiges vierseitiges Prisma, wo die Seiten die entsprechenden Diagonalen der Seitenflächen sind, wie es in Abb. 3 zu erkennen ist. Sowohl die Seiten als auch die Diagonalen und die Winkel sind gleich.

Ist die Diagonale gleich der Seite oder — was dasselbe ist — stehen die gegenüberliegenden Seitenpaare aufeinander senkrecht, erhält man das sog. *»regelmäßige« räumliche Quadrat,* das durch einen Würfel getragen wird. Im entgegengesetzten Falle spricht man von einem gewöhnlichen räumlichen Quadrat. Bei der einen Art desselben ist die Diagonale kleiner, bei der anderen Art größer als die Seite. Einer der Winkel des räumlichen Quadrats ist kleiner als 90°. Beträgt dieser Winkel 60°, so ist das räumliche Quadrat regelmäßig, erreicht der Winkel 90°, entartet das räumliche Quadrat zum ebenen Quadrat.

Die gegenüberliegenden Seiten des räumlichen Quadrats liegen in einer Entfernung voneinander von Halbdiagonale-mal $\sqrt{2}$. Die Diagonaldreiecke sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke. Der Mittelpunkt 0 des Trägerprismas ist der Mittelpunkt des räumlichen Quadrats. Der Mittelschnitt ist ein Quadrat, dessen Seite gleich der Hälfte der Diagonalen ist. Durch die Halbierungspunkte der Diagonalen und den Mittelpunkt geht die *Mittelinie* k durch. Die Mittellinie und die eine Diagonale bestimmen eine der *Symmetrieebenen* des räumlichen Quadrats. Das räumliche Quadrat ist zu je einer seiner Symmetrieebenen senkrecht-symmetrisch. Das Diagonaldreieck des regelmäßigen räumlichen Quadrats ist ein regelmäßiges Dreieck, und sein Kerntetraeder ist ein regelmäßiger Tetraeder.

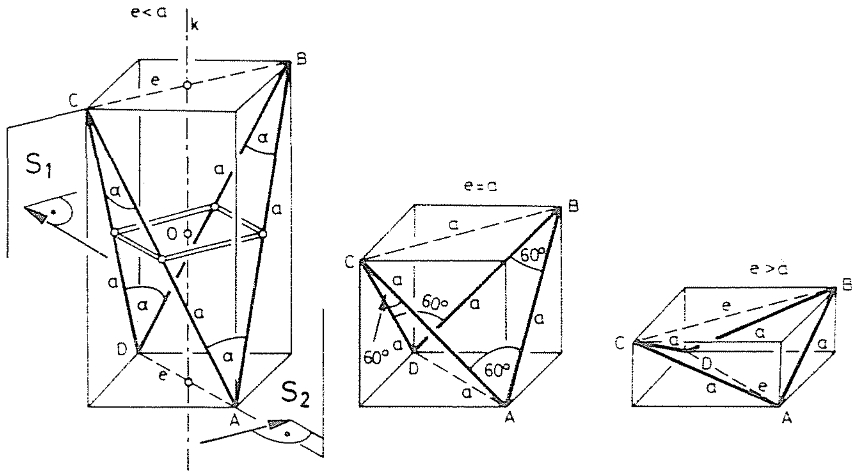

Abb. 3

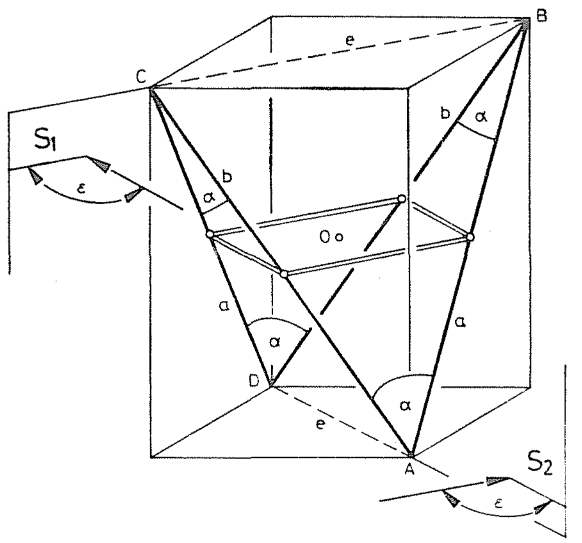

Abb. 4

Die anderen drei räumlichen Parallelogramme können in ähnlicher Weise analysiert werden. Zu diesen soll nur kurz folgendes bemerkt werden:

Das Trägerparallelepipedon des *räumlichen Oblongums* ist rechteckig, also ein ziegelsteinförmiger Körper, wie es in Abb. 4 zu sehen ist. Die gegenüberliegenden Seiten, die Diagonalen sowie die Winkel sind gleich. Steht das eine gegenüberliegende Seitenpaar auf einander senkrecht, folgt daraus, daß die Diagonale gleicher Länge wie die andere Seite ist. In diesem Falle sind die

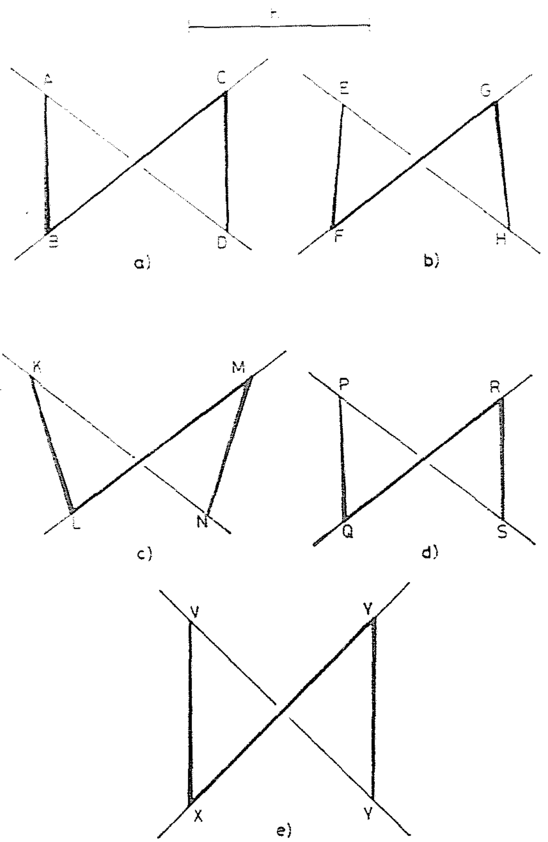

Abb. 5

durch die aufeinander senkrechten Seiten durchgehenden Seitenflächen des Trägerprismas Quadrate. Auch ein Prisma mit quadratischer Grundfläche kann also Träger eines räumlichen Rechtecks sein, in diesem Falle liegt jedoch das eine Seitenpaar notwendigerweise in den quadratischen Grundflächen! Die Diagonalen können aufeinander nicht senkrecht stehen! Der Mittelschnitt des räumlichen Rechtecks ist ein Rhombus und zu den beiden Symmetrieebenen des räumlichen Rechtecks schief-symmetrisch.

Das Trägerparallelepipedon des *räumlichen Rhombus* ist ein gerades Prisma mit rhombusförmiger Grundfläche. Seiten und einander gegenüberliegende Winkel sind gleich. Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, doch sind sie ungleicher Länge. Der Mittelschnitt ist ein Oblongum und zu seinen beiden Symmetrieebenen senkrecht-symmetrisch.

Das ein *räumliches Rhomboid* tragende Parallelepipedon ist ein gerades Prisma mit rhomboidförmiger Grundfläche. Die gegenüberliegenden Winkel sind gleich. Die Diagonalen sind ungleich, der Mittelschnitt ist ein Rhomboid.

Die räumlichen Parallelogramme werden also durch gerade Prismen mit Parallelogrammen als Grundfläche getragen.

Zwischen zwei windschiefen Geraden lassen sich immer verschiedene räumliche Parallelogramme mit vorgegebener Seitenlänge konstruieren. Ein regelmäßiges räumliches Quadrat kann nur zwischen einem Paar aufeinander senkrechter, windschiefer Geraden konstruiert werden, die Seite kann man jedoch nicht mehr beliebig wählen. Diese sind in Abb. 5 in einer einzigen Vertikalprojektion dargestellt. Die vorgegebene Gerade a liegt in der Ebene der Zeichnung und die vorgegebene Gerade b in einem Abstand h über der Zeichnungsebene.

In der Abbildung sind $ABCD$ ein räumliches Quadrat, $EFGH$ ein räumlicher Rhombus, $KLMN$ ein räumliches Rhomboid, $PQRS$ ein räumliches Rechteck und $VXYZ$ ein regelmäßiges räumliches Quadrat.

Es ist zu bemerken, daß — wird ein ebenes Parallelogramm eine seiner Diagonalen entlang gebrochen, und das eine »*Halbparallelogramm*« um diese Diagonale verdreht — man ebenfalls ein räumliches Parallelogramm erhält. Durch eine solche Ableitung können aus einem ebenen Quadrate nur ein räumlicher Rhombus, aus einem Rechteck nur ein räumliches Rhomboid, aus einem Rhombus je nach dem Grad der Verdrehung zwei räumliche Quadrate bzw. räumliche Rhomben (ist der spitze Winkel des vorgegebenen Rhombus gleich 60°, erhält man zweimal auch regelmäßige räumliche Quadrate), schließlich aus einem Rhomboid je nach dem Verdrehungsgrad zwei räumliche Rechtecke oder räumliche Rhomboide erhalten werden. Auch der durch die Ebenen der beiden Halbparallelogramme gebildete Winkel ist eine für das räumliche Parallelogramm kennzeichnende Größe.

3. Konstruktion eines räumlichen Parallelogramms

Es ist zweckmäßig, das eine Diagonaldreieck des räumlichen Parallelogramms in der Ebene der Zeichnung, das andere daneben im Raum zu konstruieren. Im weiteren soll das an einem Beispiel dargestellt werden.

Konstruieren wir aus den Seiten a und b sowie den Winkeln α und β ein räumliches Rhomboid (Abb. 6).

Wir zeichnen das ebene Dreieck ABD als das eine Diagonaldreieck des räumlichen Rhomboids in der Zeichnungsebene. Der vierte Eckpunkt C liegt im Raum in einem Abstand a von Punkt B und in einem Abstand b von Punkt D, so daß gleichzeitig der durch die Strecken CB und CD gebildete Winkel α ist, und die durch die Strecken CD und AD sowie CB und AB gebildeten Winkel gleich β sind. Mann denkt sich den gesuchten Punkt C in die Ebene der Zeichnung sowohl um die Gerade AD als auch um die Gerade AB gedreht, zuerst als C_1, dann als C_2. Dann liegen der Punkt C_1 in einem

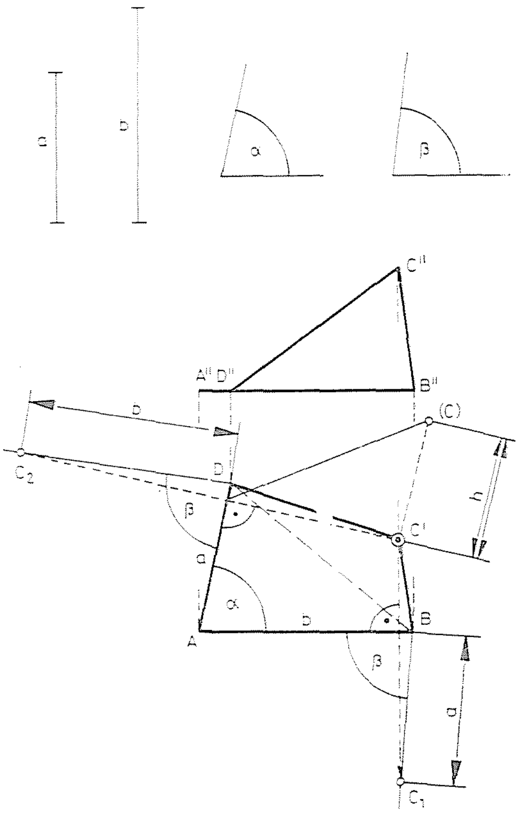

Abb. 6

Abstand a von dem Punkt B in der mit AB einen Winkel β bildenden Geraden, und der Punkt C_2 in einem Abstand b von dem Punkt D in der mit AD einen Winkel β bildenden Geraden. Die aus den Punkten C_1 bzw. C_2 senkrecht auf AB bzw. AD gezeichneten Geraden schneiden sich in der Vertikalprojektion des Punktes C, in C'. Der Punkt C liegt im Raum in einer Entfernung h nach der einen Lösung über C', nach der anderen unter C'.

4. Die Konstruktion von räumlichen Vierecken

Ein räumlicher Winkel n kann durch seine zu dem einen Eckpunkt gehörenden Diagonalen auf $n-2$ Dreiecke zerlegt werden. Da, um ein Dreieck zu bestimmen, 3 Angaben erforderlich sind, werden der räumliche Winkel n durch $(n - 2) \cdot 3$ und das räumliche Viereck durch $(4 - 2) \cdot 3 = 6$ Angaben bestimmt.

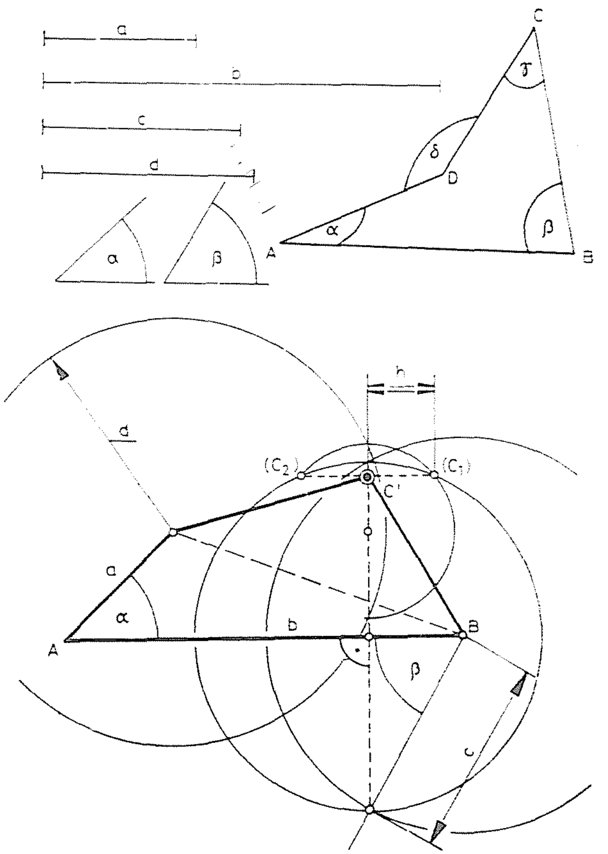

Abb. 7

Bezeichnen wir in Abb. 7 die Seiten des symbolischen, allgemeinen räumlichen Vierecks $ABCD$ durch $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$ und $DA = a$, seine Winkel durch α, β, γ und δ. Nun sollen einige Konstruktionen dargelegt werden.

Erste Konstruktion. Gegeben sind die Seiten a, b, c und d sowie die Winkel α und β.

In der Ebene der Zeichnung wird das Diagonaldreieck ABD konstruiert (Abb. 7). Sodann wird der Ort des Punktes C im Raum gesucht. Punkt C liegt einerseits in einem Abstand c von Punkt B auf dem *Kegel* mit der Geraden AB als Achse, dem Punkt B als Spitze und der halben Öffnung β, anderseits auf einer *Kugel* mit dem Punkt D als Mittelpunkt und dem Halbmesser der Länge d. Der auf dem Kegel konstruierte Kreis schneidet die Kugel in den möglichen zwei Lösungen in den Punkten C_1 und C_2. Punkt C liegt im Raum in einem Abstand h nach der einen Lösung über, nach der anderen unter C'.

Zweite Konstruktion. Gegeben sind die Seiten a, b und c sowie die Winkel α, β und γ.

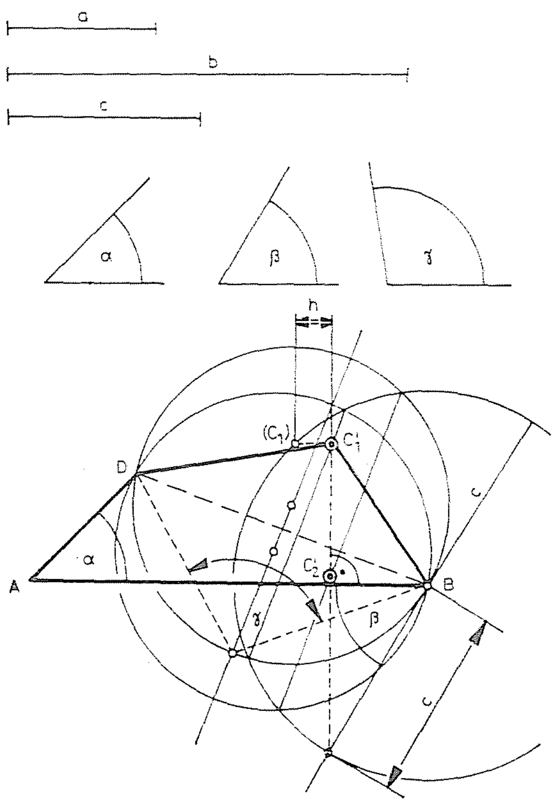

Abb. 8

In Abb. 8 wird zuerst in der Zeichnungsebene das Diagonaldreieck ABD konstruiert. Wir suchen wieder den Ort im Raum des Punktes C. Der Punkt C befindet sich einerseits in einem Abstand c von dem Punkt B auf dem *Rotationskegel* mit der Geraden AB als Achse, dem Punkt B als Spitze und dem Winkel β als halbe Öffnung, anderseits auf dem *Rotationskreisring* mit der Geraden BD als Achse, mit der Strecke BD als eine Sehne seines in der Zeichnungsebene liegenden Meridianrings, wobei der Peripherienwinkel auf dem zu dieser Sehne gehörenden Bogen gleich dem Winkel γ ist. Wo der auf dem Kegel konstruierte Kreis den Ring schneidet, dort erhält man den Punkt C, den vierten Eckpunkt des räumlichen Vierecks. Da sich die Achsen des Kegels und des Ringes in Punkt B schneiden, schneidet die durch den Kegelring durchgehende Hilfskugel mit dem Mittelpunkt B den Ring in zwei Kreisen. Der Kegelkreis trifft die beiden herausgeschnittenen Ringkreise insgesamt in vier Punkten. Die Aufgabe hat also vier Lösungen, die paarweise — C_1 und sein Symmetrischer sowie C_2 und sein Symmetrischer — zu der Zeichnungsebene symmetrisch sind.

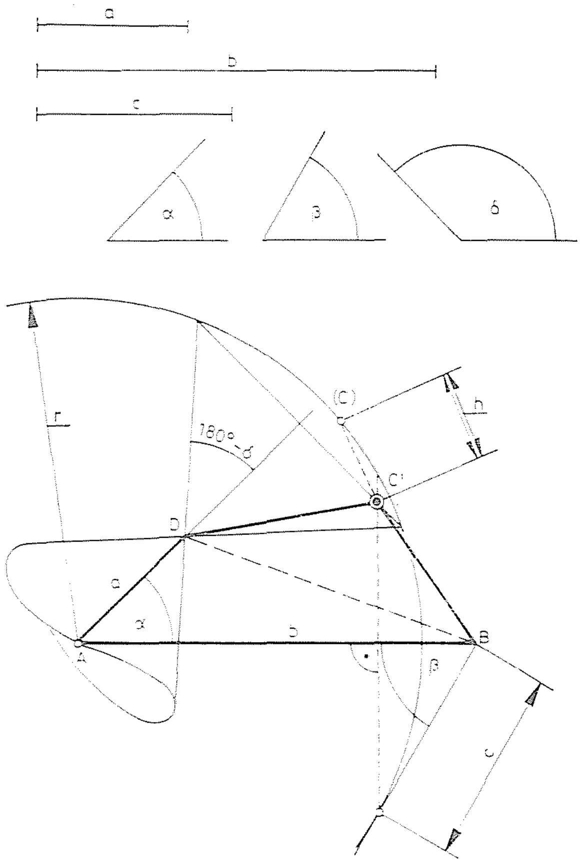

Abb. 9

Dritte Konstruktion. Gegeben sind die Seiten a, b und c sowie die Winkel α, β und δ.

In Abb. 9 konstruieren wir in der Ebene der Zeichnung das Diagonaldreieck ABD. Der fehlende Eckpunkt C liegt einerseits in einem Abstand c von dem Punkt B auf dem *Rotationskegel* mit der Achse AB, der Spitze B und der halben Öffnung gleich β, anderseits auf dem *Rotationskegel* mit der Achse AD, der Spitze D und der halben Öffnung $180° - \delta$. Die Achsen der beiden Kegel schneiden sich in Punkt A. Dieser Punkt kann also als Mittelpunkt einer Hilfskugel gewählt werden, die durch den Kegelkreis durchgeht und auch den anderen Kegel in einem Kreis schneidet. Die zur Ebene der Zeichnung symmetrischen zwei gemeinsamen Punkte der beiden Kreise sind die gesuchten zwei Lösungen, deren gemeinsame Projektion der Punkt C' ist. Der Abstand der Punkte C von der Zeichnungsebene ist die Strecke h.

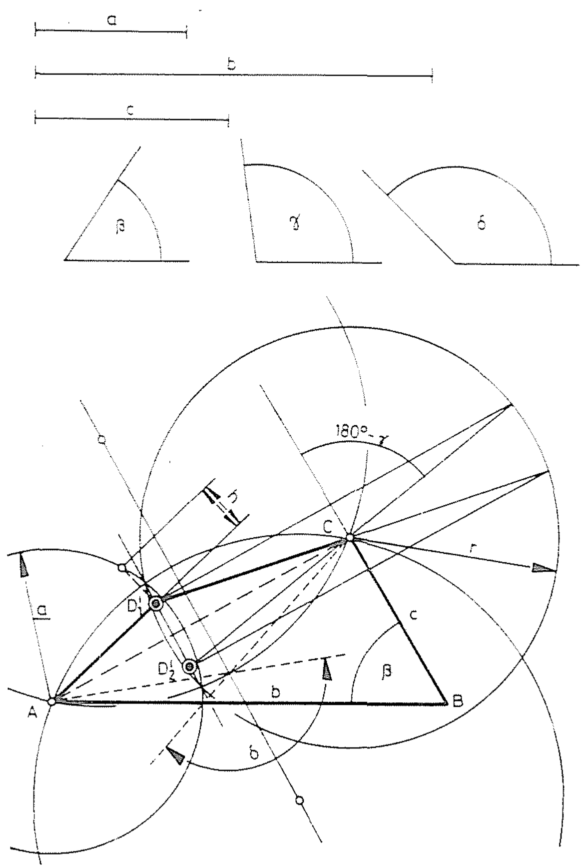

Abb. 10

Vierte Konstruktion. Gegeben sind die Seiten *a*, *b* und *c* sowie die Winkel β, γ und δ.

Wir konstruieren in der Ebene der Zeichnung das Diagonaldreieck *ABC* in Abb. 10. Für den fehlenden Eckpunkt *D* lassen sich drei Bedingungen machen; er liegt: 1. auf der *Kugel* mit dem Mittelpunkt *A* und dem Halbmesser *a;* 2. auf dem *Rotationskegel* mit der Achse *BC* und der halben Öffnung gleich $180° - \gamma$; 3. auf dem *Rotationskreisring* mit der Achse *AC*, wo der auf dem zu der Sehne *AC* gehörenden Bogen liegende Peripherienwinkel gleich dem Winkel δ ist. Infolge ihrer Lage schneidet die Kugel den Ring in zwei Kreisen. Mit einer durch einen solchen Kreis durchgehenden und den Kegel in zwei Kreisen schneidenden Hilfskugel erhält man zu der Zeichnungsebene symmetrisch zweimal zwei Lösungen. In der Abbildung sind die Projektionen D_1 und D_2 der symmetrisch auftretenden zweimal zwei Lösungen nur auf dem

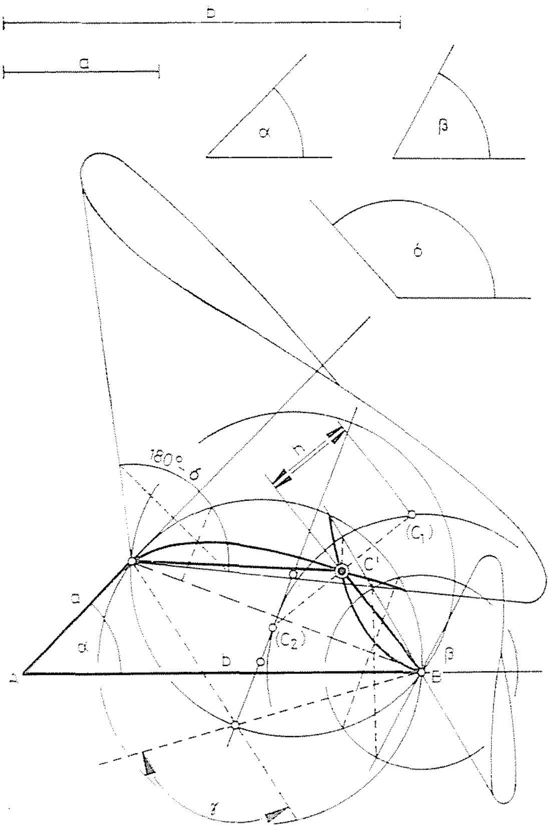

Abb. 11

einen Kugelkreis dargestellt. Die zu dem Punkt D_1 gehörenden beiden räumlichen D-Punkte liegen in Entfernungen h über bzw. unter der Zeichnungsebene.

Fünfte Konstruktion. Gegeben sind die Seiten a und b sowie die Winkel α, β, γ und δ.

Wir konstruieren das Diagonaldreieck ABD (Abb. 11) in der Ebene der Zeichnung. Der fehlende Eckpunkt C muß nun folgende drei Bedingungen erfüllen: 1. er liegt auf dem ***Rotationskegel*** mit der Achse AB und der halben Öffnung β; 2. er liegt auf dem ***Rotationskegel*** mit der Achse AD und der halben Öffnung gleich $180° - \delta$; 3. er liegt auf dem ***Rotationskreisring*** mit der Achse BD und einem auf dem zu der Sehne BD gehörenden Bogen ruhenden Peripherienwinkel gleich dem Winkel γ. Die beiden Kegel schneiden sich in einer *Raumkurve vierter Ordnung.* Der gemeinsame Punkt der Raumkurve und des Ringes ist der gesuchte Punkt C. In der Abbildung ist die Doppelprojektion der Durchdringungslinie des Ringes und je eines Kegels aufgezeichnet. Die Schnittpunkte dieser beiden *ebenen Kurven vierter Ordnung* können mit Zirkel und

Lineal nicht konstruiert werden. Von den Lösungen wurde die gemeinsame Projektion C' der zwei symmetrischen Punkte C_1 und C_2 konstruiert. Die Entfernung dieser Punkte von der Zeichnungsebene ist die Strecke h.

Es sei bemerkt, daß die ersten vier Konstruktionen — im Euklidischen Sinne — mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden können, die fünfte jedoch nicht. Aufgrund von sechs Angaben kann nicht in jedem Falle ein allgemeines räumliches Viereck konstruiert werden. Werden nämlich die vier Seiten und zwei gegenüberliegende Winkel des räumlichen Vierecks angegeben, sind dadurch die beiden Diagonaldreiecke (zwei Halbparallelogramme) bereits eindeutig bestimmt. Da dann die den angegebenen Winkeln gegenüberliegenden Seiten der beiden Dreiecke in der Regel nicht gleich sein werden, können die Dreiecke nicht zusammengefügt werden, und daher entsteht kein räumliches Viereck.

Die Aufgaben, die angesetzt werden können, wurden hier bei weitem nicht erschöpft, man konnte sich jedoch davon überzeugen, wie gut sich die Konstruktion räumlicher Vierecke für die Anwendung einfacher geometrischer Orte und die Darstellung in einer einzigen Bildebene für die Durchführung verwickelter Konstruktionen eignen.

Zusammenfassung

Es ist bekannt, daß ein endlich begrenzter Teil des unter den in der Technik benutzten Schalenflächen vorkommenden *hyperbolischen Paraboloids* mit Hilfe eines räumlichen Vierecks sehr einfach angegeben werden kann. Für die Systematisierung der verschiedenen Angabemöglichkeiten der Schalen sind die Untersuchung der räumlichen Vierecke, die Festlegung ihrer Arten, ihre Unterteilung erforderlich. So gelangt man z. B. zu den gut definierbaren räumlichen »Parallelogrammen«. Die Konstruktion *Paraboloidschalen* tragender räumlicher Vierecke unter vorgegebenen Bedingungen ist also auch für den technischen Konstrukteur nützlich.

Prof. Dr. Géza PETRICH, H-1521 Budapest