ПРИМЕЧАНИЕ К МЕТРИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ, ВЫПОЛНЯЕМЫМ В ОБЩЕЙ АКСОНОМЕТРИИ

К. КОРИШ

Кафедра Начертательной Геометрии Факультета Архитектуры

Будапештского Технического Университета

Поступило: 20 сентября 1976 г.

Даны система осей координат и изображение единичных точек. По теореме Полке в пространстве существует такая прямоугольная система координат, параллельная проекция которой имеет вид, заданной системы осей координат и конечных точек с единичными расстояниями e и они являются единичными точками изображения.

Для того, чтобы можно было решать метрические задачи в общей аксонометрии, сначала следует построить единичное расстояние e.

На рис. 1a даны изображение системы осей координат $O\ (x, y, z)$, т. е. $O'(x', y', z')$ и изображения единичных точек X, Y и Z : $X'Y'$ и Z'. В исходной системе координат

$$e = OX = OY = OZ$$

Рассмотрим единичную сферу (шар), центром которой является точка O и ее радиус равен e. Она пересекается координатной плоскостью (xy) в окружности k_1. Изображение окружности k_1 может быть построено благодаря тому, что одна ее пара сопряженных диаметров известна.

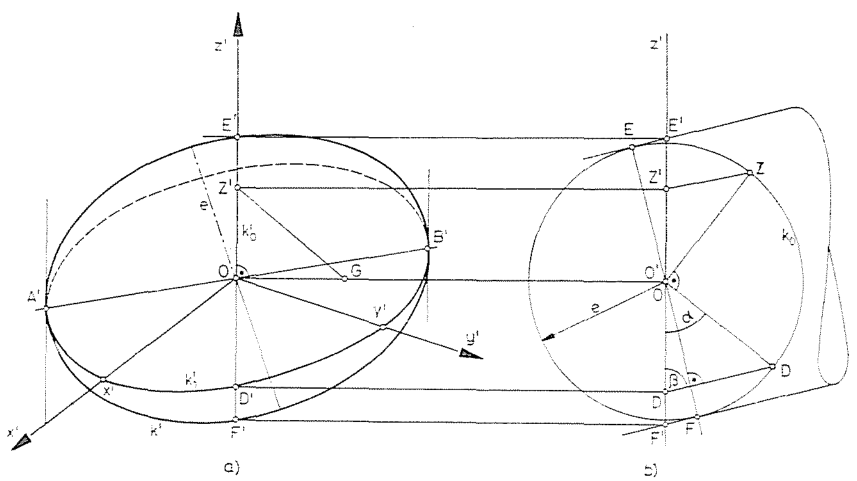

Рис. 1

По окружности k_1 единичной сферы касается цилиндр вращения, ось которого параллельна Z. Плоскости проекции изображения k', параллельного касательным z' являются касательными плоскостями цилиндра вращения, следовательно и сферы. Точки касания A и B являются противоположными точками единичной сферы, итак контур изображения у единичной сферы является одним из диаметров изображения k'. Сопряженная диаметра $A'B'$ прилегает к изображению z' оси z. Чтобы построить e, рассмотрим плоскость проекции (см. рис. 1b). Плоскость проекции пересекает единичную сферу в окружности большого круга k_0 (e пока еще неизвестна). Точки D и Z могут быть получены от их изображений путем обратного проектирования, а угол DOZ является прямым углом. Образ (изображение) $E'F'$ диаметра EF окружности k_0, перпендикулярной направлению проектирования, является сопряженным диаметра $B'B'$.

Из треугольника $O'\,D'\,D$:

$$O'D' = \frac{OD \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$$

Из треугольника $O'Z'Z$:

$$O'Z' = \frac{OZ \cdot \cos(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$$

Итак $O'D'^2 + O'Z'^2 = \dfrac{e}{\sin^2\beta}$

Но в прямоугольном треугольнике

$$OFF : O'F' = \frac{e}{\sin\beta}$$

То есть:

$$O'D'^2 + O'Z'^2 = O'F'^2$$

На рисунке, ввиду того, что $O'F = O'D'$, $GZ' = O'F'$.

Таким образом контур изображения единичной сферы может быть построен, потому что одна пара сопряженных диаметров $(A'B')$ и $(E'F')$ известна. Половина малой оси e контура изображения k' равна единичному расстоянию.

Пусть будет дана на рис. 2 точка P, тождественная показанной на рис. 1 точке системы осей координат в общей аксонометрии. Так как в параллельной проекции отношение расстояний, лежащих на той же прямой или на параллельных прямых между собой равно, то численная мера координат точки P будет следующей:

$$x = P'_xO : X'O = P_x\,O : e$$
$$y = P'_yO : Y'O = P_y\,O : e$$
$$z = P'O : Z'O = P_z\,O : e$$

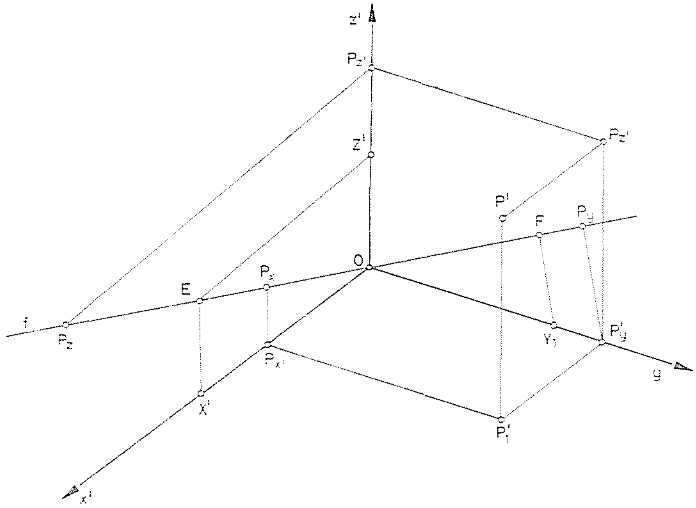

Рис. 2

Для построения координат P_xO, P_yO и P_zO целесообразно отмерить единичное расстояние e от O на произвольную прямую f, проходящую через точку O. Если построить треугольник OP'_xP_x, подобный треугольнику $OX'E$, то его сторона P_xO уже является координатой x точки P.

Аналогично были построены координаты y и z точки P.

Зная координаты точки P, были построены на рис. 3 приведенные проекции точки P : P^* и P^{**}.

Ибо $\quad O\,P_{x1} = P_xO;\ P^*P_{x1} = P_yO$ и $P^{**}P_{x1} = P_zO$

Таким образом, данные метрической задачи, решаемой в общей аксонометрии «перетрансформируем» в виде двух прямоугольных приведенных проекций описанным выше способом и задача будет решена.

В случае, если единичное расстояние e не строится и в качестве единицы выбрается произвольное e', то описанным способом получается не пространственная фигура, а только подобная ей. Коэффициент пропорциональности $e' : e$. Согласно этому результаты расстояний следует оценивать таким образом, а результаты углов являются действительными результатами.

В дальнейших рассмотрим задачу по углу.

Пусть будет задано изображение системы осей координат $O(x\,y\,z)$ вместе с изображениями единичных точек (обозначение изображений не представлено, так как это не приводит к двухсмысленности, путанице). Далее, пусть будут даны на рис. 4 прямые a и b своими двумя изображениями.

Построим углы наклона прямых a и b.

Примем ось x за ось приведенных проекций, т. е. $x = x_{12}$. Далее единичное расстояние примем равным произвольному OX, итак $e' = OX$. Оси y в

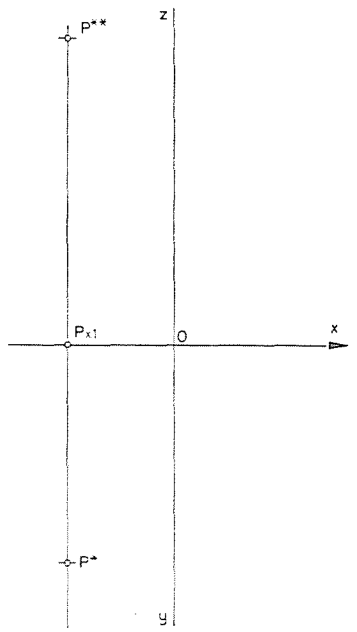
P**
z
Px1
O
x
P*
y

Рис. 3

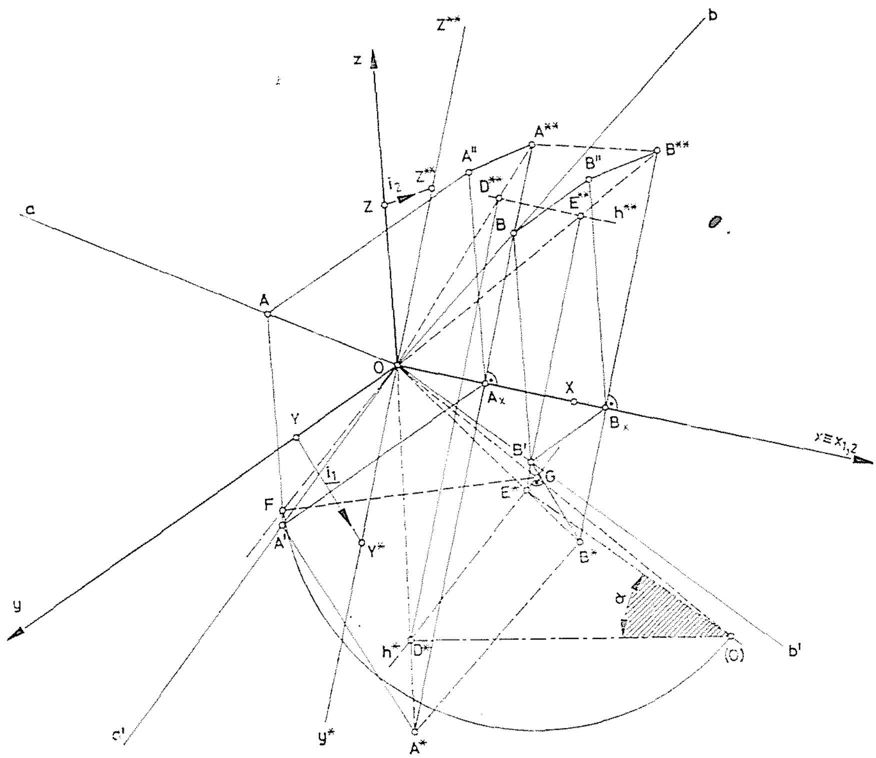
Z**
z
b
A**
B**
A''
B''
Z**
D**
E**
h**
i2
Z
c
B
A
O
Ax
X
Bx
x≡x1,2
Y
B'
G
i1
E*
F
A'
Y*
B*
y
α
h*
D*
(C)
b'
c'
y*
A*

Рис. 4

приведенной проекции соответствует y^*, перпендикулярная $x \cdot z$ соответствует z^{**}; z^{**} тоже перпендикулярна x. Пусть $OY^* = OZ^{**} = e'$.

Между аксонометрическим основным чертежом и первым изображением приведенной проекции, а также между аксонометрическим верхним чертежом и вторым изображением приведенной проекции существует аффинная зависимость:

У обоих осью является ось x и направления:

$$i_1 = Y Y^*, \quad \text{и}$$

$$i_2 = Z Z^{**}$$

Значит, построим A^*, соответствующую A' и B^*, соответствующую B'. Потом A^{**} и B^{**}, соответствующие A'' и B''. Наконец, в соответствии с задачей следует определить действительную величину угла AOB, данную своими приведенными проекциями. Поэтому берется одна из главных линий плоскости OAB: h. Прямая h пересекает сторону OAB в точке D, а сторону OB в точке E. Вокруг h, как оси вращения, повернем треугольник AOB в первое главное положение. Для этого достаточно повернуть точку O. Это производится общеизвестным способом. Построим треугольник вращения FOG, катет OF которого равен расстоянию $h^{**}\,x$. Наконец $FG = C(O)$. Значит, угол наклона α прямых a и b будет $\alpha = D^*(O)E^*$.

Описанный метод построения, касающийся представленной задачи по углу, называется приемом черчения Соботки.

Резюме

В общей аксонометрии для решения данных метрических задач сначала определяется единичное расстояние, а потом задача решается двумя изображениями в данной приведенной проекции.

Без определения единичного расстояния вместо первоначальной фигуры получаем только ей подобную, и поэтому при выборе произвольной единицы значения углов уже обозначают действительный результат.

Литература

Müller—Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie (1948).

Доцент д-р Калман Кориш, H-1521 Будапешт