

# НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФЕРМЫ НАИМЕНЬШЕГО ВЕСА

Г. ШАЛАТ

Кафедра Сопротивления материалов и несущих конструкций  
Будапештского Технического Университета  
(Поступило: 22 января 1972 г.)

Представлено: проф. Д. Деак, зав. кафедрой

## Введение

*Теоретическая подготовка* методов прямого проектирования несущих конструкций ведется уже несколько десятилетий. При *практическом применении* предложенных авторами методов встречаются три основных трудности: точная формулировка действующих на конструкцию эффектов и требований к конструкции; аспект и измеритель оптимизации, а также сложная и громоздкая вычислительная работа. По всем этим причинам — даже со времени внедрения вычислительной техники — в литературе относительно мало указаний на решение прямых задач проектирования.

В настоящей работе освещаются задачи прямого проектирования, решенные с помощью метода, рекомендуемого кандидатом технических наук, Йожефом Переди. В задачах ставится целью определить расположение стержней с наименьшим теоретическим весом в двух обыкновенных регулярных системах. Заслуживает внимания объем задачи (большое число шарниров и стержней), а также пространственный характер работы рассматриваемых конструкций. На основе решений заключается несколько выводов, которые укрепляют и расширяют существующие знания о конструкциях такого типа

## Целевая функция задачи

*Задана геометрическая схема* статически неопределимой фермы. Стержни имеют постоянное сечение на всем своем протяжении и соединены между собой идеальными шарнирами. На шарниры системы действует уравновешенная, однопараметрическая система нагрузки статического характера.

*Следует определить площади поперечного сечения* стержней, при которых балка уравнивает данную систему нагрузки при наименьшем теоретическом весе. Такая система в дальнейшем будет называться *оптимальной*, а расчет для ее определения — *оптимизацией*.

Под теоретическим весом подразумевается сумма весов стержней, имеющих на всем своем протяжении постоянное сечение. Весами узлов, соединяю-

щих элементов и нерассчитанных стержней пренебрегается. Целевая функция, выражающая минимальное значение теоретического веса:

$$G = \sum_{j=1}^u \gamma l_j F_j \rightarrow \min! \quad (1)$$

где  $G$  — теоретический вес конструкции  
 $u$  — число стержней  
 $\gamma$  — объемный вес конструкционного материала  
 $l_j$  — осевая длина  $j$ -го стержня  
 $F_j$  — площадь поперечного сечения  $j$ -го стержня.

Из  $u$  стержней конструкции  $m$  стержни являются статически определимыми и  $n$  статически лишними, т. е.  $u = m + n$ .

Степень статической неопределимости можно выбрать на любую величину.

Следует обратить внимание и на то, что в такой формулировке задача включает в себе и *выбор стержневой сети*, так как площадь сечения части стержней может быть выбрана и на нуль. Поэтому можно сказать, что цель нашего исследования состоит в нахождении *расположения стержней* наименьшего веса.

Усилия в стержнях исходной статически неопределимой фермы определяются по принципу, подобно методу сил. Перерезав  $n$  соответственно выбираемых стержней, получается основная система. Тогда величина усилия в  $j$ -ом стержне системы, возникающего под влиянием внешней нагрузки будет:

$$S_j = S_{j,0} + \sum_{k=1}^n s_k S_{j,k}; \quad j = 1, 2, \dots, u \quad (2)$$

где  $S_{j,0}$  — возникающее под влиянием внешней нагрузки усилие в  $j$ -ом стержне основной системы (в пересеченных стержнях, конечно, будет равным нулю)

$S_{j,k}$  — усилие в  $j$ -ом стержне, возникающее под влиянием единицы усилия в  $k$ -ом перерезанном стержне (в перерезанных стержнях эта величина также будет равной нулю, за исключением  $k$ -го перерезанного стержня, где будет равняться единице)

$s_k$  — скалярный расчетный коэффициент, пропорциональный величине эффективно действующего в  $k$ -ом лишнем стержне усилия.

Площадь поперечного сечения стержней, соответственно условию минимума выбирается на наименьшее значение по стержням:

$$F_j = F_{j \min} = \frac{S_j}{\sigma_j}, \quad (3)$$

где  $\sigma_j$  — рассчитываемое в  $j$ -ом стержне напряжение, знак которого всегда совпадает со знаком  $S_j$ .

Подставляя зависимости (2) и (3) в выражение (1), получается окончательный вид целевой функции настоящей задачи:

$$G = \sum_{j=1}^u \frac{\gamma l_j}{\sigma_j} \left( S_{j,0} + \sum_{k=1}^n s_k S_{j,k} \right) \rightarrow \min! \quad (4)$$

Следует определить значения скалярных множителей  $s_k$ !

### О методе решения целевой функции

Подобная вышеуказанной формулировка оптимальной задачи известна в специальной литературе (напр., (7), (8), (9)). Для ее решения авторы предлагали и применяли несколько методов. Однако, из-за вычислительно-технических трудностей круг разрешенных задач пришлось сильно сократить, с качественными и размерными ограничениями.

В наших исследованиях показывается пример применения предложенного Йожефом Переди метода решения, показанного на образцовых задачах (см. (3)—(6)). (Способ решения носит общий характер, поскольку он пригоден для наиболее выгодного создания — по какому-либо скалярному измерителю — статически неопределимых конструкций, состоящих из непрерывных или дискретных элементов из эластических или пластических материалов). Рекомендуемое решение можно свести к специальной задаче линейного программирования. Для круга разрешаемых задач действительны нижеследующие два установления (цитат по содержанию из (6)):

— Если на несущую конструкцию (напр., многопролетная балка, рама, ферма) действует однопараметрическая система нагрузки и не затрудняется возможно наилучшее приспособление размеров поперечных сечений к усилиям, то самым выгодным — по определенному скалярному измерителю — решением будет, как правило, выбранная соответствующим образом, *статически определимая конструкция* (напр., многопролетная шарнирная балка, шарнирная рама), или, в случае наличия нескольких, в одинаковой мере выгодных решений, среди них непременно окажется статически определимое.

— Если для размеров поперечного сечения несущей конструкции, выполненной из эластичного материала и нагруженной системой однопараметрической нагрузки проектируется — при пренебрежении условиями совместности — наиболее выгодное — по определенному скалярному измерителю — решение, (т. е. потребуются только внутреннее распределение сил, уравновешивающее данную нагрузку и нигде не приводящее к перенагрузке), то на таких конструкциях условия совместности удовлетворяются сами по себе.

Оптимизация конструкций повышенного размера (состоящих из многих стержней и статически многократно неопределимых) потребует подготовки

огромной массы исходных данных и проведения многочисленных операций с этими данными. Расчеты оптимизации выполнялись на ЭВМ типа Раздан-3 средней мощности в Университетском вычислительном центре. В дальнейшем — опуская подробности вычислительной техники — будут показаны разрешенные задачи и заключаемые из них выводы.

### Типы решенных задач

Первым шагом предполагалось, что расчетное напряжение  $\sigma_j$  имеет в каждом стержне одинаковое абсолютное значение как на растяжение так и на сжатие. В этом случае значение дроби  $\gamma l_j / \sigma_j$  в целевой функции (4) может заранее исчисляться для каждого стержня. Таким образом, теоретическая потребность материала одного стержня прямо пропорциональна длине стержня и абсолютному значению усилия в стержне. Эффект такого приближения должен учитываться в оценке дальнейших.

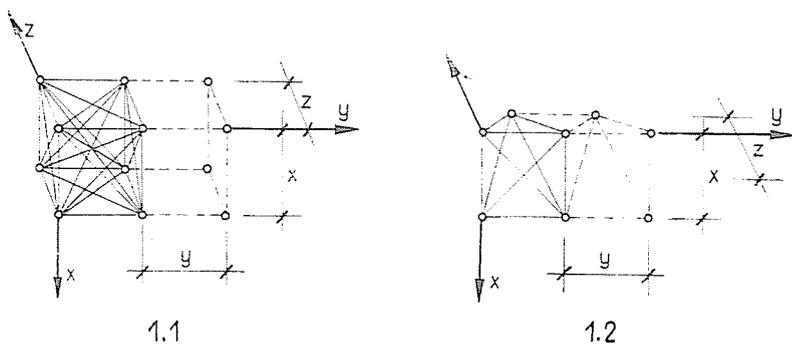


Рис. 1

Увидим, что, независимо от вышеуказанного упрощения, анализом полученных расположений стержней наименьшего теоретического веса можно прийти к нескольким качественным выводам. Случаю, когда для стержней с разными нагрузками применяется разное допущенное напряжение, будет посвящена следующая статья.

Были исследованы два типа расположения стержней у регулярных пространственных ферм. (*Нижний и верхний пояса* регулярной фермы, состоящие из стержней в двух параллельных плоскостях, соединены между собой вертикальными *стойками* и косыми *раскосами*). Сеть первого типа (см. аксонометрическую схему рис. 1.1) создается расположением подряд панелей-параллелепипедов. Стержни находятся по боковым краям, диагоналям граней и тела. Такая сеть называется *решеткой параллелепипедов*. Сеть второго типа (см. рис. 1.2) состоит из пирамидальных панелей, расположенных

подряд. Стержни находятся по боковым краям пирамиды, по диагоналям основания, а также по краям и диагоналям сети прямоугольников, соединяющей вершины. Такую сеть назовем *пирамидальной решеткой*.

Из обеих типов панелей мы составили сети стержней прямоугольного плана. Полученные таким образом стержни являются статически многократно неопределимыми конструкциями, (см. значения  $n$  в таблице). К этим сетям должны быть определены поперечные сечения, т. е. частичные сети, исчисленный для которых при данных условиях теоретический вес является наименьшим.

Исследовались системы с двумя типами нагрузок. У одного типа шарниры нижнего пояса подвергаются влиянию вертикальных сил (в направлении  $z$ ), а у другого — шарниры верхнего пояса. В обоих случаях они уравниваются силами, действующими на четыре угловых точки нижнего пояса, формулируя иными словами: влияющие на все шарниры одного пояса вертикальные силы уравниваются вертикальными силами противоположного направления, влияющими на четыре угловых шарниры или того же самого, или другого пояса. Полученные для двух систем нагрузки оптимальные расположения стержней оказались почти совершенно одинаковыми, поэтому достаточно показать только одно из них. В дальнейшем будем заниматься лишь случаем нагрузки нижнего пояса (выводы, естественно, касаются и другого случая нагружения и сочетания обеих).

Оптимизация размеров  $x$ ,  $y$  и  $z$ , (см. рис. 1.1 и 1.2) или их пропорций между собой, из-за упрощения, введенного для допустимого напряжения, была бы бессмысленной. Однако, задачи, решенные ступенчатым изменением пропорций размеров  $x$ ,  $y$  и  $z$  между собой (от  $1/4$  до  $4/1$ ) показали, что в пределах конфигурации в плане оптимальные расположения стержней при различных соотношениях размеров  $x$ ,  $y$  и  $z$  получаются одинаковыми. Поэтому при исчислении теоретического веса у приведенных задач мы рассчитывали значением  $x=y=z=1$  (см. значения  $G$ ). Значения объемного веса  $\gamma$  и допустимого напряжения  $\sigma$  также равны единице, а внешние нагрузки являются значениями, приведенными на рисунках в единичных величинах.

### Расположения стержней наименьшего теоретического веса

Максимальный размер разрешенных задач определился мощностью имеющейся в распоряжении вычислительной машины (объем расчета пропорционален произведению количества всех стержней и количества статически лишних стержней). В таблице приведены данные задач, показанных и на рисунках ( $e$  — обозначает число элементов, а  $v$  — число шарниров).

1	Решетка из параллелепипедов				Пирамидальная решетка				
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>e</i>	2×2	2×3	3×3	4×4	2×2	2×3	3×3	4×4	5×5
<i>v</i>	18	24	32	50	13	18	25	41	61
<i>u</i>	89	128	184	313	42	64	98	178	282
<i>n</i>	41	62	94	169	9	16	29	61	105
<i>G</i>	56	112	208	608	60	116	208	608	1376

Из полученных в результате оптимальных расположений на рисунках 2—10 показываются сети стержней, *работа* которых, относящаяся к данной внешней нагрузке свидетельствует о какой-то систематичности или симметричности, и так легче ее рассмотреть. Следует отметить, что — как известно, — у рассматриваемых двух типов расположения стержней не существует симметричного, статически определенного расположения стержней. Поэтому, если сеть стержней, теоретически уравнивающая данную нагрузку (показанная на рисунках), с нерассчитанными стержнями необходимого количества будет дополнена в статически определенную и жесткую сеть стержней, то она больше не будет симметричной.

В каждой серии рисунков первый рисунок с элементами, расположенными подряд, обозначает размер задачи, а стрелки — внешние нагрузки.

Из нижней строки таблицы видно, что нет существенного различия в теоретической потребности материала у решеток формы параллелепипеда и пирамиды одинакового размера в плане, одинаковой высоты и нагрузки. У расположений, состоящих из  $3 \times 3$  и  $4 \times 4$  элементов это значение одинаковое, а в других случаях теоретическая потребность материала пирамидальной решетки несколько выше.

На основе разрешенных задач — независимо от приблизительных предположений — можно заключать несколько *выводов* качественного характера. Большинство из них считается практическим подтверждением теоретически известных фактов. Оптимальные сети стержней рассмотренных двух типов расположения характеризуются следующими свойствами:

1. В описанных условиях сети стержней такого расположения носят заданные внешние усилия с *наименьшей* теоретической потребностью материала.

2. *Геометрический характер* оптимальных сетей стержней не зависит от сетевых размеров  $x$ ,  $y$  и  $z$  или их пропорций, а также от того, уравниваются ли влияющие на все шарниры одного пояса вертикальные силы силами, влияющими на угловые шарниры нижнего или верхнего пояса. (Конечно, значение теоретического веса зависит от размеров  $x$ ,  $y$  и  $z$ ).

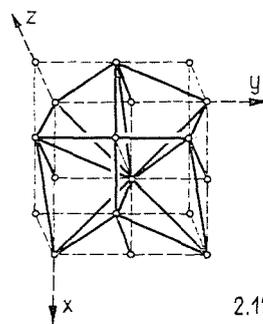
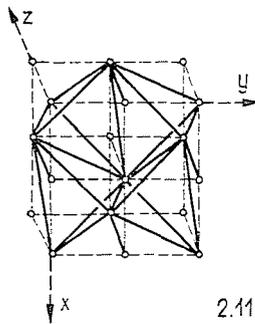
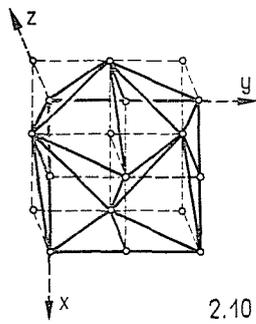
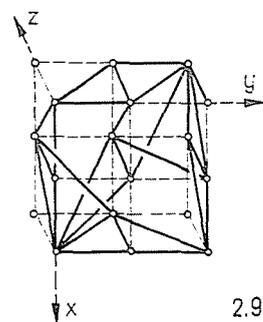
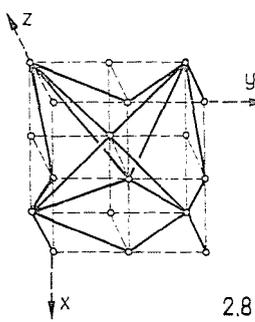
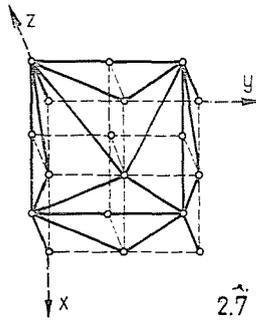
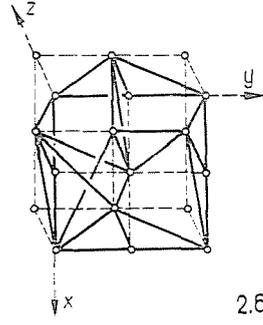
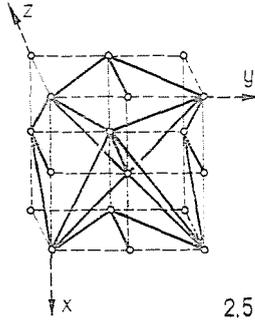
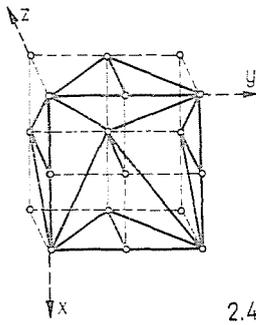
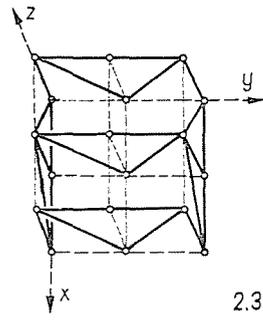
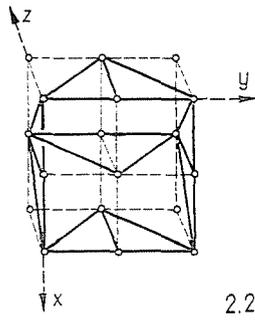
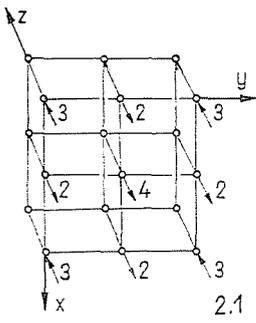


Рис. 2

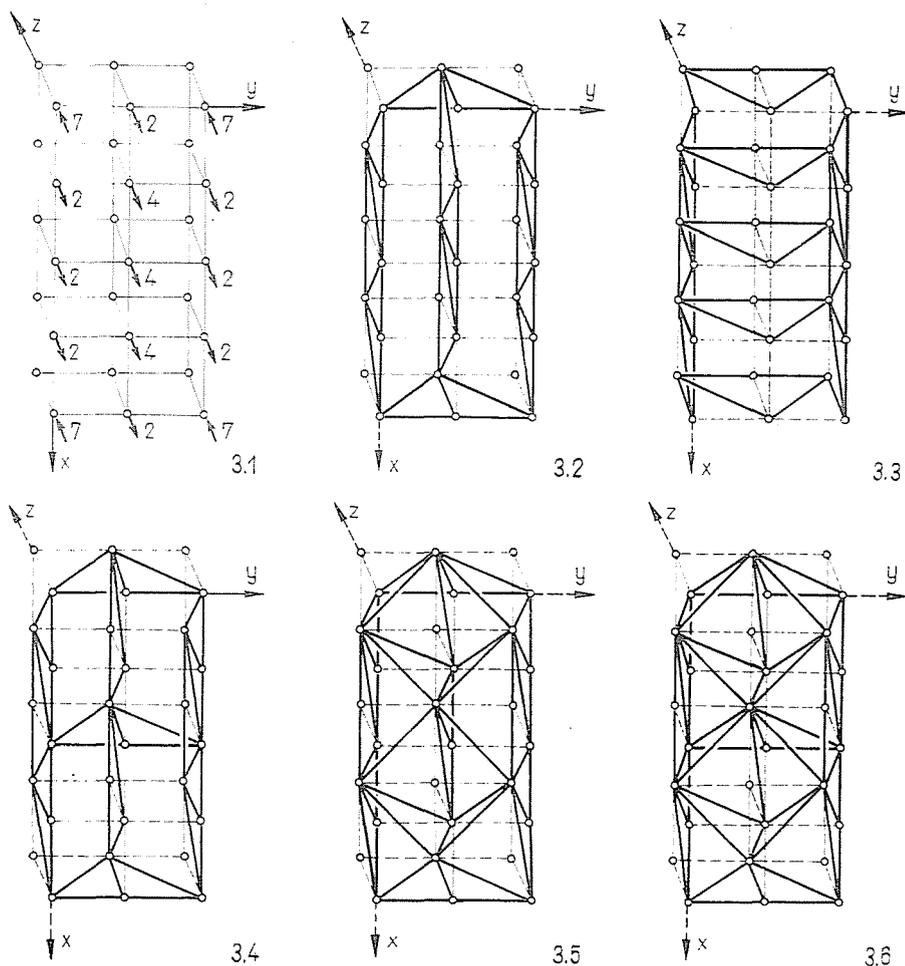


Рис. 3

3. В сетях стержней, состоящих из меньших панелей можно распознавать *элементы*, т. е. «конструктивные принципы» сетей, состоящих из больших панелей.

4. Сумма теоретических потребностей материала нижних и верхних поясных стержней, а также сумма теоретических потребностей материала стоек и раскосов при различающихся друг от друга расположениях стержней наименьшего теоретического веса *каждая в отдельности* одинаковы (ср. (1)).

5. Оптимальные сети стержней уравнивают данные внешние силы всегда «*кратчайшим путем*», при возможно минимальной вставке стоек и раскосов. Иными словами, внутренние силы по возможности меньше всего переменяются между нижним и верхним поясами фермы.

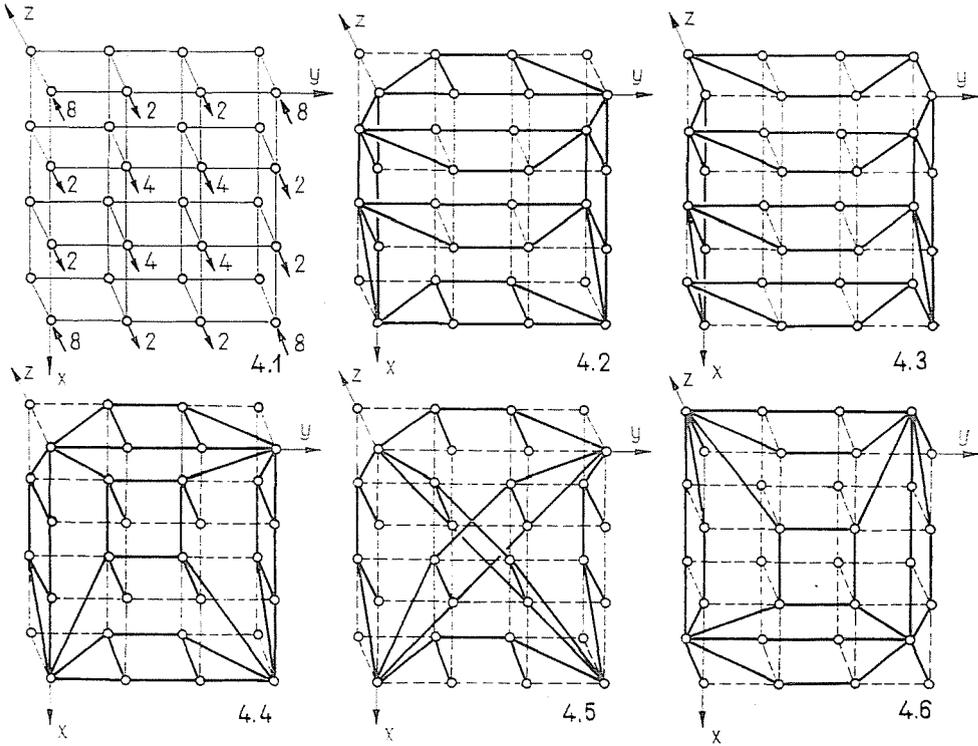


Рис. 4

6. Вследствие вышеуказанного свойства *деформации* (вертикальные перемещения) в точке приложения усилий обычно бывают возможно наименьшими; иными словами, жесткость конструкции получается возможно наибольшей (ср. напр., (2)).

7. Среди оптимальных сетей стержней обычно существует такая, которая состоит — в системе главных ферм и ригелей — из *плоских ферм*, двух- или многократно *опирающихся друг на друга*.

8. Среди оптимальных расположений стержней всегда находится статически определенное. При линейном сочетании таких можно создать *статически неопределимые* расположения стержней, обладающих вышеназванными семью свойствами.

Эти свойства можно наблюдать на любом из оптимальных расположений стержней, изображенных на сериях рисунков.

В качестве примера, вышеизложенные свойства показываются на оптимальных расположениях стержней фермы из параллелепипедов, состоящей из  $4 \times 4$  элементов, на серии рисунков 5 и 11.

1. Рис. 11.1 показывает часто применяемое «неоптимальное» расположение фермы из параллелепипедов. (По принципам конструирования,

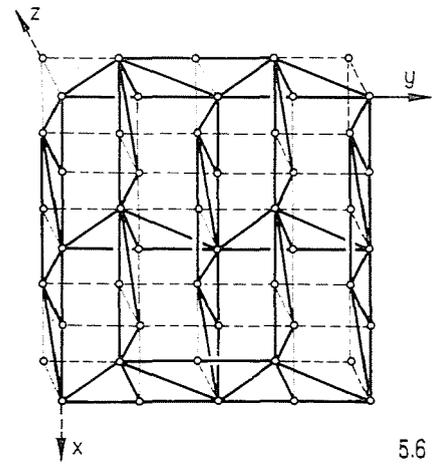
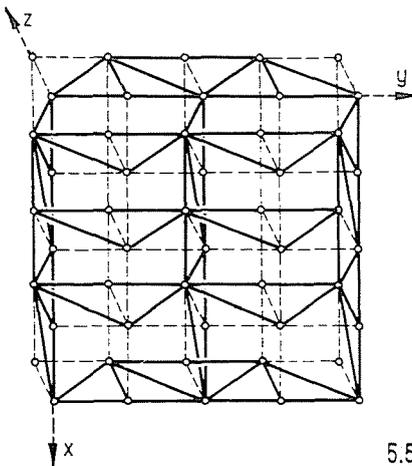
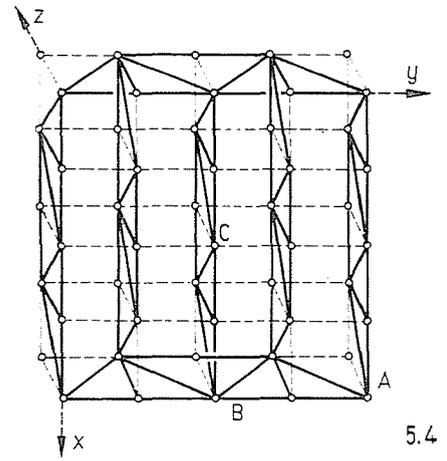
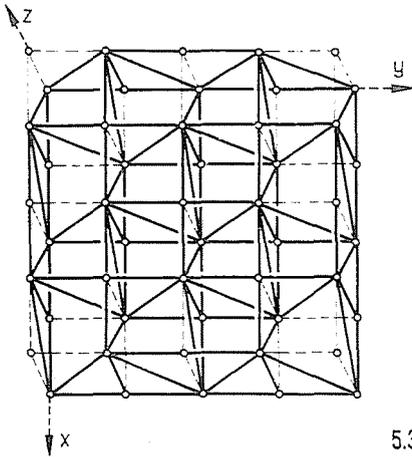
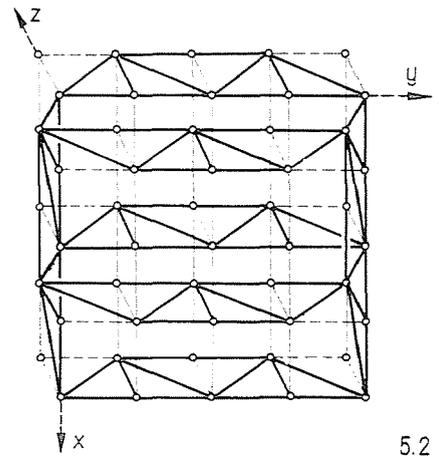
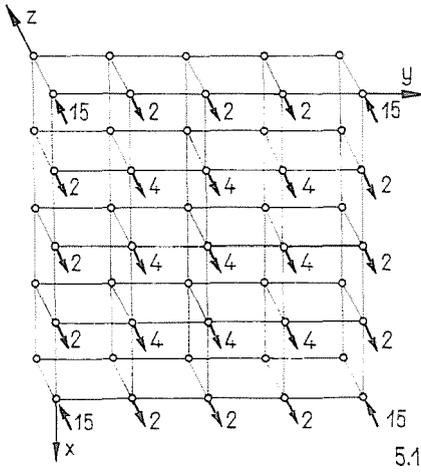
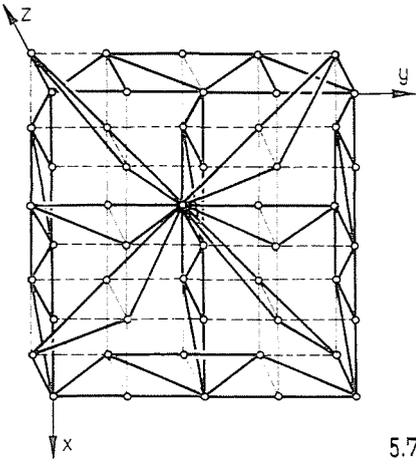
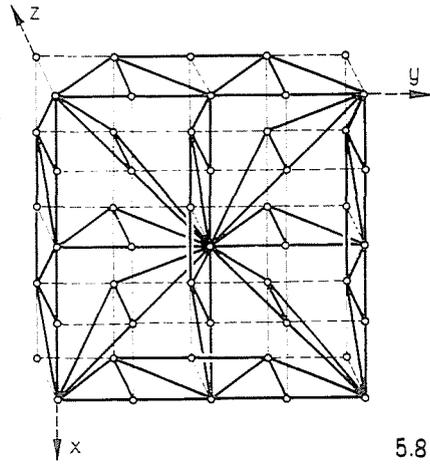


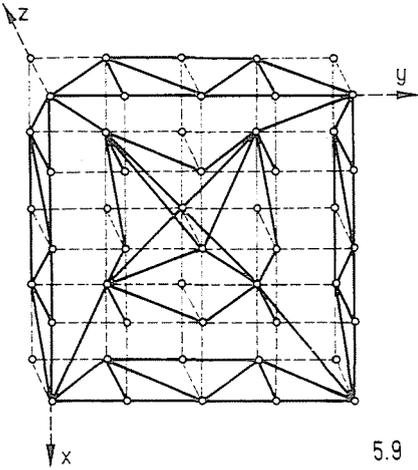
Рис. 5а



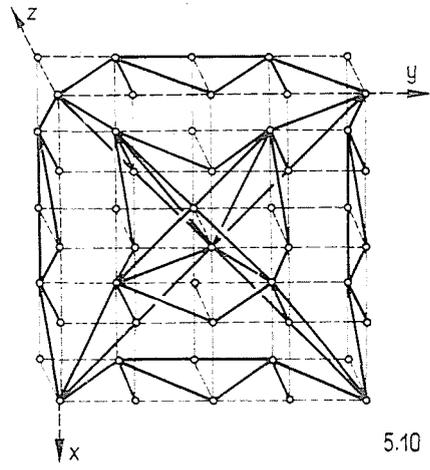
5.7



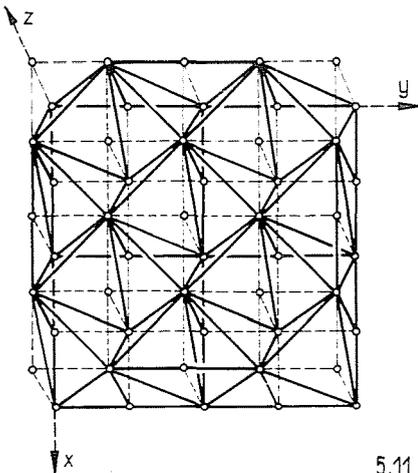
5.8



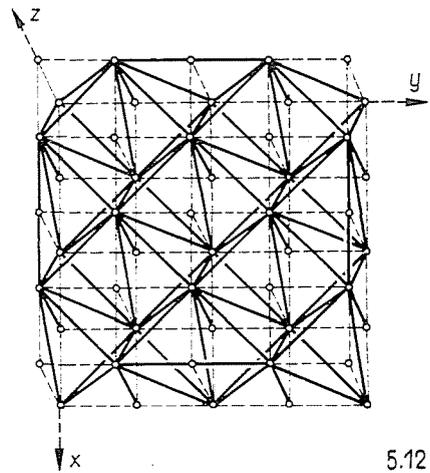
5.9



5.10



5.11



5.12

Рис. 5б

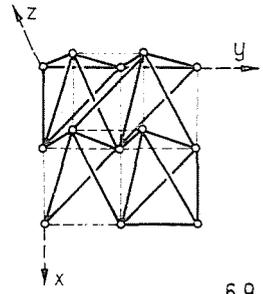
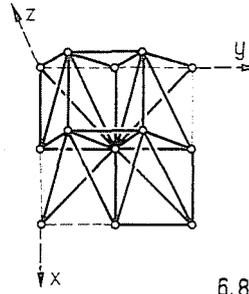
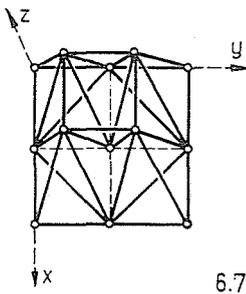
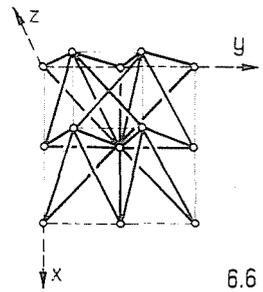
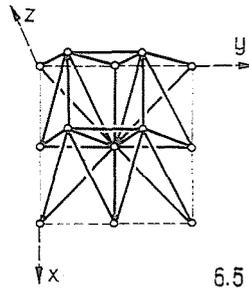
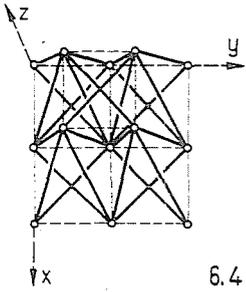
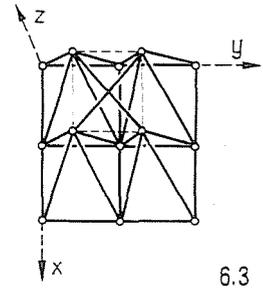
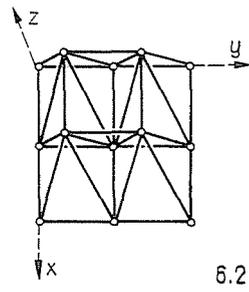
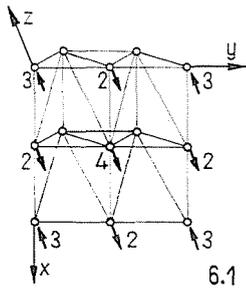


Рис. 6

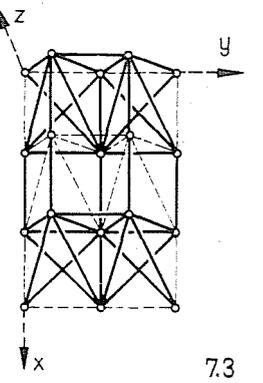
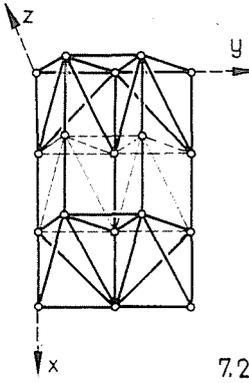
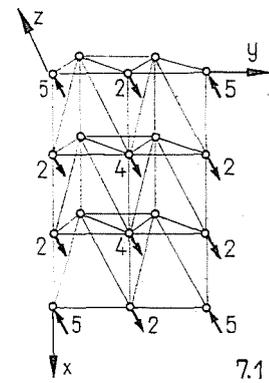


Рис. 7

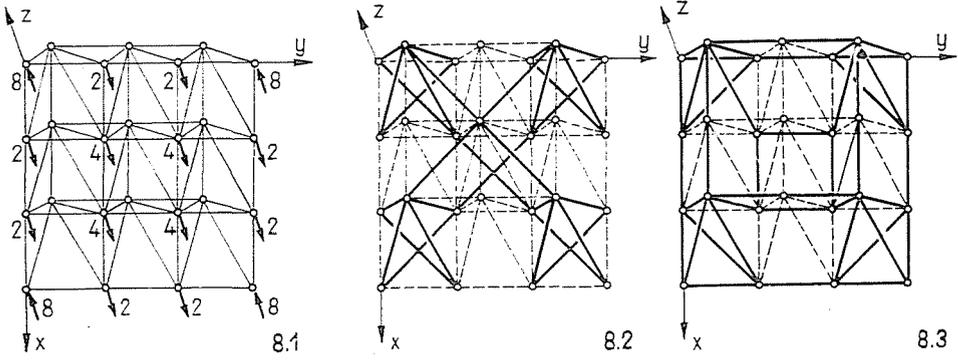


Рис. 8

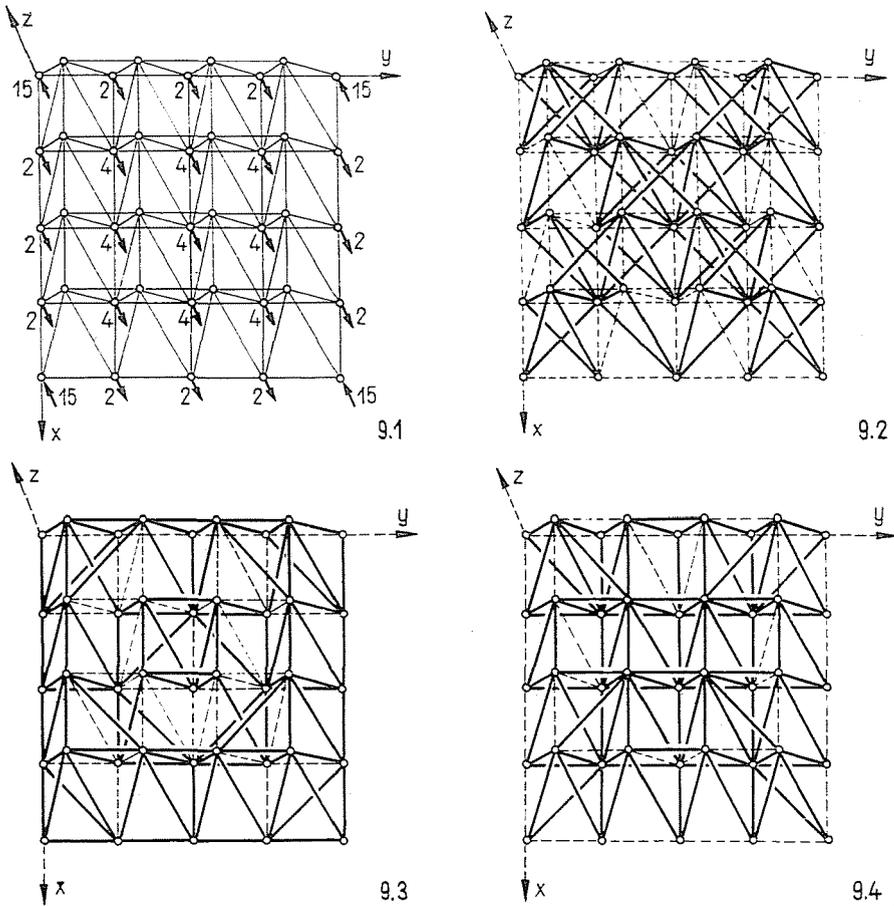


Рис. 9

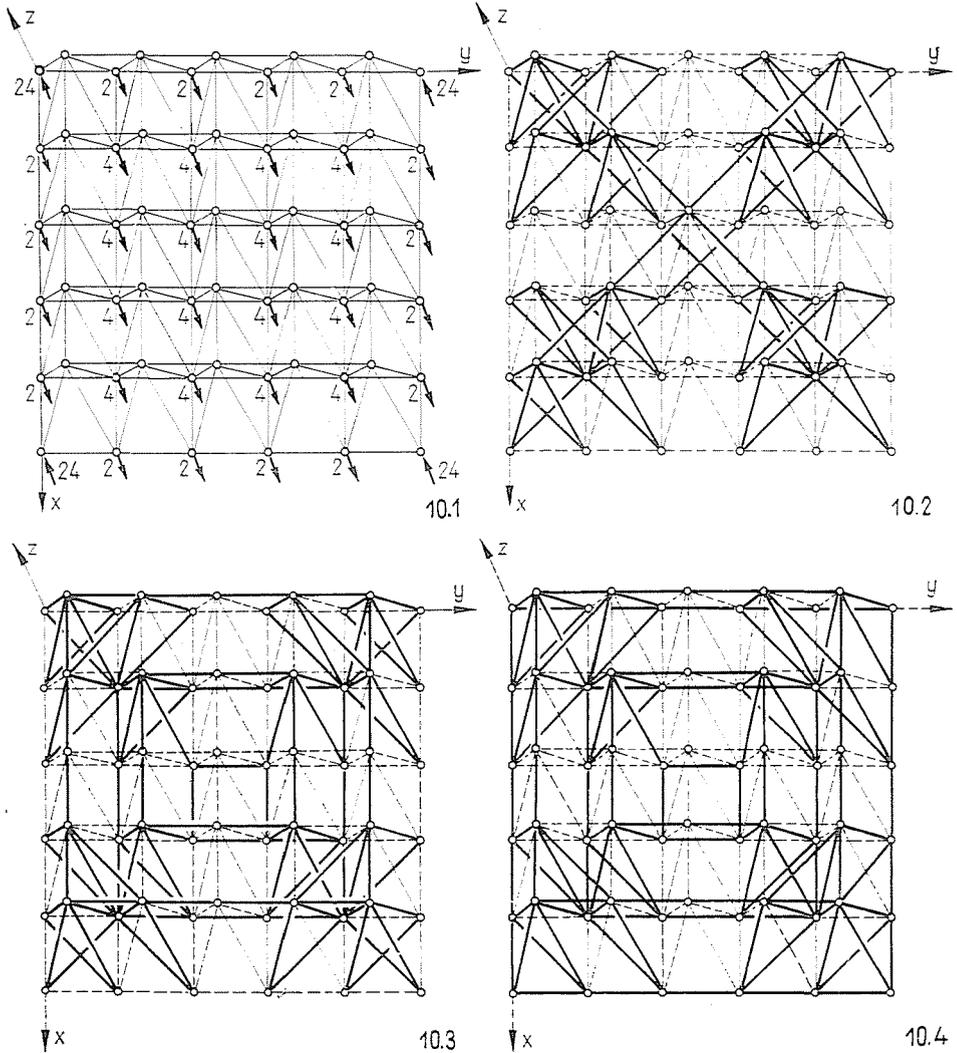
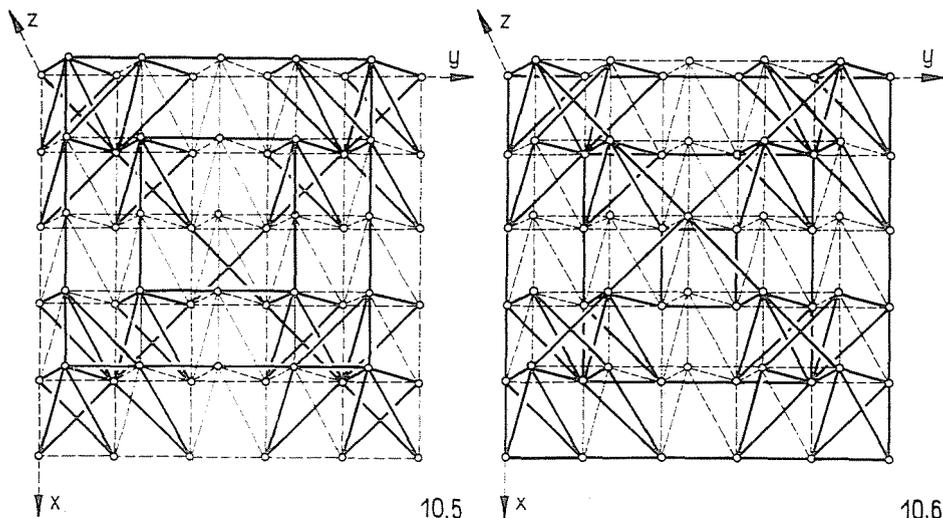


Рис. 10а

длинные раскосы всегда должны быть растянутыми). Исчисленный по указанным правилам теоретический вес  $G = 704$ . Теоретический же вес оптимальных расположений, приведенных на серии рисунков 5, составляет  $G = 608$ , предыдущее значение которого на 15,8% выше.

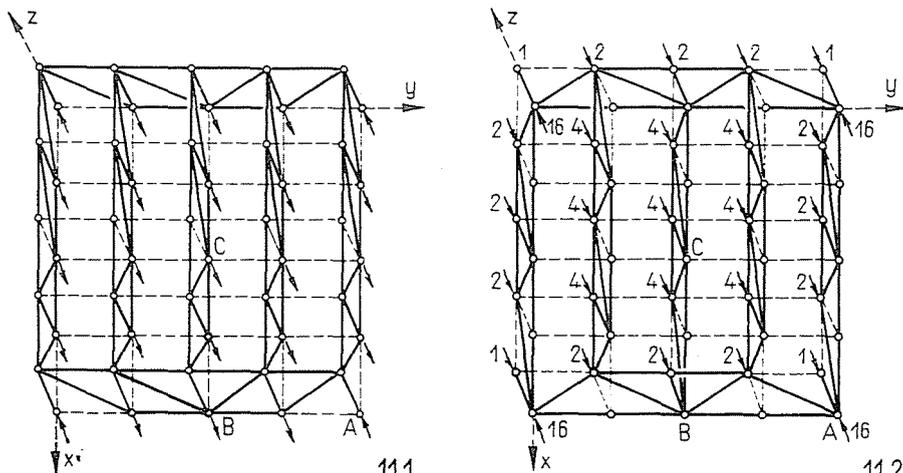
2. На рис. 11.2 видно оптимальное расположение стержней такой решетки из параллелепипедов, при которой вертикальные нагрузки, влияющие на верхний пояс уравниваются силами, воздействующими на четыре угловых шарнира нижнего пояса. От расположения стержней, приведенного на рис. 5.4 — где те же самые нагрузки влияют на нижний пояс — оно различается лишь по количеству и местам расположения стоек. Усилия во всех осталь-



10.5

10.6

Рис. 10б



11.1

11.2

Рис. 11

ных стержнях одинаковы, а теоретический вес каждого решения в отдельности  $G = 608$ .

3. Это свойство легко наблюдается при сравнении серии рис. 5 с предыдущими сериями.

4. В серии 5 при каждом расположении стержней сумма теоретических весов верхнего и нижнего поясных стержней составляет 320, а сумма теоретических весов стоек и раскосов — 288. (Такая же величина получается при расположении стержней на рис. 11.2.)

5. Рассмотрим например, что воздействующая в точке В балки на рис. 5.4 сила «достигает» до уравновешивающих сил, действующих в угловых точ-

как посредством двух стержней, а воздействующая в точке С — посредством четырех стержней. В то же время с точки В балки на рис. 11.1 сила к угловым точкам передается четырьмя, а с точки С — восемью стойками и раскосами.

6. Рассчитываем вертикальное перемещение точек В и С балок на рис. 5.4 и 11.1 в отношении к точке А. Так как в обоих случаях поперечные сечения стержней пропорциональны абсолютной величине усилия в стержне, то значение удельной деформации  $\epsilon$  в каждом стержне будет иметь одинаковую абсолютную величину. В случае расположения стержней по рис. 5.4  $\Delta z_B = 8\epsilon$  и  $\Delta z_C = 16\epsilon$ , а у балки на рис. 11.1  $\Delta z_B = 10\epsilon$  и  $\Delta z_C = 20\epsilon$ , что представляет собой изгиб на 25% больше чем у предыдущего.

7. Например, рис. 5.2 и 5.4 представляют сети, состоящие из самых по себе статически определимых плоских ферм, двукратно опирающихся друг на друга, а рис. 5.5—5.8 — многократно опирающихся друг на друга.

8. Например, все поперечные сечения стержней статически определимых сетей по рис. 5.2 и 5.4 умножаются на положительные скалярные множители  $p$  и  $q = 1-p$  и соответствующие поперечные сечения складываются, то получается расположение стержней по рис. 5.3. Здесь нагружающие силы в перекрещивающихся фермах распределяются по их жесткости (что совпадает с соотношением  $p$  и  $q$ ), а деформации сами по себе будут совпадать, так как в каждом стержне перекрещивающихся ферм одинаковой сети в одинаковой мере возникает относительное удлинение  $\epsilon$ .

Еще раз подчеркиваем, что определения для расположений стержней наименьшего теоретического веса не могут быть непосредственно применены на практике, так как на расчетное частное прочностей растяжения и давления значительно влияют фактические геометрические размеры и качество материала. Однако приближение относительно допустимому напряжению не влияет на сказанные под пунктами 3, 5, 6, 7 и 8, в то время как сказанные под пунктами 1 и 2 в большей или меньшей степени действительны в большинстве практических случаев. Теоретический вес оптимальной сети стержней может оказаться таким измерителем, к лучшему приближению которого мы и стремимся и в отношении которого можем определить эффективность данной конструкции. Изучение сетей стержней пространственной работы и само по себе может быть полезным, так как способствует развитию конструкционной способности, необходимой при проектировании подобных конструкций.

## Резюме

Статья показывает решения задач, взятых с области прямого проектирования несущих конструкций. Поперечные сечения стержней статически неопределимых пространственных шарнирных ферм, нагружаемых однопараметрической системой сил определяются так, чтобы приблизительно исчисляемая потребность материала получилась наименьшей. На основе решений заключаются несколько выводов о расположениях стержней у конструкций подобного типа.

## Литература

1. MAXWELL, J. C.: On Reciprocal Figures Frames and Diagrams of Forces. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVI (1870); The Scientific Papers of J. C. M., Vol. II. pp. 161—207. (1890).
2. WASIUTINSKI, Z. — BRANDT, A.: The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures, Appl. Mech. Rev. Vol. 16, No. 5 (1963)
3. PEREDY, J.: Über eine neue Minimumaufgabe der technischen Festigkeitslehre. Acta Tech. Ac. Sc. Hung., Tom. XXIV. p. 329. (Budapest 1959)
4. PEREDY, J.: Die Planung wirtschaftlicher Tragwerke. Acta Tech. Ac. Sci. Hung. Tom. XXIX. p. 251 (1960)
5. PEREDY, J.: Wirtschaftliche, statisch unbestimmte Konstruktionen. Acta Tech. Ac. Sci. Hung. Tom. XXXI, p. 285 (1961)
6. Переды, Й.: Об экономическом проектировании размеров поперечных сечений статически неопределимых стержневых конструкций. Кандидатская диссертация (Будапешт, 1964). На венгерском языке.
7. Рабинович, И. М.: Курс строительной механики стержневых систем, часть II, М., 1954.
8. Радциг, Ю. А.: Статически неопределимые фермы наименьшего веса. Изд. Казанского Университета, Казань, 1969.

Геза ШАЛАТ, старший ассистент,  
Технический Институт им. М. Полака г. ПЕЧ  
7624 Pécs, Boszorkány út 2.  
ВЕНГРИЯ