PUNKTE, DIE VON ZWEI RAUMELEMENTEN IN DURCH EIN GEGEBENES VERHÄLTNIS BESTIMMTEN ABSTÄNDEN LIEGEN

Von

A. Horn

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 16. Oktober 1972)

Vorgelegt von Prof. Dr. G. Petrich

1. Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Elementen der Ebene in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

1.1 Punkte, die von zwei Punkten in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

Die Punkte der Ebene, die von zwei Punkten derselben in durch ein gegebenes Verhältnis $\neq 1$ bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf einem Kreis, dem Appolonius-Kreis (Abb. 1). Ist das Verhältnis gleich 1, entartet der Kreis zu einer Geraden, die auf die Verbindungsgerade der beiden Punkte senkrecht, diese halbiert.

Die Kreise der Punkte, die von den beiden Punkten durch unterschiedliche Verhältnisse bestimmte Abstände haben, bilden ein elliptisches Kreisbüschel, wo zwei Punktkreise zwei ausgewählte Punkte der Ebene sind, die Zentralgerade die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte und die Potenzlinie die den Abstand zwischen den beiden Punkten halbierende Senkrechte ist (Abb. 2).

1.2 Punkte, die von einem Punkt und von einer Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

Die Punkte der Ebene, die von einem Punkt und einer Geraden derselben in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf demselben Kegelschnitt. Ist das Verhältnis der Abstände von dem Punkt bzw. von der Geraden < 1, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse (Abb. 3); bei einem Verhältnis gleich 1 erhält man eine Parabel (Abb. 4) und bei > 1 stellt der Kegelschnitt eine Hyperbel dar (Abb. 5).

Da das Vorstehende allgemein bekannt ist, wird von der Beweisführung Abstand genommen.

Wird das Verhältnis der Abstände von dem Punkt und von der Geraden fortlaufend geändert, bilden die genannten Kegelschnitte ein Kegelschnittbü-

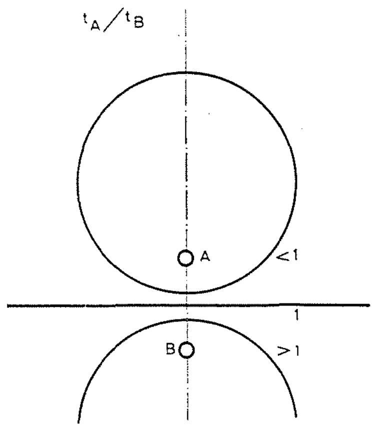

Abb. 1

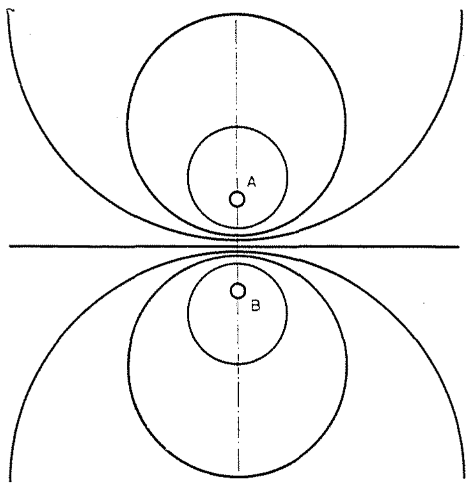

Abb. 2

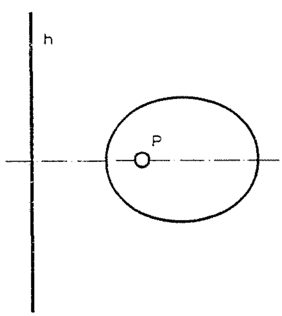

Abb. 3

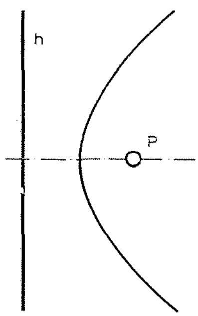

Abb. 4

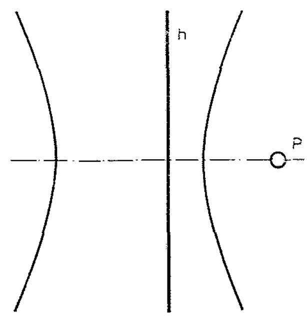

Abb. 5

schel mit gemeinsamem Brennpunkt und gemeinsamer Achse, wo der gemeinsame Brennpunkt ein ausgewählter Punkt der Ebene ist und die gemeinsame Achse auf die ausgewählte Gerade der Ebene senkrecht durch diesen Punkte geht.

Um dies räumlich zu beweisen, betrachte man Abb. 6, wo die einzelnen Kegelschnitte des genannten Kegelschnittbüschels als Horizontalprojektionen der ebenen Schnitte eines Rotationskegels mit senkrechter Achse dargestellt sind.

Es seien P und h der gewählte Punkt bzw. die gewählte Gerade in der Ebene S. P ist der Scheitelpunkt des Rotationskegels mit senkrechter Achse und einem Konuswinkel von 45°. Die einzelnen Schnittebenen des Rotationskegels werden über die Gerade h angenommen. Durch senkrechte Projektion

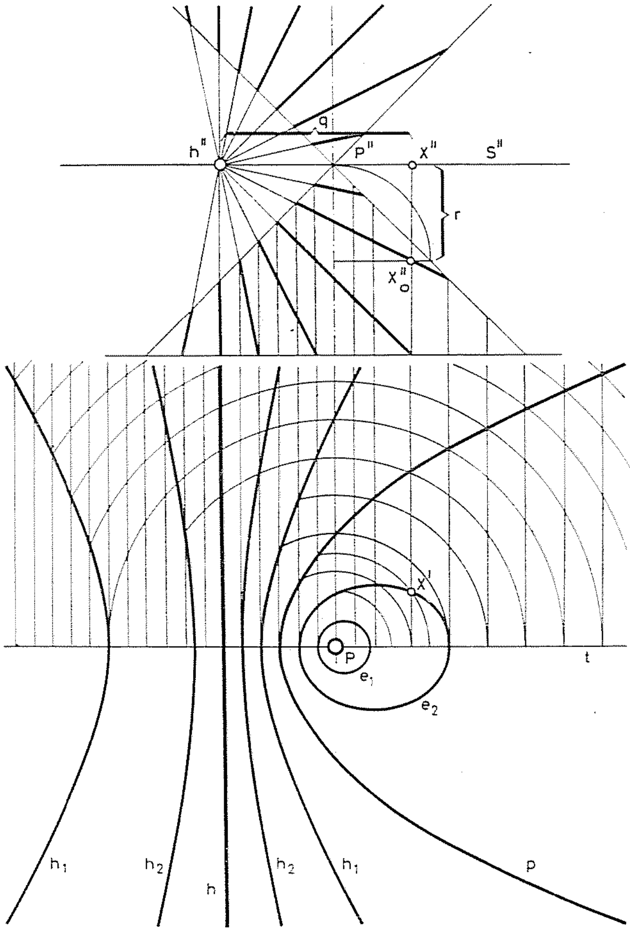

Abb. 6

der so erhaltenen Schnitte auf die Verbindungsebene von P und h erhält man Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels mit gemeinsamem Brennpunkt und gemeinsamer Achse, wo die Punkte eines beliebigen Kegelschnittes durch ein gegebenes Verhältnis bestimmte Abstände von P und h haben. Für sämtliche Punkte eines beliebigen Schnittes ist nämlich das Verhältnis r/q gleich. r ist der Radius des Parallelkreises des Punktes, der in der Projektion die Entfernung von P angibt, während q die Entfernung von h liefert. Die gemeinsame Achse der Kegelschnittprojektionen ergibt sich aus der gemeinsamen Symmetrieebene des Kegels und seiner Schnittebenen.

Vom Kegelschnittbüschel haben wir die Ellipsen e_1 und e_2 dargestellt. Die Abstände ihrer Punkte von P und h verhalten sich wie 1 : 5 und 1 : 2.

Die Abstände der Punkte der Parabel p stehen im Verhältnis von 1 : 1. Das Verhältnis der Abstände von P und h der Hyperbeln h_1 und h_2 ist wie 2 : 1 und 5 : 1.

Wohlgemerkt, sind auch der Punkt P und die Gerade h Glieder des genannten Kegelschnittbüschels mit gemeinsamem Brennpunkt und gemeinsamer Achse. Der erstere ist ein Punktkreis, die letztere das Glied einer zerfallenden Hyperbel, wo die beiden Zweige der Hyperbel zu einer einzigen Geraden entarten. P ist nämlich der Scheitelpunkt des Kegels; durch die durch diesen gehende und auf die Achse des Kegels senkrechte Ebene wird in P ein Kreis mit dem Radius gleich Null herausgeschnitten. Die Gerade h ist aber die Projektion auf die Horizontalebene S des durch die über diese Ebene gehende Vertikalebene herausgeschnittenen Hyperbelschnittes.

Liegt Punkt P auf der Geraden h, zerfallen die Kegelschnitte in ein durch Punkt P gehendes Strahlenbüschel (Abb. 7). Ist das Verhältnis der Abstände von P und h gleich 1, so geht die Gerade durch P und steht senkrecht auf h. Ist das Verhältnis > 1, liegen die gesuchten Punkte auf zwei durch P gehende Geraden, die mit h gleiche Winkel bilden.

1.3 Punkte, die von zwei Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

Die Punkte der Ebene, die von zwei gegebenen Geraden derselben in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf zwei Geraden, die durch den Schnittpunkt M der ausgewählten Geraden gehen (Abb. 8). Die Geradenpaare für verschiedene Verhältniswerte bilden ein Strahlenbüschel aus sich in Punkt M schneidenden Strahlen.

Sind die beiden Geraden parallel zueinander, d. h. liegt ihr Schnittpunkt im Unendlichen, so schneiden sich auch die Geradenpaare mit unterschiedlichem Verhältnis der Abstände im Unendlichen und somit sind diese zu den vorgegebenen Geraden parallel (Abb. 9).

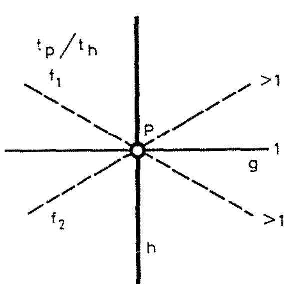

Abb. 7

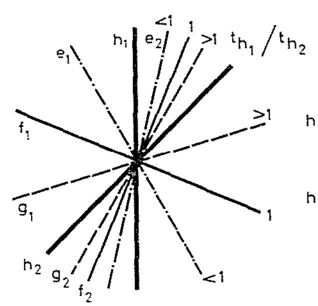

Abb. 8

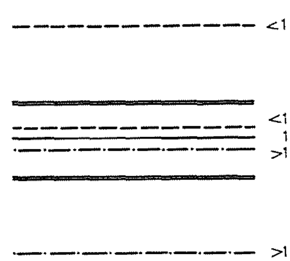

Abb. 9

2. Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Raumelementen in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

2.1 Punkte, die von zwei Punkten in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

Wie in Punkt *1.1* gesagt, liegen die Punkte der Ebene, deren Abstände von zwei Punkten der Ebene in konstantem Verhältnis sind, auf einem Kreis. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in der Verbindungsgeraden der beiden Punkte. Wird daher der Kreis um die Verbindungsgerade der beiden Punkte gedreht, erhält man eine Kugel, deren sämtliche Flächenpunkte nach dem vorstehenden Satz von den beiden Punkten in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen (Abb. 10).

Daher sind die Punkte des Raumes, die von zwei Punkten in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, Flächenpunkte einer Kugel.

Wird das Verhältnis der Abstände von den beiden Punkten geändert, erhält man Kugeln, die eine elliptische Kugelreihe bilden (siehe Punkt *1.1*). Auch die beiden Punkte sind Glieder dieser Kugelreihe, als Kugeln mit dem Halbmesser 0; ferner ist es auch die senkrechte Ebene, die den Abstand zwischen den beiden Punkten halbiert, die die Fläche einer Kugel mit unendlich großem Radius darstellt (Abb. 11).

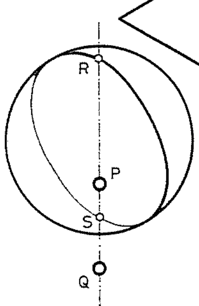

Abb. 10

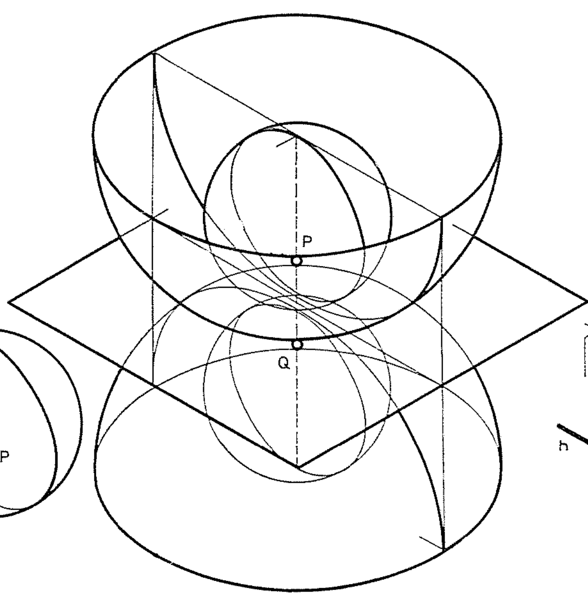

Abb. 11

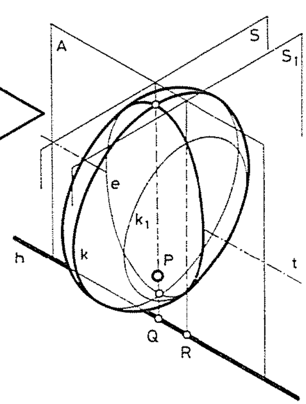

Abb. 12

2.2 Raumpunkte, die von einem Punkt und einer Geraden des Raumes in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

Die Punkte des Raumes, die von einem Punkt und einer Geraden desselben in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf verschiedenen Flächen je nachdem, ob das Verhältnis der Abstände < 1, gleich 1 oder > 1 ist.

2.21 Bei einem Verhältnis der Abstände von P und h < 1 (Abb. 12), erhält man nach *1.2* in der P und h verbindenden Ebene A die Ellipse e. Wohlgemerkt, die Symmetrieebene der entstehenden Fläche ist die Ebene A. Eine weitere Symmetrieebene ist die Ebene S, die auf h über P senkrecht steht. In dieser erhält man nach *1.1* den Kreis k, da in der Ebene S der Abstand von h von deren Punkt Q aus gemessen wird. Die Ellipse e und der Kreis k in aufeinander senkrechten Symmetrieebenen lassen auf ein linsenförmiges Rotationsellipsoid mit einer zu h parallelen Achse t schließen. In diesem Falle sind auch die auf t senkrechten Schnitte Kreise.

Um dies nachzuweisen, wird der Schnitt k_1 in der Ebene S_1 dargestellt. Hier werden die Abstände von h von deren Punkt R aus gemessen. Die Punkte, die von P und R durch ein gegebenes Verhältnis bestimmte Abstände haben, liegen nach *2.1* auf einer Kugel, deren Schnitt k_1 mit der Ebene S_1 ein Kreis ist.

Damit bilden die Punkte des Raumes, die von einem Punkt und einer Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis < 1 bestimmten Abständen liegen, die Flächenpunkte eines linsenförmigen Rotationsellipsoids mit zur Geraden paralleler Achse.

2.22 Liegen die Punkte in gleichem Abstand von P und von h, d. h. ist das Verhältnis der Abstände gleich 1, so liegen diese Punkte in der Ebene A auf der Parabel p (Abb. 13). In der über P auf h senkrechten Ebene S, die Abstände von h von Punkt T aus gemessen, erhält man die auf A senkrechte Gerade a, die die Entfernung zwischen P und h halbiert. Da die Ebenen A und S Symmetrieebenen der entstehenden Fläche sind, deuten die in diesen befindliche Parabel p und die diese schneidende und auf ihre Ebene senkrechte Gerade a auf einen parabolischen Zylinder. In diesem Falle müssen auch die allgemeinen Punkte der Fläche in gleichen Abständen von P und h liegen.

Der Nachweis wird für einen beliebigen Punkt R_1 der durch einen beliebigen Punkt R der Parabel p gehenden Erzeugenden mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke PRR_1 und QRR_1 geführt. Da $PR = QR$ und die Seite RR_1 der beiden Dreiecke gemeinsam ist, ist $PR_1 = QR_1$; daher ist auch Punkt R_1 gleich entfernt von P bzw. von h.

Die Punkte des Raumes, die von einem Punkt und einer Geraden in gleichen Abständen liegen, befinden sich auf einem parabolischen Zylinder, der auf die Verbindungsebene zwischen dem Punkt und der Geraden senkrecht steht und diese Ebene auf einer Parabel schneidet, die durch vom Punkt und der Geraden in gleichen Abständen liegende Punkte gebildet wird.

2.23 Bei einem Verhältnis > 1 der Abstände der Punkte von P und von h (Abb. 14) erhält man nach *1.2* in der Ebene A die Hyperbel h_1, die eine Symmetrieebene der gesuchten Fläche ist. Auch die Ebene S ist eine weitere Symmetrieebene, die über P auf h senkrecht steht. In dieser erhält man nach *1.1* den Kreis k, da hier die Abstände von h von deren Punkt Q aus gemessen werden. Die Hyperbel h_1 und der Kreis k, die in aufeinander senkrechten Symmetrieebenen liegen, deuten auf ein einschaliges Rotationshyperboloid mit zu h paralleler Achse t. In diesem Falle erhält man in jeder auf t senkrechten Ebene einen Kreisschnitt.

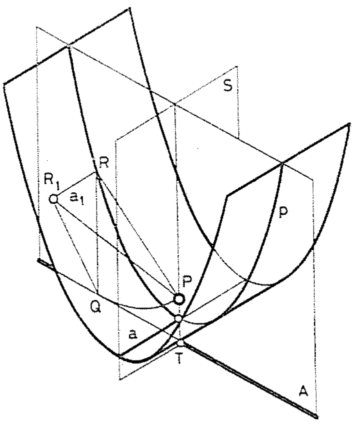

Abb. 13

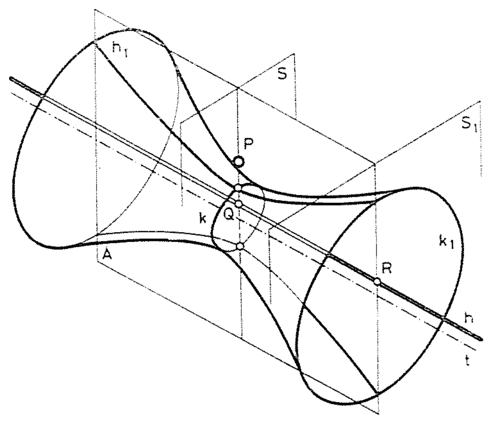

Abb. 14

Zur Beweisführung wird der Schnitt k_1 in der auf t senkrechten Ebene S_1 dargestellt. In der Ebene S_1 werden die Abstände von h von deren Punkt R aus gemessen. Die Punkte, die von P und R in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, befinden sich nach *2.1* auf einer Kugel, deren Schnitt k_1 mit der Ebene S_1 ein Kreis ist.

Die Punkte des Raumes, die von einem Punkt und einer Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis > 1 bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf der Fläche eines einschaligen Rotationshyperboloids mit zur Geraden paralleler Achse.

Abb. 15 zeigt die drei Flächen für die drei verschiedenen Verhältnisse ihrer Abstände zusammen.

In Abb. 16 liegt Punkt P auf der Geraden h. In diesem Falle befinden sich die Punkte, die von diesen in gleichem Abstand liegen, in der auf h über P senkrechten Ebene S. Ist das gegebene Verhältnis der Abstände von P und h

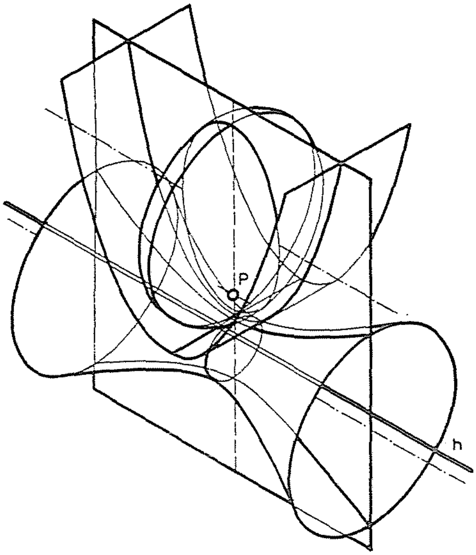

Abb. 15

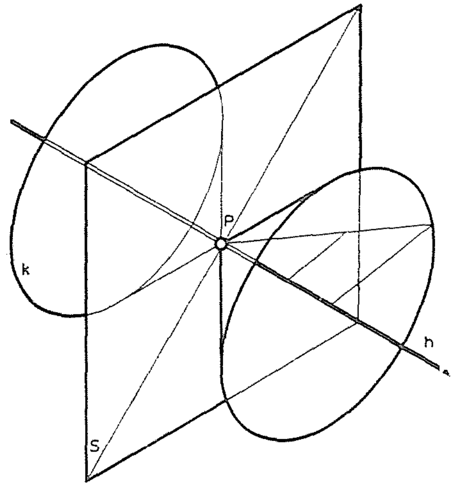

Abb. 16

größer als 1, so liegen die Punkte auf der Fläche eines Rotationskegels mit dem Scheitelpunkt P und der Achse h, dessen Konuswinkel vom vorgegebenen Verhältnis abhängig ist.

Schneidet man nämlich die durch die von P in größerem Abstand liegenden Punkte gebildete Kugel mit dem Zylinder der Punkte in geringerem Abstand von h, entstehen zwei Kreisschnitte gleicher Größe mit auf h senkrechten Ebenen, die symmetrisch zu P sind. Werden die Kreise mit P verbunden, erhält man einen Rotationskegel, wo alle Oberflächenpunkte von der Spitze P und der Achse h in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen.

2.3 Punkte, die von einem Punkt und von einer Ebene in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

Sämtliche Punkte eines beliebigen Kegelschnitts in Abb. 6 liegen von P und von h in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen. Werden die Kegelschnitte um ihre gemeinsame Achse t gedreht, so werden sämtliche Punkte einer jeden der durch diese beschriebenen Flächen vom auf der Drehachse verharrenden Punkt P und von der durch die Gerade h beschriebenen, auf t senkrechten Ebene in durch das gleiche Verhältnis bestimmten Abständen liegen.

2.31 Daher bilden die Punkte des Raumes, die von einem Punkt und einer Ebene in durch ein gegebenes Verhältnis < 1 bestimmten Abständen liegen,

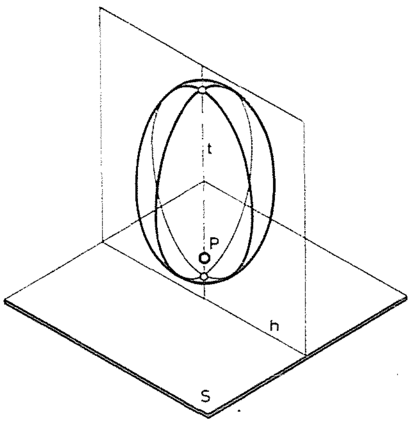

Abb. 17

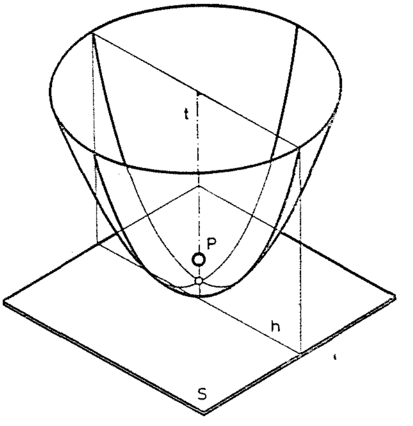

Abb. 18

Flächenpunkte eines eiförmigen Rotationsellipsoids mit durch den Punkt gehender und auf die Ebene senkrechter Achse (Abb. 17).

2.32 Die Punkte, die von Punkt P und von der Ebene S in durch das gleiche Verhältnis — d. h. gleich 1 — bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf der Oberfläche eines Rotationsparaboloids mit durch den Punkt gehender und auf die Ebene senkrechter Achse (Abb. 18).

2.33 Punkte, die von einem Punkt und einer Ebene in durch ein gegebenes Verhältnis > 1 bestimmten Abständen liegen, bestimmen die Fläche eines zweischaligen Rotationshyperboloids mit durch den Punkt gehender und auf die Ebene senkrechter Achse (Abb. 19).

In Abb. 20 sind die den drei unterschiedlichen Fällen entsprechenden verschiedenen Flächen dargestellt.

Liegt Punkt P in der Ebene S und ist das Verhältnis der Abstände von diesen gleich 1, liegen die gesuchten Punkte auf der über P auf S senkrechten Geraden. Ist das Verhältnis größer als 1, so bilden diese Punkte einen Rotationskegel mit auf S senkrechter Achse und mit dem Scheitelpunkt P. Die durch die von P in größeren Abständen liegenden Punkte gebildete Kugel wird nämlich durch die Parallelebenen in geringeren Abständen von S in zwei Kreisen gleicher Größe geschnitten, deren Mittelpunkte in m liegen. Werden die Abstände unter Beibehaltung ihres Verhältnisses geändert, verändern sich die parallelen Kreisschnitte mit dem Mittelpunkt in m ihrem Abstand von P proportional, und bilden damit einen Rotationskegel mit dem Scheitelpunkt P und der Achse m (Abb. 21).

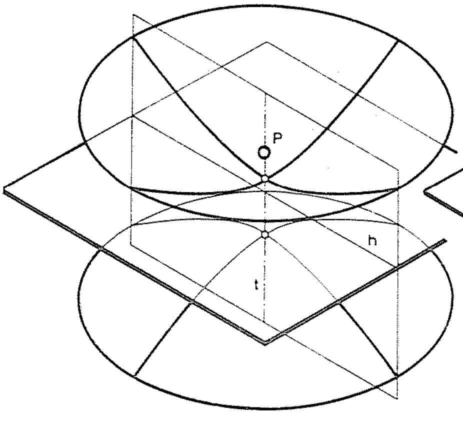

Abb. 19

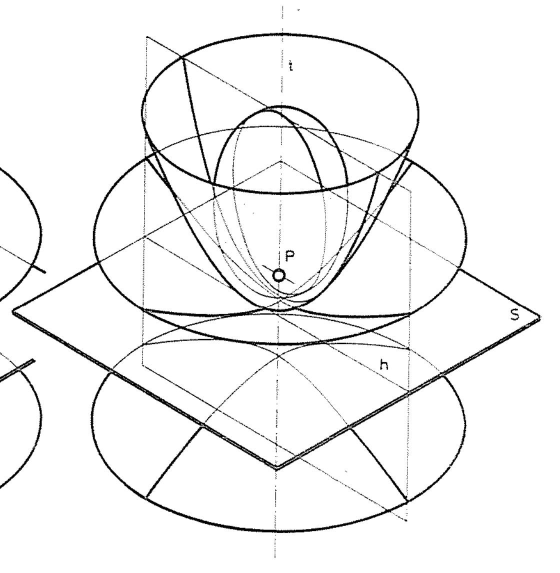

Abb. 20

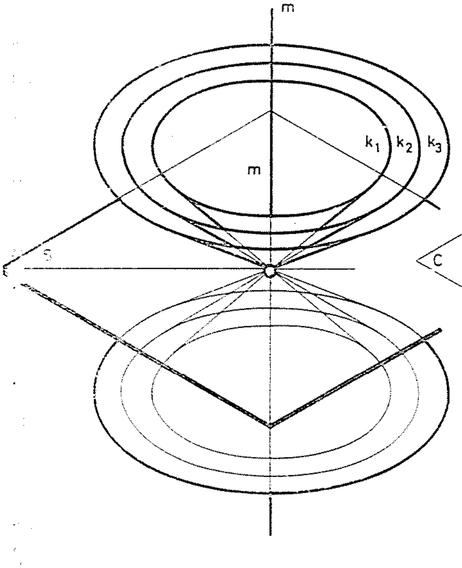

Abb. 21

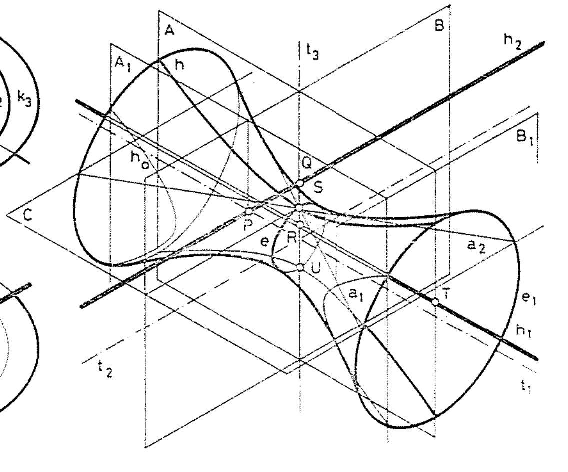

Abb. 22

2.4 Punkte, die von zwei Geraden des Raumes in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

2.41 Windschiefe Geraden. In Abb. 22 wird der geometrische Ort der Punkte bestimmt, die von den Geraden h_1 und h_2 in durch ein gegebenes Verhältnis < 1 bestimmten Abständen liegen. Hier werden die windschiefen Geraden aufeinander senkrecht angenommen.

Werden in der auf h_1 liegenden und auf h_2 senkrechten Ebene A die Abstände von h_2 von deren Punkt Q aus gemessen, erhält man nach *1.2* die Hyperbel h. Werden in der auf h_2 liegenden und auf h_1 senkrechten Ebene B die Abstände von h_1 von deren Punkt R aus gemessen, erhält man — ebenfalls nach *1.2* — die Ellipse e, da das gegebene Verhältnis der Abstände von h_1 und von $h_2 < 1$. Die Ebenen A und B sind die Symmetrieebenen der gesuchten Oberfläche. Nach der Hyperbel h und der Ellipse e, die in diesen Ebenen liegen, ist der gesuchte geometrische Ort ein einschaliges Hyperboloid, dessen auf die Kehlellipsenebene senkrechte Achse t zur der ihr näher liegenden windschiefen Geraden h_1 parallel ist. Die Achse t_3 der Oberfläche ist die Schnittlinie der Symmetrieebenen A und B, während die Achse t_2 auf die Achsen t_1 und t_3 senkrecht steht und durch deren Schnittpunkt geht.

In diesem Falle sind die auf h_1 senkrechten Schnitte e ähnliche Ellipsen. So werden in der auf h_1 senkrechten Ebene B_1 die Abstände von h_1 von deren Punkt T aus gemessen. Die Punkte, die von T und von h_2 in durch ein gegebenes Verhältnis < 1 bestimmten Abständen sind, liegen auf einem linsenförmigen Rotationsellipsoid mit einer zu h_2 parallelen Achse (vgl. *2.21*), dessen Meridianellipse wegen des gleichen Verhältnisses der Ellipse e ähnlich ist. So wird auch der Schnitt in der Ebene B_1 eine der Ellipse e ähnliche Ellipse sein, da B_1 zu der Achse des Ellipsoids parallel ist. Die Hauptachsen der so gezeichneten Ellipsen sind mit den zu der realen Achse der Hyperbel h in der Ebene A parallelen Sekanten identisch.

Die zu der Achse t_1 parallelen Schnitte sind hingegen Parabeln, wenn ihre Ebenen nicht auf einer Tangente der Kehlellipse liegen. Daher werden in der zu A parallelen Ebene A_1, da diese auf h_2 senkrecht steht, die Abstände von Punkt P aus gemessen. Die Punkte, die von P und von h_1 in Abständen in gegebenem Verhältnis > 1 zueinander liegen, befinden sich — nach *2.23* — auf einem Rotationshyperboloid mit zu h_1 paralleler Achse. Daher ist der Schnitt h_0 der genannten Fläche mit der Ebene A_1 eine Hyperbel.

Betrachte man schließlich die Ebene C, die in Punkt S der Achse t_3 der Fläche auf t_3 senkrecht steht. In dieser Ebene liegen die Punkte, die von h_1 und h_2 in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen sind, auf den Geraden e_1 und e_2 (Abb. 23), da sämtliche Punkte von a_1 und a_2 auch von den Vertikalprojektionen von h_1 und h_2 auf die Ebene C in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen.

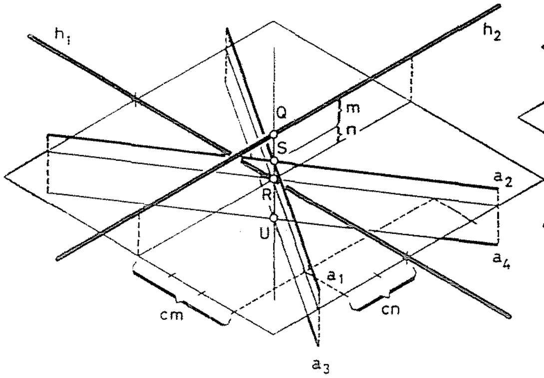

Abb. 23

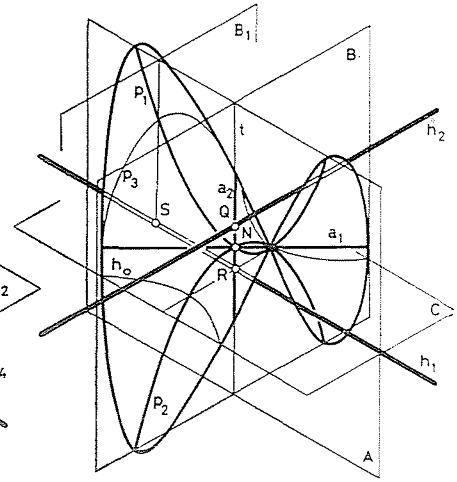

Abb. 25

Damit ist der geometrische Ort der Punkte, die von zwei windschiefen Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis $\neq 1$ bestimmten Abständen liegen, ein einschaliges Hyperboloid. Sind die windschiefen Geraden senkrecht aufeinander, so ist die auf die Kehlellipsenebene senkrechte Achse der Fläche zu jener der beiden windschiefen Geraden parallel, zu der ihre Flächenpunkte näher liegen.

Da die vorige Behauptung nicht nur die aufeinander senkrechten, windschiefen Geraden betraf, bedarf der allgemeinere Fall noch der Beweisführung.

Stehen h_1 und h_2 nicht senkrecht aufeinander, erhält man in den durch die Punkte, die auf deren Normaltransversalen in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, gehenden, auf die Transversale senkrechten Ebenen die Sekantenpaare a_1 und a_2 sowie a_3 und a_4, von denen a_1 zu a_3 und a_2 zu a_4 parallel ist. Sämtliche Punkte derselben liegen in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen von den Geraden h_1 und h_2 (vgl. Abb. 24). Nach der folgenden Überlegung erhält man in den auf h_2 senkrechten Ebenen einander ähnliche Ellipsen, die die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 schneiden.

In einer auf h_2 senkrechten, beliebigen Ebene werden die Abstände von h_2 von dem Schnittpunkt dieser Geraden aus gemessen. Die Punkte, die von diesem Schnittpunkt und von h_1 in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, befinden sich auf einem linsenförmigen Rotationsellipsoid mit zu h_1 paralleler Achse (s. *2.21*), dessen Schnitt mit einer auf h_2 senkrechten Ebene eine Ellipse ist. Wird das Gesagte für andere Punkte von h_2 wiederholt, erhält man wiederum linsenförmige Rotationsellipsoide mit zu h_1 paralleler

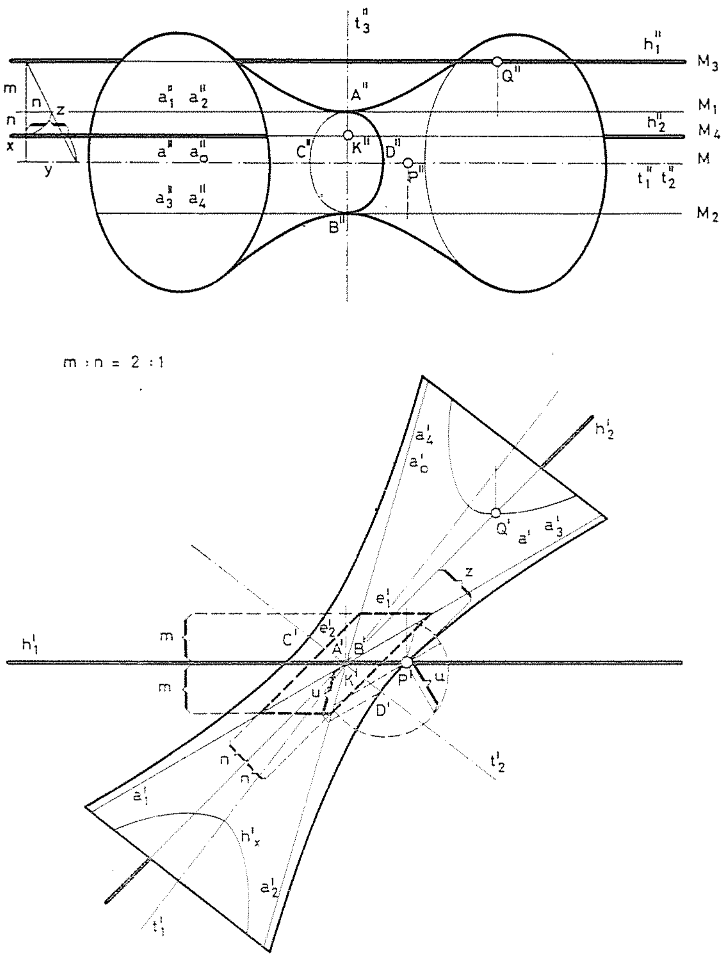

Abb. 24

Achse, die wegen des gleichen Verhältnisses dem ersten Ellipsoid ähnlich sind. Damit sind auch deren in der gleichen Weise gezeichneten Schnitte in den auf h_2 senkrechten Ebenen einander ähnlich. Indem diese parallelen, ähnlichen Ellipsen die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 schneiden, bestimmen sie wieder ein einschaliges Hyperboloid. Diesen Fall zeigt Abb. 24, wo das Verhältnis der Abstände von h_1 und h_2 wie $m : n = 2 : 1$ ist.

Auf der normalen Transversalen t_3 der windschiefen Geraden liegen die Punkte A und B in Abständen mit dem gegebenen Verhältnis. Sämtliche Punkte der Geraden a_1 a_2 und a_3 a_4, die in den auf die durch A und B gehende Achse t_3 senkrechten Ebenen M_1 und M_2 liegen, befinden sich von den Geraden h_1

und h_2 in durch das gewünschte Verhältnis bestimmten Abständen, da deren Projektionen sowohl in Grundriß als auch in Aufriß das gewünschte Verhältnis befriedigen. Diese wurden als Diagonalen des durch die in Grundriß von h_1 im Abstand m, von h_2 im Abstand n liegenden parallelen Geraden gebildeten Proportionalitätsparallelogramms erhalten. Diese beiden Geraden sind die Erzeugenden des Hyperboloids. Die sie verbindenden Ebenen sind parallele Tangentialebenen des Hyperboloids. Die Schnittpunkte der in diesen liegenden Erzeugenden sind die Tangentenpunkte A und B der Tangentialebenen. Da die diese verbindende Gerade t_3 auf die beiden parallelen Tangentialebenen senkrecht steht, liegen die in ihnen befindlichen Tangentenpunkte auf einer der Symmetrieachsen, auf der großen oder der kleinen Achse, der Kehlellipse des Hyperboloids, da nur die Tangentialebenen in den Endpunkten dieser Achsen auf die Verbindungsgerade der in den Tangentialebenen liegenden Tangentenpunkte senkrecht stehen. Daher liegen die beiden anderen Achsen des Hyperboloids in der Halbierungs-Vertikalebene M der Strecke AB.

Die gesuchten Achsen sind zugleich mit den Achsen des Hyperbelschnittes in der Ebene M identisch. Da die Asymptoten a und a_0 dieses Schnittes zu den Erzeugenden a_1 und a_2 in den zur Schnittebene parallelen Tangentialebenen, ferner zu a_3 und a_4, die in Grundriß Geraden sind, parallel verlaufen, liefern die Winkelhalbierenden von a und a_0 die fehlenden Achsen des Hyperbelschnittes und zugleich der Fläche.

Damit ist eine der drei Hyperbelachsen die normale Transversale der beiden windschiefen Geraden, die beiden anderen Achsen sind parallel zu den Winkelhalbierenden der Diagonalen des zu den windschiefen Geraden parallelen Proportionalitätsparallelogramms.

Eine der Achsen der Kehlellipse ist die Strecke A—B der Achse t_3 der Fläche. Die andere Achse halbiert letztere und liegt in der Achse t_2 der Fläche. Ihre Endpunkte sind mit den Endpunkten der reellen Achse des die Achsen t_1 und t_2 verbindenden Hyperbelschnittes in der Ebene M identisch. Diese Endpunkte werden mit Hilfe der Asymptoten a und a_0 des Hyperbelschnittes und eines beliebigen Punktes desselben bestimmt. Dieser beliebige Punkt sei P, der in Grundriß mit der Geraden h_1 in Deckung ist. Seine Entfernung von h_1 ist die im Aufriß in Originalgröße sichtbare Strecke h_1 P. Der Abstand von h_2 ist zufolge des vorgegebenen Verhältnisses gleich der Hälfte dieser Strecke, die in der Abbildung links oben konstruierte Strecke y. Da die Gerade h_2 von der Ebene M in einem Abstand x ist, befinden sich die Punkte, die in der Ebene M von h_2 in einer Entfernung y liegen, in Grundriß in einer Entfernung z von h_2. Daher wird P′ durch die von h_2' in einem Abstand z verlaufende, parallele Gerade in der Ebene M in Deckung mit h_2' herausgeschnitten. Von P′ werden bis zu den Asymptoten a und a_0 zu diesen parallele Geraden gezogen. Das geometrische Mittel u der erhaltenen Strecken wird auf die eine Asymptote von dem Sichtpunkt der Asymptoten beginnend aufgetragen, dann wird durch den so erhaltenen Punkt eine Parallele zu der anderen Asymptote gezogen; damit erhält man auf t_2' den einen Scheitelpunkt D des erwähnten Hyperbelschnittes. Dieser Punkt ist zugleich einer der beiden Endpunkte der fehlenden Achse der Kehlellipse. D auf den Halbierungspunkt der Strecke AB gespiegelt, erhält man den anderen Endpunkt C dieser Achse.

Die große Achse der Kehlellipse ist AB, die kleine Achse CD. Die parallelen Schnitte sind der Kehlellipse ähnliche Ellipsen, wo die kleinen Achsen mit den zu t_2 parallelen Sekanten des in der Ebene M soeben dargestellten Hyperbelschnittes identisch sind.

Nun wird der Schnitt der Fläche in der Ebene M_3 konstruiert. Die Punkte in einem Abstand n von h_2 liegen auf einem Zylinder mit der Achse h_2 und dem Radius n. Sein Schnitt mit der ersten Projektionsebene im Abstand m von h_1 ist die Ellipse e_1, deren Mittelpunkt auf h_2 liegt. (In der Abbildung fällt e_1' mit der kürzeren Seite des Proportionalitätsparallelogramms zusammen.) Die Schnittpunkte der Ellipse e_1 mit der Ebene M_3 liegen in Abständen m bzw. n von h_1 bzw. h_2, da h_1 auf der Ebene M_3 liegt. Werden die Werte von m und n unter Beibehaltung ihres Verhältnisses zueinander variiert, bestimmen die erhaltenen parallelen Ellipsenschnitte eine Kegelfläche mit dem Scheitelpunkt K, der Ellipse e_1 als Leitlinie und den Geraden a_1 und a_2 als erste Konturerzeugenden. Die Punkte des Kegels in der Ebene M_3 liegen also von h_1 und h_2 in Abständen in gegebenem Verhältnis zueinander. Da die Ebene M_3 zu den beiden Erzeugenden des Kegels parallel ist, ist der in ihr befindliche Schnitt h_x eine Hyperbel, deren reelle Achse zu t_1 und deren Asymptoten zu den Geraden a_1 und a_2 parallel sind und sich mit diesen in Grundriß decken. Ein beliebiger Punkt dieser Hyperbel ist Q, der in Grundriß mit der Geraden h_2 in Deckung ist, daher ist ihr Abstand im Aufriß in ursprünglicher Größe zu sehen. Wird im Grundriß auf das m/n-fache dieser Strecke — hier auf das Doppelte — eine zu h_1' parallele Gerade gezeichnet, so schneidet diese auf h_2' den Punkt Q' heraus. In dessen Kenntnis läßt sich die Hyperbel h_x nach den gleichen Überlegungen wie die erste Konturhyperbel darstellen.

Es ist leicht einzusehen, daß der geometrische Ort der Punkte, die von zwei beliebigen windschiefen Geraden durch ein gegebenes Verhältnis bestimmte Abstände haben, ein einschaliges Hyperboloid ist, wenn das Verhältnis der Abstände $\neq 1$, wobei die auf die Kehlellipsenebene senkrechte Achse des Hyperboloids nicht mehr parallel zu der ihr näher liegenden windschiefen Geraden ist.

2.41.1 In Abb. 25 wird der geometrische Ort der Punkte gesucht, deren Abstände von h_1 und h_2, von den beiden windschiefen Geraden gleich sind. Hier werden die windschiefen Geraden aufeinander senkrecht angenommen.

In der durch h_1 auf h_2 senkrechten Ebene A, die Abstände von h_2 von dessen Punkt Q gemessen, erhält man nach *1.2* die Parabel p_1. In der durch

h_2 auf h_1 senkrechten Ebene B, die Abstände von h_1 von deren Punkt R gemessen, erhält man die Parabel p_2. A und B sind die Symmetrieebenen der gesuchten Fläche, deren Schnittlinie t eine Achse der Parabeln p_1 und p_2 und zugleich der erzeugten Fläche, ferner die normale Transversale der Geraden h_1 und h_2 ist. Durch deren Halbierungspunkt N gehen die Geraden a_1 und a_2 durch, die zu den Winkelhalbierenden der zu den Geraden h_1 und h_2 parallelen Sekanten parallel sind. Daher sind sämtliche Punkte der Geraden a_1 und a_2 von den windschiefen Geraden gleich entfernt. Die Parabeln in den Symmetrieebenen mit gemeinsamem Scheitelpunkt und gemeinsamer Achse (p_1 und p_2), doch von entgegengesetzter Richtung, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ferner die durch deren gemeinsamen Scheitelpunkt gehenden Geraden a_1 und a_2 bestimmen ein hyperbolisches Paraboloid.

In diesem Falle sind die auf h_1 und h_2 senkrechten Schnitte Parabeln. In der zu B parallelen Ebene B_1 werden die Abstände von h_1 von Punkt S aus gemessen. Die Punkte, die gleiche Abstände von S und h_2 haben, liegen nach *2.22* auf einem auf ihre Verbindungsebene senkrechten parabolischen Zylinder, dessen Schnitt p_3 mit der Ebene B_1 eine Parabel ist.

Die auf die Achse t senkrechten Ebenen — mit Ausnahme der durch Punkt S gehenden — ergeben Hyperbelschnitte. In der Abbildung wird der Schnitt in der auf der Geraden h_1 liegenden Ebene C gezeigt. Dieser wurde als Schnitt des Rotationskegels mit der Achse h_2, dem Scheitelpunkt Q und dem Konuswinkel von 45° mit der Ebene C dargestellt. Die Punkte jedes beliebigen Parallelkreises dieses Kegels liegen in gleichem Abstand von der Achse wie die Ebene ihres Parallelkreises von Punkt Q oder von der Geraden h_1. Da die beiden Erzeugenden dieses Kegels parallel zur Schnittebene C sind, ist der darin liegende Schnitt h_0 eine Hyperbel.

Sind die Geraden h_1 und h_2 nicht senkrecht aufeinander, erhält man in der Verbindungsebene von h_1 und t die Parabel p_1 mit dem Scheitelpunkt N und der Achse t (Abb. 26). Es wird durch h_1 eine zu h_2 parallele Ebene S gelegt. Die Punkte, die gleiche Abstände von h_2 und von S haben, liegen auf einer parabolischen Zylinderfläche, die die Verbindungsebene von h_1 und t in der Parabel p_1 schneidet. Daher ist jeder Punkt von p_1 in gleichem Abstand von der Geraden h_1 und von der auf S liegenden Geraden h. Wird das Gesagte wiederholt, wobei die Geraden h_1 und h_2 untereinander vertauscht werden, erhält man eine Parabel p_2, mit dem gleichen Scheitelpunkt und der gleichen Achse wie p_1, doch von entgegengesetzter Richtung, deren Ebene die Ebene der Parabel p_1 im Winkel der Geraden h_1 und h_2 schneidet. Sämtliche Punkte der durch den gemeinsamen Scheitelpunkt der erhaltenen Parabeln gehenden Geraden a_1 und a_2, die in zu den Geraden h_1 und h_2 parallelen Ebenen liegen und von gleicher Richtung wie deren Winkelhalbierende sind, haben gleiche Abstände von den windschiefen Geraden. Der geometrische Ort der Punkte, die von den jetzt miteinander einen beliebigen Winkel bildenden Geraden h_1 und h_2 in

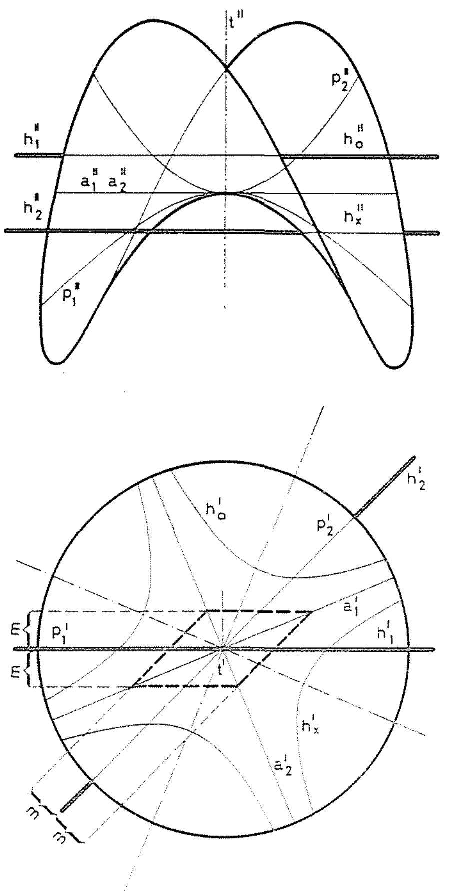

Abb. 26

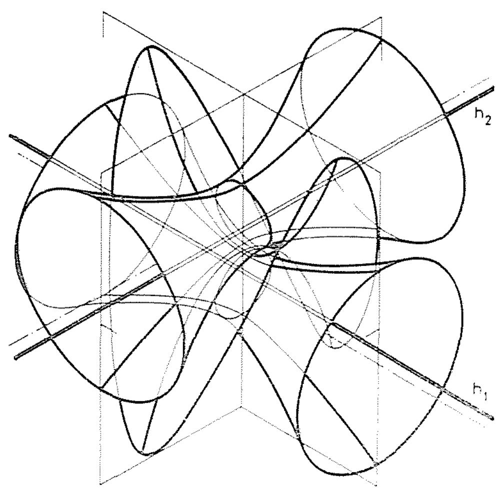

Abb. 27

gleichem Abstand liegen, wird daher durch die soeben gewonnenen Parabeln p_1 und p_2 sowie durch die Geraden a_1 und a_2 bestimmt, die wiederum ein hyperbolisches Paraboloid ergeben.

Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei windschiefen Geraden gleich entfernt sind, liegt also auf einem hyperbolischen Paraboloid.

Abb. 27 ist eine gemeinsame Darstellung der verschiedenen geometrischen Örter, deren Punkte von den windschiefen Geraden h_1 und h_2 in Abständen mit dem Verhältnis < 1, $= 1$ bzw. > 1 liegen.

2.42 Sich schneidende Geraden. In Abb. 28 wird der geometrische Ort der Punkte gesucht, die von den sich schneidenden Geraden h_1 und h_2 in durch ein gegebenes Verhältnis < 1 bestimmten Abständen liegen.

2.42.1 In der auf die Gerade h_1 in einem beliebigen Punkt 0 gestellten normalen Ebene N werden die Abstände von h_1 von diesem 0-Punkt aus gemessen.

Nach *2.21* liegen die Punkte, die von 0 und h_2 durch ein gegebenes Verhältnis bestimmte Abstände haben, auf einem linsenförmigen Rotationsellipsoid mit zu h_2 paralleler Achse. Wird ein beliebiger Punkt X der Ellipse mit M verbunden, erhält man eine Gerade, deren sämtliche Punkte von den Geraden h_1 und h_2 in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen. Die mit M verbundenen Punkte der Ellipse bestimmen eine Kegelfläche, deren zwei Achsen die Winkelhalbierenden der beiden Erzeugenden (vgl. *1.3*) in der Verbindungsebene von h_1 und h_2 sind und die dritte Achse diese in Punkt M senkrecht schneidet.

Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis $\neq 1$ bestimmten Abständen liegen, ist also eine Kegelfläche.

Wird angesetzt, daß die sich schneidenden beiden Geraden h_1 und h_2 aufeinander senkrecht stehen, so decken sich die Achsen der durch die Punkte, die von diesen Geraden durch ein gegebenes Verhältnis bestimmte Abstände haben, gebildeten Kegelflächen entweder mit der Geraden h_1 oder mit h_2, je nach dem, welcher der beiden Geraden die Punkte näher liegen (Abb. 29).

2.42.2. Ist das Verhältnis der Abstände von den Geraden h_1 und h_2 gleich 1, befinden sich die von den sich schneidenden zwei Geraden gleich entfernten Punkte auf den winkelhalbierenden Ebenen dieser Geraden (Abb. 30).

Abb. 31 ist die gemeinsame Darstellung dreier entstehender geometrischer Örter, wo die Abstände der Punkte von h_1 und h_2 ein gegebenes Verhältnis < 1, $= 1$ bzw. > 1 haben.

2.43 Parallele Geraden. Gemäß Punkt *1.1* befinden sich die Punkte der Ebene, die von zwei Punkten derselben in durch das gleiche Verhältnis bestimmten Abständen liegen, auf einem Kreis.

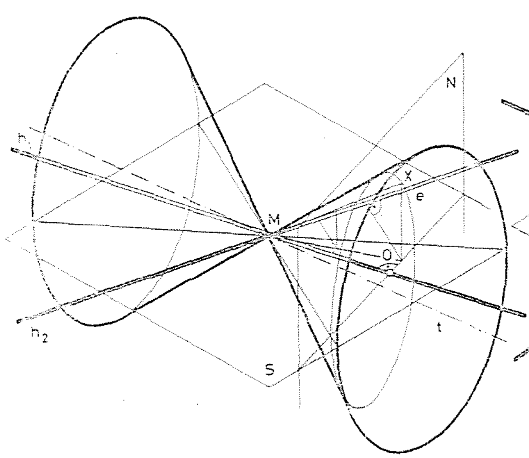

Abb. 28

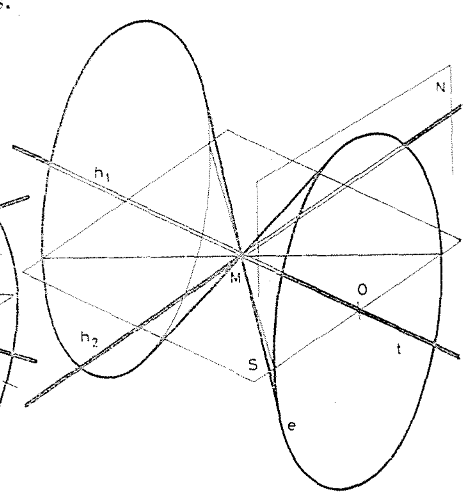

Abb. 29

2.43.1 In Abb. 32a bilden die Punkte der Ebene S, die von den Punkten 0 und Q durch ein gegebenes Verhältnis $\neq 1$ bestimmte Abstände haben, den Kreis k. Wird die Ebene S zu sich selbst parallel in senkrechter Richtung verschoben, so bewegen sich die Punkte 0 und Q auf den Geraden h_1 und h_2 und der Kreis k beschreibt einen auf S senkrechten Kreiszylinder. Da die Abstände von den parallelen Geraden in den auf sie senkrechten, zu S parallelen Ebenen gemessen werden, läßt sich feststellen, daß sich die Punkte des Raumes, die von zwei parallelen Geraden in durch ein gegebenes Verhältnis $\neq 1$ bestimmten Abständen liegen, auf der Fläche eines zu den Geraden parallelachsigen Rotationszylinders befinden.

2.43.2 Die von zwei parallelen Geraden gleich entfernten Punkte liegen in der den Abstand zwischen den beiden Geraden halbierenden Vertikalebene (Abb. 32b).

Wird das Verhältnis der Abstände von den Geraden fortlaufend geändert, erhält man immer weitere Rotationszylinder mit zu den Geraden paralleler Achse, die eine einzige elliptische Zylinderreihe bilden. Auch die Geraden h_1 und h_2 sind Glieder dieser Reihe, als Zylinder mit dem Radius gleich 0, sowie auch die den Abstand zwischen h_1 und h_2 halbierende Vertikalebene, die den Mantel eines Zylinders mit unendlich großem Radius darstellt.

In Abb. 33 sind einige Glieder dieser elliptischen Zylinderreihe dargestellt.

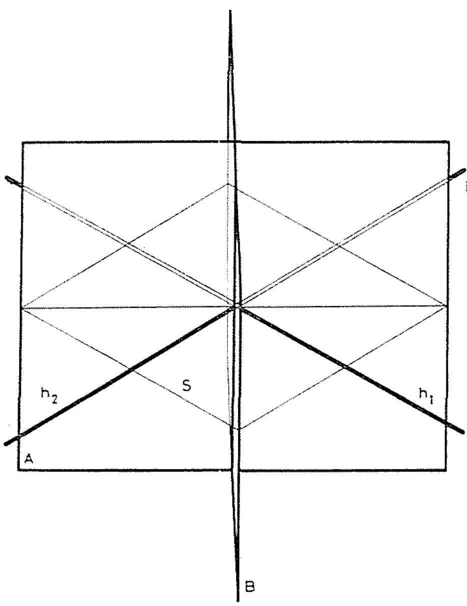

Abb. 30

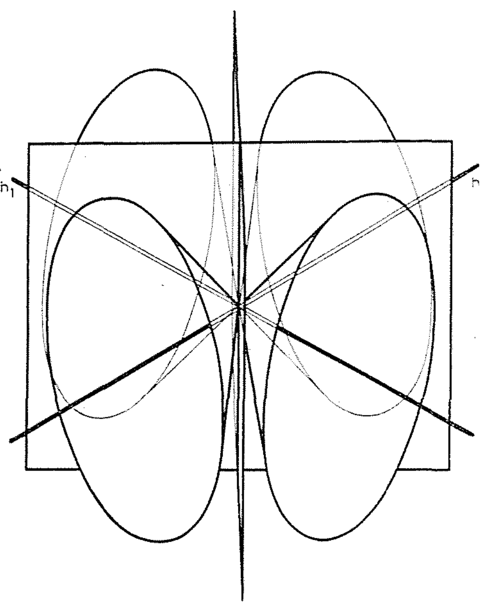

Abb. 31

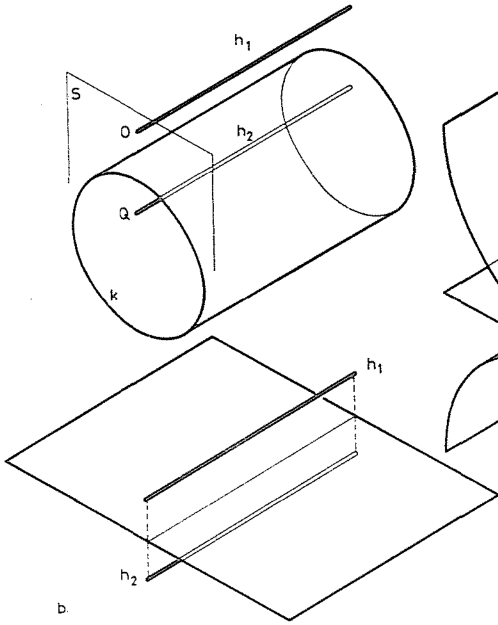

Abb. 32

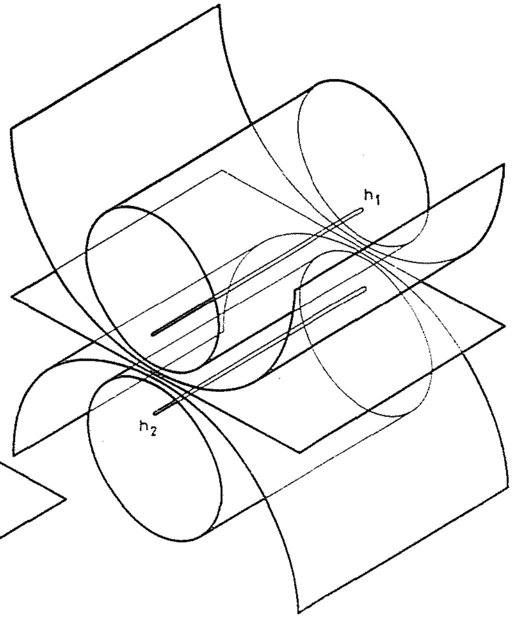

Abb. 33

2.5 Punkte des Raumes, die von einer Geraden und einer Ebene desselben in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen

2.51 Gerade und Ebene in allgemeiner Lage. In Abb. 34 ist der geometrische Ort der Punkte dargestellt, deren Abstände von einer Geraden und von einer Ebene in gegebenem Verhältnis < 1, $= 1$ bzw. > 1 sind.

In allen drei Fällen erhält man als geometrischen Ort Kegelflächen — schiefe Kreiskegel. Wird nämlich einem beliebigen Verhältnis m/n entsprechend um die Gerade h ein Rotationszylinder mit dem Radius m angesetzt und dieser mit einer parallelen Ebene in einem Abstand n von der gegebenen Ebene geschnitten, so wird der Schnitt eine Ellipse sein, da die Achse des Rotationszylinders nicht senkrecht auf die Schnittebene steht. Wird ein beliebiger Punkt der Ellipse mit Punkt M verbunden, erhält man eine Gerade, deren sämtliche Punkte von h und von S in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen. Die die Punkte der Ellipse mit M verbindenden Geraden bestimmen einen schiefen Kreiskegel, dessen sämtliche Punkte von h und von S in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen. Die Achsen des Kegels sind die Winkelhalbierenden der Kegelerzeugenden in der durch h gehenden, auf S senkrechten Ebene sowie die auf die Winkelhalbierenden in Punkt M senkrechte Gerade.

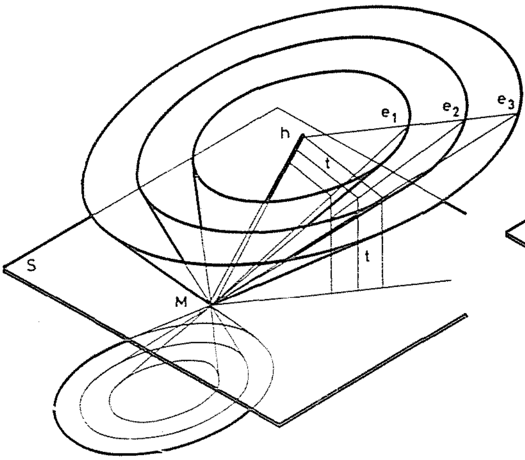

Abb. 34

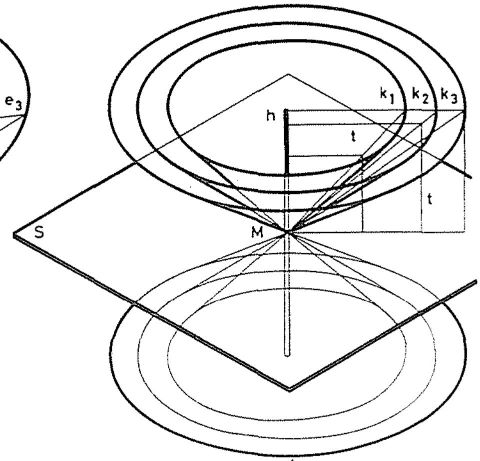

Abb. 35

Damit ist der geometrische Ort der Punkte, die von einer Geraden und einer Ebene von in bezug auf diese allgemeiner Lage in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, ein schiefer Kreiskegel.

2.52 Gerade und Ebene in senkrechter Lage. Stehen die Gerade und die Ebene aufeinander senkrecht, erhält man nach der vorstehenden Überlegung bei jedem Verhältnis wiederum eine Kegelfläche. Diese Kegel werden jedoch gerade Kreiskegel, Rotationskegel sein. Die zu der Ebene S parallelen Schnittebenen schneiden nämlich die Rotationszylinder mit auf sie senkrechter Achse h in Kreisen.

In Abb. 35 ist bei der Kegelfläche mit der Leitlinie k_1 das Verhältnis der Abstände von der Geraden h und von der Ebene S < 1, beim Kegel mit der Leitlinie k_2 ist das Verhältnis gleich 1 und damit der Konuswinkel 45°, und beim Kegel mit der Leitlinie k_3 ist das Verhältnis > 1.

2.53 Gerade und Ebene in paralleler Lage. Wie es in *1.2* gesagt wurde, befinden sich die Punkte der Ebene, die von einem Punkt und einer Geraden derselben in durch ein gegebenes Verhältnis < 1, gleich 1 bzw. > 1 bestimmten Abständen liegen, auf einer Ellipse, einer Parabel bzw. einer Hyperbel.

Wird diese Ebene in auf sie senkrechter Richtung parallel zu sich selbst verschoben, bestimmen der Punkt und die Gerade eine auf ihre Verbindungsebene senkrechte Gerade und Ebene. Die Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln in der ursprünglichen Ebene beschreiben elliptische, parabolische und hyperbolische Zylinder (Abb. 36, 37, 38). Da die Abstände von der entstandenen Geraden h in einer auf diese senkrechten Ebene gemessen werden, die zugleich

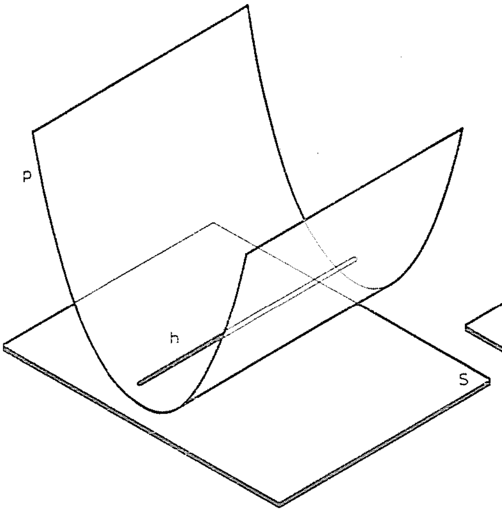

Abb. 36

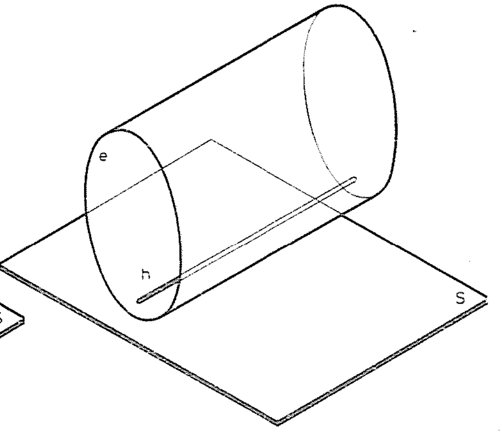

Abb. 37

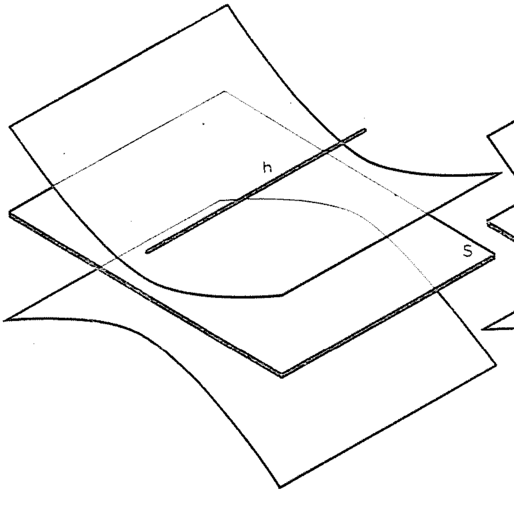

Abb. 38

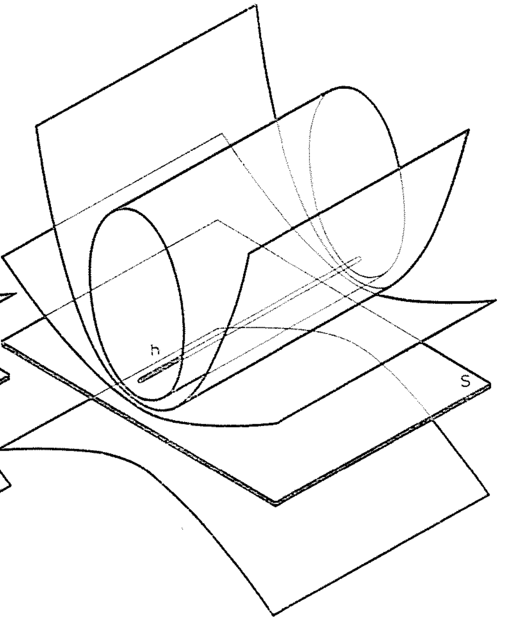

Abb. 39

parallel zur ursprünglichen Ebene ist, bleibt das Verhältnis der Abstände in der ursprünglichen Ebene unverändert. Daher gilt für sämtliche Punkte der entstandenen Zylinderflächen, daß ihre Abstände von den zu den Zylinderflächen parallelen h und S in einem ständigen Verhältnis stehen.

In Abb. 36 liegen sämtliche Punkte der Fläche des elliptischen Zylinders von der Geraden und der Ebene in durch ein gegebenes Verhältnis < 1 bestimmten Abständen.

Da die Punkte in Abb. 37 von der Geraden und von der Ebene in gleichem Abstand sind, liegen sie auf der Fläche eines parabolischen Zylinders.

In Abb. 38 ist das Verhältnis der Abstände der Punkte von der Geraden und der Ebene größer als 1, daher werden ihre geometrischen Örter die Fläche eines hyperbolischen Zylinders bestimmen.

In Abb. 39 sind die Zylinderflächen für die drei Fälle zusammen dargestellt.

Daher befinden sich die geometrischen Örter sämtlicher Punkte, die von einer Geraden und einer zu dieser parallelen Ebene in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, auf einer zur Geraden parallelen Zylinderfläche zweiter Ordnung. Je nachdem, ob das Verhältnis der Abstände der Punkte von der Geraden und von der Ebene < 1, gleich 1 bzw. > 1 ist, wird der ermittelte geometrische Ort auf der Fläche eines elliptischen, parabolischen bzw. hyperbolischen Zylinders liegen.

Liegt die Gerade h auf der Ebene S und ist das Verhältnis der Abstände von diesen gleich 1, bilden die gesuchten Punkte eine durch h auf S senkrechte Ebene (Abb. 40). Ist aber das Verhältnis der Abstände > 1, liegen die gesuchten Punkte in zwei Ebenen, die auf h liegen und gleiche Winkel mit S bilden (vgl. Abb. 7).

2.6 Punkte, die von zwei Ebenen durch ein gegebenes Verhältnis bestimmte Abstände haben

Werden die Feststellungen in *1.3* auf den Raum ausgedehnt, so befinden sich die Punkte, die von den sich schneidenden Ebenen A und B in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, auf zwei anderen Ebenen, die sich in der Schnittlinie der vorgegebenen Ebenen A und B schneiden. Sind die Punkte von den beiden Ebenen gleich entfernt, so bestimmen sie die Winkelhalbierungsebenen der Ebenen A und B (Abb. 41). Die verschiedenen Verhältniswerten entsprechenden Ebenenpaare bilden ein einziges Ebenenbüschel mit der Schnittlinie der Ebenen A und B als gemeinsame Schnittlinie.

Sind die Ebenen A und B parallel zueinander, d. h. liegt ihre Schnittlinie im Unendlichen, so schneiden sich auch die verschiedenen Abstandsverhältniswerten entsprechenden Ebenenpaare in einer unendlich fernen Schnittlinie und werden daher zu den Ebenen A und B parallel sein. In Abb. 42 ist dieser

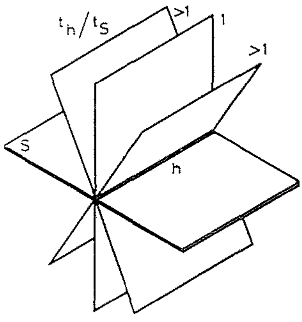

Abb. 40

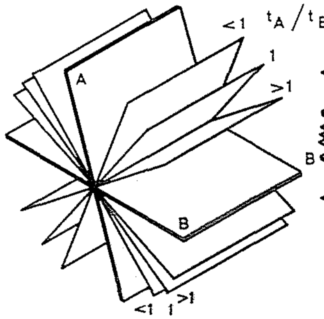

Abb. 41

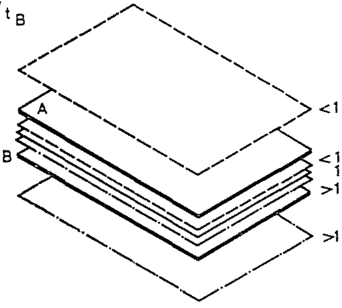

Abb. 42

Fall mit den drei unterschiedlichen Verhältnissen entsprechenden Ebenenpaaren dargestellt. Es ist zu bemerken, daß das eine Glied des Ebenenpaares der von den beiden Ebenen gleich entfernten Punkte, den Abstand der Ebenen A und B im Endlichen halbiert. Das andere Glied dieses Ebenenpaares liegt parallel zu den Ebenen A und B im Unendlichen.

Zusammenfassung

Es wird der geometrische Ort der Punkte angeführt, die von zwei Elementen der Ebene durch das gleiche Verhältnis bestimmte Abstände haben. Im weiteren wird dies auf die geometrischen Örter der Punkte ausgedehnt, die von zwei verschiedenen Elementen des Raumes in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegen, und es wird gezeigt, daß alle diese geometrischen Örter Flächen zweiter Ordnung sind. So sind Kegel, Zylinder, Kugel, Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid alle Flächen, die von zwei Raumelementen in durch ein gegebenes Verhältnis bestimmten Abständen liegende Punkte enthalten.

Die Kenntnis dieser Flächen ist für die konstruktive Photogrammetrie von großer Bedeutung, da diese oft erforderlich sind, um die Daten der inneren Orientierung aus Photoaufnahmen zu ermitteln.

Oberassistent Antal Horn, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. Ungarn