МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ВОПРОСАХ АНАЛИЗА ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

А. ЗЕЛЬД—И. ПАЛОЦ*

Институт Строительных Конструкций и Инженерных Оборудований зданий Будапештского Технического Университета

(Поступило: 10 сентября 1973 г.)

Представлено: проф. д-р Л. Габор

1. Введение

Среди конкретных задач часто встречаются такие, что требуется определить распределение какой-то интенсивности, токи какой-то экстенсивности. В самом деле, расчет гидравлического режима отопительной и вентиляционной системы, расчет воздушного режима зданий, расчет электрических сетей и т. д. тоже принадлежат к этому типу. В части случаев объект заранее представляет собой сеть. В других случаях в методе решения часто пользуются «теоретическими» сетями, конечными шагами, приспособляемыми к реальному объекту.

Ниже дается общий метод решения этих задач, применяемый на ЭВМ. С точки зрения математической модели эти задачи представляют собой экстремальные задачи на графах. Поэтому сначала будут рассмотрены основные определения и понятия теории графов и сетей, которые потребуются в дальнейшем.

2. Основные определения

Определение. Графом называется совокупность множества N и множества A, в которой каждому «a» $\in A$ поставлена (упорядоченная) пара x_i и x_j. Элементы множества N называются обычно вершинами графа, а элементы множества A — дугами графа, так, что граф однозначно определен множеством вершин и множеством дуг.

Если из того, что $(x_i, x_j) \in A$ следует, что $(x_j, x_i) \in A$, тогда дуги не имеют ориентации и называются ребрами. Если каждой дуге сопоставлена *упорядоченная* пара величин, это соответствует заданию определенной ориентации дуги: x_i называется началом, x_j концом дуги.

Определение. Граф называется конечным, если оба множества N и A конечны.

Определение. Путем в графе называется последовательность дуг, конец каждой из которых совпадает с началом предыдущей.

Определение. Контуром в графе называется конечный путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной.

* Вычислительный центр Государственного планового управления.

Определение. Цепью называется последовательность ребер, в которой у каждого ребра одна из граничных вершин является граничной для предыдущего ребра, а другая — граничной для последующего.

Определение. Циклом называется конечная цепь, начало и конец которой совпадают.

Определение. Граф называется сильно связанным, если любые две его вершины x_i и x_j можно соединить путем, идущим из x_i в x_j.

Определение. Граф называется связным, если любые две вершины его можно соединить цепью. (Граф может быть связным, но не сильно связным.)

Определение. Если вершинам x_i и x_j сопоставлены две или больше дуг, дуга (x_i, x_j) называется кратной.

Определение. Узлом называется дуга, если $x_i \equiv x_j$.

Определение. Диграфом называется граф, в котором нет ребра, кратной дуги и узла.

Определение. Граф называется полным, если к каждой вершине сопоставлены все возможные дуги.

Определение. Пусть $R \subseteq N$. Тогда (x_i, x_j)

— заходит в множество R, если $x_j \in R$, x_i

— исходит из множества R, если $x_j \in R$, $x_i \overline{\in}_v R$

и множество дуг, заходящих в R, обозначается через A_R^+, множество дуг, исходящих из R, обозначается через A_R^-.

Определение. Сетью называется граф, вершинам которого поставлены функции z_i^k и (или) дугам поставлены функции $w_{i,j}^k$, областью определения которых является множество вершин или дуг.

Конкретные значения этих чисел в зависимости от характера конкретной задачи могут быть: интенсивность, потенциал, ток какой-то экстенсивности, распределение какой-то интенсивности, пропускная способность, коэффициент проводимости, расход транспорта и т. д. Сеть обозначается вообще через $(N, A, k, \ldots)$, где N — множество вершин, A — множество дуг, k и эвентуальные другие обозначения — функции на дугах и вершинах.

Определение. Граф $[N, A]$ превращается в сеть, если каждой вершине d_i поставить в соответствие число, называемое интенсивностью вершины, а каждой дуге (x_i, x_j) неотрицательное число $k_{i,j}$, называемое пропускной способностью дуги. Рассматриваемая сеть допускает однородный поток, если найдутся такие числа $f_{i,j}$, где x_i и $x_j \in N$, что

$$\begin{gathered}
\sum_{x_j \in A_i^+} f_{i,j} - \sum_{x_j \in A_i^-} f_{i,j} = d_i \; \forall i \in N \\
0 \leqq f_{i,j} \leqq k_{i,j} \\
A_i^+ = \{x_j, (x_i, x_j) \in A\} \\
A_i^- = \{x_j, (x_j, x_i) \in A\}
\end{gathered} \tag{1}$$

Функция $f_{i,j}$, определенная на A и удовлетворяющая условиям (1), называется однородным потоком в сети. Уравнение (1) является уравнением непрерывности, отражающим тот факт, что для любой вершины разность между величинами вытекающего и втекающего потока равняется интенсивности вершины x_i.

Определение. Поток насыщает дугу, если $f_{i,j} = k_{i,j}$. Поток называется допустимым, если $0 \leqq f_{i,j} \leqq k_{i,j}$.

Если $d_i > 0$, x_i называется источником, если $d_i < 0$, — стоком, если $d_i = 0$, — нейтральной вершиной.

В рамках этой работы рассматриваются только однородные потоки.

Определение. Пусть $[N, A]$ диграф и $N = S \cup S'$, где S и S' непустые подмножества и $S \cap S' = \varnothing$. Пусть $[S, S']$ множества дуг, исходящих из S и заходящих в S'. Множество $[S, S']$ называется разрезом. Если $s \in S$ и $s' \in S'$, тогда разрез $[S, S']$ отделяет вершины s и s'.

Определение. Пусть $[S, S']$ разрез. Тогда $k(S, S') = \sum\limits_{\substack{i \in S \\ j \in S'}} k_{i,j}$ называется пропускной способностью разреза.

Определение. Поток направляется из s в s', если s — источник, s' — сток, а остальные вершины нейтральные. $f(s, N)$ называется значением потока; если $f(s, N)$ максимальное, поток называется максимальным потоком.

Теорема. Поток не превышает пропускной способности разреза, т. е.

$$f(s, N) \leqq k(S, S') \, .$$

Теорема. Существует разрез $[S, S']$, отделяющий s и s' и $\bar{f}$ поток, направленный из s в s', что

$$\bar{f} = k(S, S')$$

Поток $\bar{f}$ является максимальным. Он насыщает дуги $[S, S']$ и равняется 0 на дугах $[S', S]$. (Теорема Форда — Фалкерсона: максимальный поток $\bar{f}$ существует потому, что $\bar{f}$ целочисленный и ограничен.)

Теорема. Для того чтобы существовал допустимый поток, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $I \subseteq N$ выполнялись условия

$$d(I) \leqq k(I, \bar{I})$$

$$d(N) = 0$$

3. Нелинейная сетевая задача

3.1. Формулирование задачи

В этой главе рассматриваются задачи, в которых требуется определить оптимальный поток, минимизирующий нелинейный функционал цели $\sum\limits_{i,j} c_{i,j}(f_{i,j})$, областью определения которой является поток. (Задачи минимизации можно заменить минимизацией того же функционала с обратным знаком.)

3.2. Условия существования оптимального потока

Рассматриваем случай, когда функции $c_{i,j}(f_{i,j})$ выпуклы вниз, т. е. когда для произвольных неотрицательных чисел x_1 и x_2 справедливо неравенство

$$c_{i,j}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqq \lambda c_{i,j}(x_1) + (1-\lambda)c_{i,j}(x_2)\,, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

Это условие справедливо для каждой изучаемой конкретной задачи.

Известно, что выпуклая вниз функция одной переменной $f(x)$ при значении $x = \bar{x}$ имеет минимум тогда и только тогда, если

$$\text{или} \quad f^+(\bar{x}) \geqq 0, \quad f^-(\bar{x}) \leqq 0, \quad x > 0$$

$$\text{или} \quad f^+(\bar{x}) \geqq 0, \quad x = 0$$

где $f^+(x)$ — правая производная

$$f^+(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

$f^-(x)$ — левая производная

$$f^-(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x) - f(x-\delta)}{\delta}$$

Число тех значений x, при которых $f^+(x) \neq f^-(x)$, может быть конечным или счетным. Эти значения x являются критическими значениями.

Теорема. Поток $f_{i,j}$ оптимален тогда и только тогда, если для каждой вершины $x_i \in N$ существует такое число P, что

$$\begin{aligned} P_j - P_i &\leqq c^+_{i,j}(f_{i,j}), \quad \text{если } f_{i,j} = 0 \\ c^-_{i,j}(f_{i,j}) \leqq P_j - P_i &\leqq c^+_{i,j}(f_{i,j}), \quad \text{если } f_{i,j} > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Роль x_i и x_j можно заменить, условия можно написать и следующим образом:

$$\begin{aligned} P'_i - P'_j &\leqq c^+_{i,j}(f_{i,j}), \quad \text{если } f_{i,j} = 0 \\ c^-_{i,j}(f_{i'j}) \leqq P'_i - P'_j &\leqq c^+_{i,j}(f_{i'j}), \quad \text{если } f_{i,j} > 0 \end{aligned} \tag{2'}$$

Обе формы условий однозначны. Выбор формы зависит от характера задачи, от конкретного «содержания» значения P (потенциал, стоимость и т. п.).

Доказательство

Достаточность. Пусть функции потока $f_{i,j}$ и потенциала P_i удовлетворяют условиям (2). Покажем, что поток оптимальный.

$$\sum_{i,j} c_{i,j}(\bar{f}_{i,j}) = \sum_{i,j} c_{i,j}(\bar{f}_{i,j}) + \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i \left(\sum_j \bar{f}_{i,j} - \sum_j \bar{f}_{j,i} - d_i\right)$$

$$\sum_{i,j} c_{i,j}(\bar{f}_{i,j}) = \sum \{c_{i,j}(_{i,j}) + (\bar{P}_i - \bar{P}_j)\bar{f}_{i,j}\} - \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i\, d_i \tag{3}$$

$$c^{-}_{i,j}(x) = c^{+}_{i,j}(x) = P_i - P_j$$

Из удовлетворения условий леммы следует, что она принимает наименьшее значение в точке $\bar{f}_{i,j}$. Следовательно, первое слагаемое в правой части равенства (3) принимает наименьшее значение, а поэтому и левая часть этого равенства минимальна, что и требовалось доказать.

Необходимость. Пусть поток $\bar{f}_{i,j}$ — оптимальный. Построим потенциалы, удовлетворяющие условиям теоремы. Обозначим через A_f множество $\{(x_i,x_j)/f(x_i, x_j) > 0\}$, $A_f \subseteq A$. Сперва предположим, что определенный через A_f неориентированный граф связный. Возьмем произвольную вершину x_0 и положим $P(x_0) = 0$. Обозначим через S_0 множество вершин, в которых значение потенциала уже определено.

$$S_0 = \{x_0\}$$

Предположим, что для вершины x_1

$$(x_0, x_1) \in A_f \quad \text{или} \quad (x_1, x_0) \in A_f$$

Пусть значение $P(x_1)$ определяется равенством

$$P(x_0) - P(x_1) = c'_{0,1}(\bar{f}(x_0, x_1))$$

или

$$P(x_1) - P(x_0) = c'_{1,0}(\bar{f}(x_1, x_0))$$

в зависимости от ориентации дуги. Следовательно,

$$S_1 = \{x_0, x_1\}\,.$$

Аналогично построим и потенциал в вершинах $x_2, x_3, \ldots$ и т. д. В силу связности графа таким образом в каждой вершине определяется значение $P(x_i)$.

(Замечание: Если значение потенциала какой-то вершины может быть определено по нескольким дугам, одна из этих выбирается произвольно.)

Проверим, что так построенные значения потенциалов удовлетворяют условиям теоремы. Пусть $(x_i, x_j) \in A$ и $\bar{f}(x_i, x_j) > 0$. Если предположим, что $P(x_i) - P(x_j) > c'_{ij}(\bar{f}_{ij})$, поток $\bar{f}$ не был бы оптимальным. Рассматриваем цепи

$$\begin{array}{ll} L_{x_i}(x_0, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_i) & L_{x_j}(x_0, x_{j_1} \ldots x_j), \\ L(x_0, x_{i_1} \ldots x_i, x_j \ldots x_0) & \text{и функцию} \\ f^*_{n,m} = \bar{f}_{n,m} + \varepsilon & \text{при } (x_n, x_m) \in L^+ \\ f^*_{n,m} = f_{n,m} - \varepsilon & \text{при } (x_n, x_m) \in L^- \\ f^*_{n,m} = f_{n,m} & \text{при } (x_n, x_m) \bar{\in} L^+ \cup L^- \end{array}$$

где $\varepsilon > 0$, и такого, что $f^* \geqq 0$.

Очевидно, f^* есть допускаемый поток.

Если значение ε таково, что $f^*_{ij} \geqq 0$, то $f^*_{i,j}$ является потоком; причем более выгодным, чем $\bar{f}_{ij}$.

Действительно, значение функционала цели при $\bar{f}_{i,j}$ отличается от функционала цели при $f^*_{i,j}$ на величину

$$\Delta = \sum_{L^+} \big(c_{ij}(\bar{f}_{i,j}) - c_{ij}(f_{i,j} + \varepsilon)\big) + \sum_{L^-} \big(c_{ij}(\bar{f}_{ij}) - c_{ij}(f_{ij} - \varepsilon)\big) = \varepsilon\big(- \sum_{L^+} c'_{ij}(\bar{f}_{ij}) +$$

$$+ \sum_{L^-} c'^{-}_{ij}(\bar{f}_{ij}) + o(\varepsilon) = \varepsilon(P_{i0} - P_{i,1} + P_{i,1} - \ldots - P_s + c'_{st}(f_{st}) + P_t - \ldots -$$

$$- P_{i0}) + o(\varepsilon) = \varepsilon\big(P_s - P_t - c'_{st}(f_{st})\big) + o(\varepsilon)$$

Имея в виду, что

$$c_{st}(f_{st}) - P(t) + P(s) > 0$$
$$(s, t) \in L^+$$

Таким образом

$$\begin{array}{ll} P(s) - P(t) > c'_{st}(f_{s,t}), & f(s, t) > 0 \\ P(s) - P(t) > c^-_{s,t}(0), & f(s, t) = 0 \\ P(s) - P(t) > c^+_{s,t}(0) & \forall\ f(s, t) \geqq 0 \end{array}$$

что противоречит оптимальности $\bar{f}_{i,j}$. Потому что $(x_i, x_j) \in L^+$, очевидно, что $P_{(x_i)} - P_{(x_j)} > c^+_{i,j}(0)$, $\forall\ (x_i, x_j)$, где $f(x_i, x_j) \geqq 0$. Если предположить, что $P(x_i) - P(x_j) < c'_{i,j}(\bar{f}_{ij})$, то необходимо рассмотреть аналогичную функцию

$$\begin{array}{ll} f^*_{n,m} = \bar{f}_{n,m} - \varepsilon & (x_n, x_m) \in L^+ \\ f^*_{n,m} = \bar{f}_{n,m} + \varepsilon & (x_n, x_m) \in L^- \\ f^*_{n,m} = \bar{f}_{n,m} & (x_n\ x_m) \bar{\in} L^+ \cup L^-. \end{array}$$

Теперь рассмотрим несвязный граф $[N, A_j]$. В этом случае множество N состоит из подмножеств $N_1, \ldots N_R$. Обозначим последовательность подмножеств индексами $1, 2, \ldots$ Пусть — $N(x)$ является функцией целого значения, областью определения которой является x, где $N(x) = i$, если $x \in N_i$. Значение потенциала P определяется вышесказанным методом в каждом подмножестве. Если $(x_i, x_j) \in A$, $x_i \in N_i$, $x_j \in N_j$, $i \neq j$, тогда $f(x_i, x_j) = 0$. Покажем, что существуют значения потенциала P^*, что увеличив потенциалы P на P^* условия теоремы удовлетворяются и для дуг, соединяющих подмножества. Очевидно, что увеличением P условия теоремы остаются справедливыми для дуг, соединяющих вершины одного и того же подмножества. Следовательно, надо найти значения P, удовлетворяющие условию.

$$P(x_i) + P^*_{N(xi)} - [P(x_j) + P^*_{N(xj)}] \leqq L^+(0) \quad \forall\ (x_i, x_j)$$

Введем значение

$$\bar{c}_{i,j}(x_i, x_j) = L^+(c) - P(x_i) + P(x_j)\ .$$

Определим

$$\begin{aligned} P^*_{N(xi)} - P^*_{N(xj)} \leqq \bar{c}_{ij}(x_i, x_j) \quad & \forall\ (x_i, x_j) \in A \\ & x_i \in N_i\ ,\ x_j \in N_j \\ & N_i \neq N_j \end{aligned}$$

Чтобы существовало P^*, необходимо и достаточно

$$\Sigma\bar{c}_{ij}(x_i, x\ ) \geqq 0 \quad \forall\ L$$

что следует из оптимальности $\bar{f}$, иначе можно было бы найти более выгодный поток при помощи

$$\Sigma\bar{c}_{i,j}(x_i, x_j) < 0.$$

3.3. Примеры нелинейной задачи

Большинство задач строительной теплофизики характеризуется тем, что требуется определить распределение какой-то интенсивности, токи какой-то экстенсивности. В этих задачах реальный объект является системой. (Система: конечное количество вещества, окружаемое закрытой поверхностью. Последняя может быть реальная и нереальная). Каждая система, имеющая возможность обмениваться энергией с нашей системой, является окружностью. Вследствие разницы интенсивностей системы и окружности изменяется значение экстенсивностей системы. Для элементарного объема равенство баланса «к-ой» экстенсивности:

$$\frac{dx_j}{d\tau} = Q_j^k(\tau) - I_j^k(\tau)$$

где: Q_j^k — интенсивность стоков и источников, находящихся в «j-ом» элементарном объеме;

I_j^k — разница заходящих и исходящих потоков;

x_j^k — значение экстенсивности, принадлежащей к «j-ому» элементарному объему;

τ — время.

Поток экстенсивности между двумя элементарными объемами i и j определяется распределением y^k интенсивности и законом проводимости.

$$\frac{dx^k_{i,j}}{d\tau} = V^k(y^k_i, y^k_j)$$

В зависимости от конкретной задачи равенство баланса или интегральное, или дифференциальное. В первом случае сама система имеет 0-дименсию. Во втором случае требуется определить и локальные значения внутри системы. В последнем случае пользуясь численным методом приспособляем конечную сеть к объекту. «Элементарные» объемы представим в виде вершин, а поверхность их — возможные связи между «элементарными» объектами — в виде дуг сети. В первом случае сама система представляет собой вершину, и связи между системами — дуги.

Часто встречаются и такие задачи (напр., при расчете трубопроводов), когда сам реальный объект состоит из дуг (проводы) и вершин (устройства, разделение проводов и т. д.).

Наглядно видно, что вышесказанное изображение реального объекта — совокупность вершин и дуг — представляет собой граф, который превращается в сеть, если вершинам поставлены функции потенциала, функции интенсивности источников и стоков, а дугам — функции потока, закон проводимости. Таким образом, для численного решения этих задач целесообразно пользоваться быстродействующими сетевыми методами. При помощи этих методов можно отыскать какой-то поток, минимизирующий какой-то нелинейный функционал цели. В конкретных задачах надо найти распределение интенсивностей и поток экстенсивностей, обеспечивающие баланс системы. Баланс системы характеризуется каким-то функционалом цели, экстремум которого соответствует равновесию.

Чтобы значения функции на дугах и вершинах были решением, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

а) Первый закон Кирхгофа. Токи ветвей должны удовлетворять условию непрерывности в узлах:

$$\sum_j f_{ij} - \sum_i f_{j,i} = d_i \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$f_{i,j} \geqq 0$$

$$(i, j) \in A$$

б) Второй закон Кирхгофа. Разность потенциалов узлов, соединенных данной ветвью, должна быть равна напряжению этой ветви, т. е. должно выполняться соотношение

$$P_i - P_j = E_{i,j} \tag{4}$$

что эквивалентно следующему требованию. Пусть μ — произвольный цикл. Обозначим через $A^+\mu$ множество дуг μ, направленных в сторону обхода цикла, а через $A^-\mu$ множество дуг противоположного направления. Тогда для любого цикла

$$\sum_{(i,j)\in A^+\mu} E_{i,j} - \sum_{(i,j)\in A^-\mu} E_{i,j} = 0 \tag{5}$$

где $E_{i,j}$ — разность потенциалов. Очевидно, из (4) следует (5) и наоборот.

в) Соотношение между током и разностью потенциалов каждой ветви должно удовлетворять законам проводимости:

$$f_{i,j} = V_{i,j}(P_i - P_j) \tag{6}$$

В дальнейшем, имея в виду связь между проводимостью и сопротивлением, используем и закон сопротивления и вместо (6) принимаем уравнение

$$P_i - P_j = R_{i,j}(f_{i,j}, P_i, P_j) \tag{7}$$

Если бы к ветвям были подведены генераторы потенциала, из (7) получим:

$$P_i - P_j = R_{i,j}(f_{i,j}, P_i, P_j) - e_{i,j}\,. \tag{8}$$

Следует отметить, что, согласно (4), за направление тока принято направление движения от большего потенциала к меньшему.

По условиям оптимальности, предполагая, что функция непрерывная во всей области определения, (за исключением, быть может, границы) и дифференцируемая:

$$P_i - P_j = c'_{ij}(f_{i,j}), \qquad \text{если} \qquad f_{i,j} > 0$$

Обозначим:

$$c'_{i,j}(f_{i,j}) = R_{i,j}(f_{i,j})$$

Из этого следует, что

$$\Sigma\, c_{i,j}(f_{i,j}) = \Sigma \int R_{i,j}(f_{i,j})df \tag{9}$$

и оптимальный поток минимизирует функционал цели

$$\Sigma \int R_{i,j}(f_{i,j})df = \min$$

Определение оптимального потока равносильно определению равновесия системы. Равновесие системы является оптимумом в том наглядном смысле, что к равновесию принадлежит минимум работы, уделяемой потоком экстенсивности для преодоления сопротивления.

Надо подчеркнуть, что — согласно с ограничением — функционал цели (9) строго возрастающий, что соответствует реальным законам проводимости.

Конкретные задачи отличаются с точки зрения закона проводимости и с точки зрения искомых и фиксированных значений.

3.4. Типы задач с точки зрения закона проводимости

Коэффициент проводимости постоянный, закон проводимости линейный

В этом случае уравнение (6) имеет вид

$$f_{i,j} = V_{i,j} \cdot (P_i - P_j) \tag{10}$$

и уравнение (7)

$$P_i - P_j = R_{i,j} \cdot f_{i,j} \tag{11}$$

Функционал цели принимает вид

$$\frac{1}{2} \Sigma R_{i,j} f_{i,j}^2 \tag{12}$$

Оптимальный поток минимизирует функционал цели, что соответствует наименьшей диссипационной работе.

Отметим, что постоянный коэффициент проводимости или сопротивления в большинстве случаев является упрощением действительных условий, однако в определенном интервале это упрощение можно принимать.

Коэффициент проводимости постоянный, закон проводимости нелинейный

Соотношения между величиной потока $\bar{f}_{i,j}$ и напряжением $E_{i,j}$ в общем случае имеют более общий вид $E_{i,j} = \psi_{i,j}(f_{i,j})$. Если при этом функции $\psi_{i,j}(f_{i,j})$ строго возрастающие, что справедливо для конкретных задач, то распределение тока в сети будет таким и только таким, при котором минимизируемая величина

$$\sum_{i,j} \int_0^{f_{i,j}} \psi_{i,j}(f)\, df$$

поскольку функции $\int_0^f \psi_{i,j}(f) df$ являются строго выпуклыми.

Коэффициент проводимости является функцией потенциала

В этом случае коэффициент проводимости изменяется в зависимости от значений потенциалов вершин, определяющих дугу. (Такой закон справедлив напр., для теплопроводности, для теплопередачи.) В общем случае коэффициент проводимости является функцией абсолютных значений потенциалов, иногда можно принимать, что он изменяется только в зависимости от разницы потенциалов, независимо от абсолютного значения.

Закон проводимости имеет вид

$$f_{i,j} = V_{i,j}(P_i - P_j) \tag{13}$$

или

$$P_i - P_j = sg(f_{i,j})R_{i,j} \mid f \mid^{\frac{1}{1+n}}$$

где

$$V_{i,j} = K(P_i - P_j)^n \tag{14}$$

В конкретных задачах n — положительное число, поэтому закон сопротивления (7) является строго возрастающей функцией и функционал цели — выпуклый вниз.

Коэффициент проводимости является функцией потока

В практических случаях закон проводимости изменяется в зависимости от значения потока. Для каждой дуги — в зависимости от физических параметров дуги — можно определить значение потока $f^*_{i,j}$, что закон проводимости является линейным, если $f_{i,j} < f^*_{i,j}$, и квадратичным, если $f_{i,j} \geq f^*_{i,j}$. Поэтому уравнение (7) превращается в систему уравнений, имеющую следующий вид:

$$\begin{aligned} P_i - P_j &= k'_{i,j} \mid f \mid, \quad \text{если} \quad f_{i,j} < f^*_{i,j} \\ P_i - P_j &= k''_{i,j} \mid f_{i,j} \mid^{\frac{1}{2}} \quad \text{если} \quad f_{i,j} \geq f^*_{i,j} \\ P_i - P_j &= k'_{i,j} f^*_{i,j} = k''_{i,j} f^{*\frac{1}{2}}_{i,j} \end{aligned} \tag{15}$$

Закон сопротивления является строго возрастающей функцией, поэтому функционал цели — строго выпуклый вниз.

3.5. Типы задач с точки зрения искомых и фиксированных значений

Задача Дирихле

Для вершин $x_j \in N$ фиксированы значения интенсивности вершин d_i, для дуги известны строго возрастающие законы сопротивления $P_i - P_j = R_{i,j}(f_{ij})$. Требуется определить оптимальный поток и распределение потенциалов P_i.

Задача Дирихле-Неймана

Для вершин $x_j \in N', N' \subseteq N$ фиксированы значения потенциалов P_i, для вершин $x_i \in N'', N'' = N/N'$ фиксированы значения интенсивности вершин d_i, для дуги известны строго возрастающие законы сопротивления $P_i - P_j = R_{i,j}(f_{i,j})$. Требуется определить оптимальный поток, значения потенциалов P_i и значения интенсивностей d_j.

Пусть A является множеством вершин x_i, в которых значение потенциала фиксировано, а значение интенсивности неизвестно. Введем фиктивную вершину $i = 0$ и ребра (x_0, x_j), где $x_j \in A$. Положим

$$d_0 = \sum_{i \in A} d_i\,, \quad P_0 = 0\,, \quad c_{0,j}(x) = c_{j,0}(-x) = -P_j(x)$$

Тогда из необходимых и достаточных условий оптимальности следует, что по закону сопротивления

$$P_i - P_j = R_{i,j} f_{i,j}$$

оптимальный поток минимизирует функционал цели

$$\sum_{i,j} \int_0^{x_{ij}} \psi_{i,j}(z)dz - \sum_{j \in A} P_j(x_{0,j} - x_{j,0})$$

4. Метод решения задачи Дирихле-Неймана

4.1. Формулирование задачи с линейным законом проводимости

Пусть $[N, A]$ граф, с ребрами (с дугами без ориентации). К каждому ребру (каждой дуге) поставлены постоянные коэффициенты $v_{i,j} > 0$ при условии $v_{i,j} = v_{j,i}$. Для множества вершин $N_R \subset N$ фиксированы значения потенциалов $P(x_i)\ \forall\ x_i \in N_R$. Требуется определить значения потенциалов $\widetilde{P}(x_i)$, $x_i \in N$ и поток $f(x_i, x_j)$, $(x_i, x_j) \in A$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $\widetilde{P}(x_i) = P(x_i)\,, \quad \forall\ x_i \in N_R$

б) $v_{i,j}(P(x_i) - P(x_j)) = f(x_i, x_j)$

в) $I(x_j) = \Sigma f(x_i, x_j) = 0 \quad x_i \overline{\in} N_R\,,\ x_j \in N$

Значение $f(x_i x_j)$ представляет собой поток, но вследствие того, что (x_i, x_j) является ребром, может быть и отрицательным, в зависимости от значений потенциалов $P(x_i)$ и $P(x_j)$.

Эта задача равносильна определению оптимального потока.

Обозначим через $\quad P_{\text{макс}} = \max\limits_{x_i \in N_R} P(x_i)$

через $\quad P_{\text{мин}} = \min\limits_{x_i \in N_R} P(x_i)$

Очевидно, что если $\widetilde{P}(x_i)$ и $\widetilde{f}(x_i, x_j)$ являются решением задачи, тогда

$$P_{\text{мин}} \leqq \widetilde{P}(x_i) \leqq P_{\text{макс}} \ \forall \ x_i \in N$$

потому, что если $P(x_i) < P_{\text{мин}}$, $x_j \overline{\in} N_R$, тогда, — предполагая, что $\widetilde{P}(x_j)$ является минимальным, — $\forall \ x_j \in N$, для которого $(x_i, x_j) \in A$, по условию в) $\widetilde{P}(x_j) = \widetilde{P}(x_i)$. Имея в виду, что граф связанный, по условию в) через конечное число шагов получим вершину $x^* \in N_R$, для которого действуют уравнения:

$$P(x^*) = P(x_j) \, ,$$

$$P(x^*) \geqq P_{\text{мин}}$$

что является противоречием.

Из вышесказанных следует, что если $P_{\text{мин}} < \text{P}_{\text{макс}}$, тогда

$$P_{\text{мин}} < \widetilde{P}(x_i) < P_{\text{макс}} \ \forall \ x_i \ \overline{\in} N_R$$

Рассматриваем любые функции потенциала и потока $P(x_i)$ и $f(x_i, x_j)$, связанные по условию б). Пусть каждая такая пара функций отождествлена с точками $\{| N | + | A |\}$ — мерного евклидова пространства:

$$\big(P(x_1), \ldots P(x_n), \ f(a_1), \ldots f(a_m)\big)$$

Рассматриваем векторы, удовлетворяющие условиям а) и б) и условию:

$$P_{\text{мин}} \leqq P(x_j) \leqq P_{\text{макс}}$$

Совокупность этих же векторов является граничной закрытой и выпуклой, поэтому непрерывная функция

$$\Big| \sum_{x_i \overline{\in} N_R} I(x_i) \Big|$$

имеет минимум. Задача может быть решена тогда и только тогда, если

$$\min \Big| \sum_{x_i \overline{\in} N_R} I(x_i) \Big| = 0$$

Таким образом, функционалом цели является сумма интенсивностей вершин нефиксированных потенциалов. Определение оптимального потока — значит, условий равновесия — соответствует определению минимума функционала цели. Ниже разлагается алгоритм решения этой задачи.

4.2. Обоснование алгоритма

Шаг 0. Пусть $P_0(x_i)$ и $f_0(x_i, x_j)$ функции потенциала и потока, удовлетворяющие условиям а) и б). Обозначим:

$$V(x_i) = \sum_{\substack{(x_i, x_j) \in A \\ x_j \in N}} v(x_i, x_j) \quad x_i \bar{\in} N_R$$

Шаг 1. Определим значения

$$I_0(x_i) = \sum_{\substack{(x_i, x_j) \in A \\ x \in N}} f_0(x_i, x_j) \quad x_i \bar{\in} N_R$$

Шаг 2. Изменим потенциал вершин:

$$P_1(x_i) = P_0(x_i) \qquad x_i \in N_R$$

$$P_1(x_j) = P_0(x_j) \frac{I_0(x_j)}{V(x_i)} \qquad x_j \bar{\in} N_R$$

Шаг 3. По закону проводимости определим значения потока для каждой дуги $(x_i, x_j) \in A$:

$$v_{i,j}(P_1(x_i) - P_1(x_j)) = f_1(x_i, x_j)$$

Перейдем к шагу 1.

Цикл, состоящий из шагов 1., 2. и 3., повторяется k-раз, в зависимости от желательной точности. Можно доказать, что так получаемые значения потенциала и потока сходят к решению, а число шагов счетно.

Теорема

Алгоритм сходит к решению, значит, $\sum_{x \in N_R} I(x_i) \to 0$

Доказательство

Сперва доказываем, что

$$\sum | I_{k+1}(x) | \leq \sum | I_k(x) |$$

$$\sum_{x_j \bar{\in} N_R} | I_{k+1}(x_i) | = \sum_{x_i \bar{\in} N_R} \Big| \sum_{\substack{(x_i x_j) \in A \\ x_j \in N}} v_{i,j}(P_{k+1}(x_i) - P_{k+1}(x_j)) \Big| =$$

$$= \sum_{x_i \bar{\in} N_R} \Big| \sum_{\substack{(x_i\, x_j) \in A \\ x_j \bar{\in} N_R}} v_{i,j}(P_k(x_i) - P_k(x_j)) - \frac{I_k(x_i)}{V(x_i)} + \frac{I_k(x_j)}{V(x_j)} +$$

$$+\sum_{x_j\overline{\in}N_R}(P_k(x_i)-P_k(x_j)-\frac{I_k(x_i)}{V(x_i)}v_{i,j}\Big|=$$

$$=\sum_{x_i\overline{\in}N_R}\Big|\sum_{\substack{(x_i,x_j)\in A\\ x_j\overline{\in}N_R}}\frac{I_k(x_i)}{V(x_j)}v_{i,j}\Big|\leq\sum_{x_i\overline{\in}N_R}\sum_{\substack{(x_i x_j)\in A\\ x_j\overline{\in}N_R}}\frac{I_k(x_j)}{V(x_j)}v_{i,j}=$$

$$=\sum_{x_j\overline{\in}N_R}|I_k(x_j)|-\sum_{x_j\overline{\in}N_R}\sum_{\substack{(x_i,x_j)\in A\\ x_j\in N_R}}\frac{|I_k(x_j)|}{V(x_j)}v_{i,j}\leq\sum_{x_i\overline{\in}N_R}|I_k(x_i)|$$

В формуле есть равенство, если

– существуют дуги (x_i, x_j) и (x_i, x_k), что $x_i, x_j, x_k \overline{\in} N_R$ и $I_k(x_j)\cdot I_k(x_k)<0$ и разница не меньше значения

$$2\ \min\left(\left|\frac{I_k(x_j)}{V(x_j)}v_{i,j}\right|\left|\frac{I_k(x_k)}{V(x)}v_{ik}\right|\right)$$

– существует дуга $(x_i, x_j)\in A$, $x_i\in N_R$, и $x_j\in N_R$ что $I(x_j)\neq 0$

и разница не меньше значения

$$\frac{|I_k(x_j)|}{V(x_j)}V_{i,j}$$

Из вышесказанных следует, что в вершинах, соседних с вершинами зафиксированных потенциалов, $|I_k(x_k)|\to 0$.

Однако

$$I_{k+1}(x)=\sum_{\substack{x_j\\(x_i,x_j)\in A\\ x_j\overline{\in}N_R}}\frac{I_k(x_j)}{V(x_j)}v_{i,j},$$

поэтому в каждой вершине $x_j\overline{\in}N_R$, в соседней вершине которой $I_k(x)\to 0$, $I_k(x_j)\to 0$ по условию в), что и требовалось доказать.

Замечание

Если дана приемлемая ошибка $\varepsilon>0$ в значении потенциала или потока, удовлетворение этому требованию надо проверять через разницу суммы интенсивностей вершин нефиксированных потенциалов. В первом случае таким образом непосредственно получается результат, а во втором случае необходимо определить еще отклонения потоков последовательных шагов при помощи закона проводимости.

5. Метод решения любой задачи с линейным законом проводимости

Рассматриваем следующую, более общую задачу:

Пусть N — множество вершин, подмножества

$$N_R \subset N, \ N_S \subset N \ N_{RS} = N_R \cap N_S \neq \{\varnothing\}.$$

$N_R - N_{RS}$ — в каждой вершине потенциал зафиксирован
$N_S - N_{RS}$ — в каждой вершине интенсивность зафиксирована
N_{RS} — в каждой вершине интенсивность и потенциал зафиксированы.

Обозначим $N_F = N - (N_R \cup N_S)$. В каждой вершине $x_i \in N_F$ потенциал и интенсивность «свободны» (не фиксированы).

Даны значения потенциала: $\widetilde{P}(x_i)$, $x_i \in N_R \cup N_{RS}$
и законы проводимости: $P(x_i) - P(x_j) = r_{i,j} f(x_i, x_j)$

Требуется определить значения потенциала и потока, удовлетворяющих равенствам

$$\begin{aligned} & P(x_i) = \widetilde{P}(x_i) \\ & f(x_i, x_j) = \frac{1}{r_{ij}}\big(P(x_i) - P(x_j)\big) \text{ при } x_i \in N_R \cup N_S \\ & \sum_{\substack{x_i \\ (x_i, x_j) \in A}} f(x_i, x_j) = I(x_i) \\ & I(x_i) = 0 \quad x_i \in N_S \cap N_{RS} \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть $k = |N_F|$ и обозначим элементы N_F через $x_1, x_2, \ldots x_n$, множество $N_R \cup N_{RS}$ через N_{RR}. Рассматриваем следующие $(\kappa + 1)$ задачи: определить векторы потенциалов P_i и потоков f_i, удовлетворяющих условиям

$$P_i(x_i) - P_i(x_j) = r_{ij} f_i(x_i, x_j) \qquad (x_i, x_j) \in A$$
$$i = 0, \ldots, k$$

условиям нулевой задачи

$$P(x_i) = \widetilde{P}(x_i) \text{ при } x_i \in N_{RR}$$
$$I_0(x_i) = 0 \text{ при } x_i \bar{\in} N_{RR}$$

и условиям «κ»-ой задачи

$$P(x_i) = 0 \text{ при } x_i \in N_{RR}$$
$$P_i(x_j) = 1$$
$$I_i(x_i) = 0 \text{ при } x_i \notin N_{RR}, \ x_i = x_j$$

Пусть $|N_{RS}| = l$ и обозначим элементы N_{RS} через $y_1, y_2, \ldots y_l$.

Рассматриваем векторы интенсивностей $I_0, I_1, \ldots I_k$, и координаты этих, принадлежащие к пространству

$$\tilde{I}_0 = (I_0(y_1), \ldots I_0(y_l))$$
$$\tilde{I} = (I_1(y_1), \ldots I\ (y_l))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tilde{I}_k = (I_k(y_1), \ldots I_k(y_l))$$

Лемма

Задача (16) решима тогда и только тогда, если существуют числа λ_i, $i = 1, \ldots к$, при которых

$$\tilde{I}_0 = \Sigma\, \lambda_i\, \tilde{I}_i$$

Доказательство

Достаточность. Если $\tilde{I}_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \tilde{I}_i$, тогда из-за линейности значения потенциала

$$P_0(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, P_i(x_i) \qquad x_i \in N$$

и значения потока

$$f_i(x_i, x_j) = \frac{P_i(x_i) - P_i(x_j)}{r_{ij}} \qquad (x_i, x_j) \in A$$

дадут решение задачи (16). Здесь $P_i(x_i)$ — координаты вектора потенциала «i»-ой задачи.

Необходимость. Положим, что задача (16) решима. Обозначим вектор потенциала решения через P. Обозначим вектор потенциала $\widetilde{P} - P_0$ через P^* и принадлежащий к нему вектор интенсивностей через I^*.

Пусть $\lambda_i = I^*(x_i) \qquad x_i \in N$

и $\quad P^* - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, P_i = \underline{P}'$

Для потенциалов $\underline{P}'$ и интенсивностей I' справедливы следующие равенства:

$$\underline{P}'(x_i) = 0 \quad x_i \in N_R$$
$$\underline{I}'(x_i) = 0 \quad x_i \in N_{RR}$$

Из условия $r_{ij} < 0$, $\underline{P}'(x_i) \equiv 0$, $\underline{I}'(x_i) \equiv 0$. Имея в виду, что $I^*(x_i) = I_0(x_i)$ при $x_i \in N_{RS}$, поэтому $\tilde{I}_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \tilde{I}_i$, что и требовалось доказать.

6. Решение задачи с нелинейным законом проводимости

6.1. Формулирование задачи

В этой главе рассматриваются задачи с нелинейным законом проводимости. По дугам сети могут быть одновременно действительны разные типы, закона проводимости. Общая трактовка этих разных законов проводимости возможна из-за выпуклости и непрерывности функций между разностью интенсивностей вершин и потоком экстенсивностей.

В главе 3. перечислены типы законов проводимости. В формулах (13) (14) и (15) имеются функции $| \, |$ и sg, пользоваться которыми на ЭВМ трудоемко. Поэтому впоследствии рассматриваем мультисети с парными, ориентированными дугами, значит ребру (x_i, x_j) соответствуют дуги (x_i, x_j) и (x_j, x_i). К каждым двум дугам принадлежит тот же самый закон проводимости, если значение потока не отрицательно, а значение сопротивления 0, если значение потока отрицательно. Вследствие замены ребр с парными ориентированными дугами, пользоваться функциями sg и $| \, |$ не надо, а задача имеет следующий вид:

Пусть $N_1 \cup N_2 = N, \qquad N_1 \cap N_2 = \emptyset$

Даны значения $P(x_i), \quad x_i \in N_1$

Определить функцию потенциала $\widetilde{P}(x_j)$ и функцию потока $\tilde{f}(x_i, x_j)$ в сети $[N, A]$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&f(x_i, x_j) = R^{-1}\,[\widetilde{P}(x_i) - \widetilde{P}(x_j)]\,, \quad P(x_i) \geqq P(x_j)\\
&f(x_i, x_j) = 0\,, \quad P(x_i) < P(x_j)\\
&\widetilde{P}(x_i) = P(x_j) \qquad \forall\, x_i \in N_1\\
&\tilde{I}(x_j) = 0 \qquad \forall\, x_j \in N_2
\end{aligned} \tag{17}$$

где $\tilde{I}(x_j) = \sum\limits_{(x_j, x_i) \in A} f(x_j, x_i) - \sum\limits_{(x_i, x_j) \in A} f(x_i, x_j)$

При ориентированной сети решение этой задачи соответствует равновесию.

Рассматриваем следующую общую задачу. Пусть $[N, A]$ ориентированный граф. Даны интенсивности вершин

$$d(x_i) \quad \forall\, x_i \in N\,, \quad \sum_{x_i \in N} d(x_i) = 0$$

и функций, $\qquad c_{ij}(t)\,, \ \forall\, (x_i, x_j) \in A$

где c_{ij} выпуклая вниз, непрерывно дифференцируемая. Функция потока:

$$f(x_i, x_j) \geqq 0$$

Интенсивность вершин:

$$\sum_{(x_i, x_j) \in A^+} f(x_i, x_j) - \sum_{(x_j, x_i) \in A^-} f(x_j, x_i) = Q_f(x_i)$$

Надо минимизировать суммы

$$\sum_{(x_i, x_j) \in A} c_{ij}(f(x_i, x_j)) \tag{18}$$

при условии

$$Q_f(x_i) = d(x_i) \quad \forall\ x_i \in N$$

Лемма. Функция потока $\tilde{f}$ является решением задачи тогда и только тогда, если $\exists P(x_i)$, $x_i \in N$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} P(x_i) - P(x_j) &= c'_{ij}(f(x_i, x_j)) \quad f(x_i, x_j) > 0 \\ P(x_i) - P(x_j) &= c^{+}_{ij}(f(x_i, x_j)) \quad f(x_i, x_j) = 0 \end{aligned}$$

По условиям леммы и по закону проводимости очевидно, что в задаче (18) функционалом цели является дифференцируемая, выпуклая вниз функция

$$\Sigma \int_0^f R_{ij}(f_{ij}) df$$

Минимум этого функционала соответствует равновесию (значит, существованию значений потенциалов, удовлетворяющих законам проводимости). В физическом смысле равновесие соответствует минимуму работы, проявляемой «текущей» экстенсивностью.

Покажем, что общая задача (18) содержит и нашу специальную задачу (17). Вводим $[N, A]$ фиктивную вершину «s» и соедним дугами $(s, x_i,) \forall\ x_i \in N$. Обозначим так получаемую сеть через $(\bar{N}, \bar{A})$.

Пусть
$$\left. \begin{aligned} c_{x,s}(t) &= P(x_i)t \\ c_{s.xi}(t) &= -P(x_i)t \end{aligned} \right\} \forall\ x_i \in N_R$$

и
$$\begin{aligned} c_{ij}(t) &= \int_0^t R_{ij}(t) dt & \forall\ (x_i, x_j) \in A \\ \bar{d}(x_i) &= 0 & \forall\ x_i \in N_R \\ \bar{d}(s) &= -\Sigma\, d(x_i) & \forall\ x_i \bar{\in} N_R \end{aligned}$$

Надо минимизировать функционал цели

$$\sum_{(x_i, x_j) \in A} c_{xi,xj}(\bar{f})$$

где $\bar{f}$ принадлежит к совокупности допускаемых потоков в сети $[N, A]$, удовлетворяющих условию $R_f(x_i) = d(x_i)$.

Если поток $\bar{f}$ является оптимальным, тогда по лемме $\exists$ функция P, удовлетворяющая условиям. Обозначим через $\widetilde{P} = P - P(s)$. Очевидно, и $\widetilde{P}$ удовлетворяет условиям леммы.

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{P}(x_i) - \widetilde{P}(s) &\leqq P(x_i) \\ \widetilde{P}(s) - \widetilde{P}(x_i) &\leqq -P(x_i) \end{aligned}\right\} \rightarrow \widetilde{P}(x_i) = P(x_i) \quad x_i \in N_R$$

$$\widetilde{P}(x_i) - \widetilde{P}(x_j) = c'_{ij}(f_{ij}) \qquad f_{ij} > 0$$

$$\widetilde{P}(x_i) - \widetilde{P}(x_j) \leqq c^{+}_{ij}(f_{ij}) \qquad f_{ij} = 0$$

Из вышесказанных следует, что

$$\widetilde{P}(x_i) - \widetilde{P}(x_j) = r_{ij}(\bar{f}_{ij}), \text{ если } \widetilde{P}(x_i) > \widetilde{P}(x_j)$$

Отметим, что если по дуге $(x_i, x_j) \in A$ существует генератор потенциала e_{ij}, тогда

$$\widetilde{P}(x_i) - \widetilde{P}(x_j) = r_{ij}(\bar{f}_{ij}) + e_{ij}$$

Отметим, что направление потока зависит от значения $P(x_i) - P(x_j)$. Трактовка задач потоков в сетях при наличии генераторов потенциала не представляет собой никакой новости.

6.2. Двойственный градиентный метод

Пусть $P_0(x_i)$, $x_i \in N$ — произвольные значения потенциала. Определим значение потока $f_0(x_i, x_j)$ по условию

$$P_0(x_i) - P_0(x_j) = c'_{x_i x_j}(t) + e_{x_i x_j}$$

и изменим значения потенциала на

$$h(x_i) = hf(x_i) - d(x_i)$$

Определим последовательность потенциалов следующим образом:

$$P_1(x_i) = P_0(x_i) - h(x_i)\gamma_0 c_0 \quad x_i \in N$$

где γ и с нормализирующие факторы

$$\Sigma\gamma_k = +\infty, \quad \Sigma\gamma_k^2 < +\infty, \quad c_k \,||\, h_k \,||\, \leqq c$$

$$P_{k+1}(x_i) = P_k(x_i) - h(x_i)\gamma_k c_k \quad x_i \in N$$

Из выбора P и f следует, что

$$f(x_i\, x_j) = \lim_{k\to\infty} f_k(x_i, x_j) \quad \bar{P}(x_i) = \lim_{k\to\infty} P_k(x_i)$$

дадут оптимальное решение задачи.

Лемма

Если существует оптимальный поток $\bar{f}(x_i, x_j)$ и функции непрерывно дифференцируемые и строго выпуклые, тогда

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x_i, x_j) = \bar{f}(x_i, x_j)\,, \qquad (x_i, x_j) \in A$$

Доказательство

Из понятия $f^{(k)}(x_i, x_j)$ следует, что

$$P_k(x_i) - P_k(x_j) = c'_{x_i x_j}(f_k(x_i, x_j)) \quad \text{при } f_k(x_i, x_j) > 0\,,$$
$$P_k(x_i) - P_k(x_j) = c^{+}_{x_i x_j}(f_k(x_i, x_j)) \quad \text{при } f_k(x_i, x_j) = 0$$

Таким образом, функция $f_k(x_i, x_j)$ минимизирует функцию $c_{x_i,x_j}(t) - (P(x_i) - P(x_j))t$ при $t \geqq 0$. Из выпуклости $c_{x_i,x_j}(t)$ следует, что если $\bar{f}(x_i,x_j) \neq f_k(x_i,x_j)$, тогда

$$c_{x_i x_j}(f(x_i x_j) - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_j))f(x_i, x_j) < c_{x_i,x_j}(\bar{f}(x_i, x_j) -$$
$$- (P^{(k)}(x_i) - P^{(k)}(x_j))f(x_i, x_j)$$

Существует потенциал $\bar{P}$, удовлетворяющий условию (19) при $\bar{f}$ и для которого

$$c_{ij}(f(x_i, x_j)) - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_j))f(x_i, x_j) <$$
$$< c_{ij}(f^{(k)}(x_i, x_j)) - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_j))f^{(k)}(x_i, x_j) \tag{20}$$

Имея в виду, что при $f = \bar{f}$ $R_{\bar{j}}(x_i) = d(x_i)$, для векторов

$$\bar{P} = (P(x_1), \ldots.\, P(x_n))$$
$$\bar{P}^{(k)} = (P^{(k)}(x_1), \ldots.\, P^{(k)}(x_n))$$
$$h^{(k)} = (h^{(k)}(x_1)\,, \ldots.\, h^{(k)}(x_n))$$

(где $x_1, \ldots x_n$: произвольная зафиксированная последовательность $x_i \in N$), потому что

$$\Sigma\, c_{ij}(f(x_i, x_j)) = \Sigma\, c_{ij}(f(x_i, x_j)) - \Sigma\, \bar{P}(x_i)[R_j(x_i) - d(x_i)] =$$
$$= \Sigma\, c_{ij}(\bar{f}(x_i, x_j)) - \Sigma\, P^{(k)}(x_i)\, [R_j(x_i) - d(x_i)]$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}
&\Sigma c_{ij}(\bar{f}(x_i, x_j)) = \Sigma c_{ij}(\bar{f}(x_i, x_j)) - \Sigma \bar{P}(x_i)\,[R_f(x_i) - d(x_i)] = \\
&= \Sigma c_{ij}(\bar{f}(x_i, x_j)) - \Sigma P^{(k)}(x_i)\,[R_f(x_i) - d(x_i)] = \\
&= \sum_{x_i x_j} [c_{ij}(f(x_i, x_j)) - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_i))f(x_i, x_j) + \Sigma \bar{P}(x_i) dx_i = \\
&= \sum_{x_i x_j} [c_{ij}(f(x_i, x_j)) - (P^{(k)}(x_i) - P^{(k)}(x_j))\bar{f}(x_i, x_j)] + \Sigma P^{(k)}(x_i) d(x_i) = \\
&= \sum_{x_i x_j} c_{ij}(f^{(k)}(x_i, x_j)) - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_j))\, f^{(k)}(x_i, x_j) + \Sigma P(x_i)\, d(x_i) > \\
&> \Sigma\, [c_{ij}(\bar{f}(x_i, x_j))] - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_j))\, f^{(k)}(x_i, x_j) + \Sigma P^{(k)}(x_i) d(x_i) > \\
&> \Sigma\, [c_{ij}(f^{(k)}(x_i, x_j)) - (P^{(k)}(x_i) - P^{(k)}(x_j)) f^{(k)}(x_i, x_j) + \Sigma P^{(k)}(x_i) d(x_i) \\
&- \Sigma \bar{P}(x_i)\,[Q_{f^{(k)}}(x_i) - d(x_i)] > - \Sigma P^{(k)}(x_i)\, \Sigma\, [R_{f^{(k)}}(x_i) - d(x_i)]
\end{aligned}$$

$$R_{f^{(k)}}(x_i) - d(x_i) = h^k(x_i)$$

$$0 \geqq [\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}, \underline{h}^{(k)}]$$

Из вышесказанных следует, что если функции $c_{ij}(t)$ строго выпуклые, тогда

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x_i, x_j) = \bar{f}(x_i, x_j) \qquad \forall\ (x_i, x_j) \in A$$

действительно тогда и только тогда, если

$$\lim_{k\to\infty} (\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}, \underline{h}^{(k)}) = 0$$

С одной стороны, если

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x_i, x_j) = \bar{f}(x_i, x_j) \qquad \forall\ (x_i, x_j) \in A$$

тогда $\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)} \longrightarrow 0$, поэтому

$$(\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}, \underline{h}^{(k)}) \to 0$$

С другой стороны, если для некоторой дуги $(x_i, x_j) \in A$ справедливо

$$\lim_{k\to\infty} f^{(k)}(x_i, x_j) \neq \bar{f}(x_i, x_j)$$

тогда существует $\varepsilon > 0$ и $N' > N$, что

$$|\, f^{N'}(x_i, x_j) - f(x_i, x_j)\,| \geqq \varepsilon\,.$$

Из строгой выпуклости должен быть $\delta > 0$, что

$$c_{ij}(f^{(k)}(x_i, x_j)) - (\bar{P}(x_i) - \bar{P}(x_j))f^{(k)}(x_j, x_j) \geqq \delta + c_{ij}(\bar{f}(x_i, x_j) - (P(x_i) - P(x_j))\bar{f}(x_i, x_j)$$

поэтому

$$(\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}, \underline{h}^{(k)}) \neq \delta \leqq 0$$

Следовательно, достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{k\to\infty} (\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}, \underline{h}^{(k)}) = 0$$

Очевидно

$$\| \underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k+1)} \|^2 = \| \underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)} \|^2 + 2\varrho_k\gamma_k(\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}, h^{(k)}) + \varrho_k\gamma_k^2 \| h^{(k)} \|^2$$

Пусть множитель γ_k выбирается так, чтобы

$$\gamma_k \| h^{(k)} \|^2 \leqq c < \infty \ \forall\ k$$

$$\| \underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k+1)} \|^2 \leqq \bar{P} - \underline{P}^{(k)} \|^2 + C\varrho_k^2$$

Положим

$$z_k = \| \underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)} \|^2 + C \sum_{l=k}^{\infty} \varrho_l^2$$

Тогда из вышесказанных следует, что $z_{k+1} \leqq z_k$, т. е. последовательность $\|\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k)}\|^2$ сходится, даже и она, и последовательность $f^{(k)}(x_i, x_j)$ ограничены. Следовательно, последовательность z может быть и снизу ограничена, как это отмечалось в рассмотрении алгоритма: $0 < \gamma \leqq \gamma_k$. Тогда

$$\| \underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(k+1)} \|^2 = \| \underline{\bar{P}} - \underline{P}^0 \|^2 + 2\gamma \sum_{l=1}^{k} \varrho_l(\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(l)}, h^{(l)}) + C \sum_{l=1}^{k} \varrho^2,$$

поэтому последовательность

$$\Sigma\, \varrho_l(\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(l)}, \underline{h}^{(l)})$$

сходится.

Из условий

$$\Sigma\, \varrho_l^2 = +\infty$$

и

$$(\underline{\bar{P}} - \underline{P}^{(l)}, \underline{h}^{(l)}) \to 0$$

следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f^{(k)}(x_i, x_j) = \bar{f}(x_i, x_j)$

что и требовалось доказать.

7. Практические применения

Рассматриваемые алгоритмы позволяют решить все возможные практические задачи, касающиеся транспорта энергии и масс при стационарных условиях. Каждой конкретной зависимости сопротивления или проводимости соответствует один общий тип законов проводимости, рассматриваемых в главе 3. Краевые условия любые: можно зафиксировать значения потенциала и (или) значения интенсивности. В одной и той же задаче можно принимать разные по разным дугам законы проводимости.

На основе рассматриваемых алгоритмов были разработаны две программы на ЭВМ типа Сименс 4004 на языке Фортран IV. Первая, более простая программа употребляется для решения следующих задач:

— определение теплового баланса групп помещений (помещения и любое число дискретных мест окружности соответствуют вершинам, ограждения — дугам, закон проводимости — закону теплопередачи, интенсивность — мощности теплоотдающих приборов, поток — расходу тепла (или тепловым потерям), потенциал — температуре);

— определение распределения температуры (двух- или трехмерного) в ограждающих конструкциях при постоянных значениях коэффициентов теплопередачи.

Эти характеризуются линейным законом проводимости.

Вторая программа, употребляемая для решения следующих задач:

— определение теплового баланса помещений при значениях коэффициентов теплопередачи, зависящих от перепада или абсолютного значения температуры;

— определение распределения температуры (двух- и трехмерного) при значениях коэффициентов проводимости, зависящих от температуры;

— определение воздушного режима зданий, имея в виду разницу между ламинарным и турбулентным режимами и влияние приточной или вытяжной вентиляции. (Помещения и любое число дискретных мест окружности соответствуют вершинам, окна, двери, вентиляционные каналы — дугам, давление — потенциалу, расход воздуха — потоку, расход воздуха (или кратность) в одном помещении вследствие механической вентиляции — интенсивности данной вершины, воздухопроницаемость — закону проводимости, зависящему от значения потока, вентилятор — генератору потенциала).

Разумеется, что кроме этих конкретных задач строительной теплофизики рассматриваемые программы применимы для решения других задач. Так, напр., на II-й Кафедре отопления и вентиляции Будапештского Технического Университета успешно использовали вторую программу для расчета трубопроводов и для оптимизации теплофикационных сетей.

Обе программы оказались в практике быстродействующими и эффективными. Число вершин практически не ограничивается: были уже решены задачи с 500 вершинами. На скорость программ практически не влияет начальное распределение потенциалов в «свободных вершинах», поэтому начальным распределением потенциала в «свободных вершинах» можно принимать $P = 0$.

Литература

1. KLAFSZKY, E.: Hálózati folyamok. Budapest, 1969. Bólyai Társulat
(Потоки в сетях)
2. FORD, L. P.—FULKERSON, D. R.: Flow in Networks. Princeton University Press, 1962.
3. ZÖLD, A.: Nemlineáris hálózati folyamok. 1972.
(Нелинейные потоки в сетях. Дипломная работа на фак. прикладной математики),
4. ЕРМОЛЬЕВ, Ю. М.—МЕЛЬНИК, Л. М.: Экстремальные задачи на графах. «Наукова думка», Киев, 1968.
5. КАНТОРОВИЧ, Л. В.: О перемещении масс. ДАН СССР, 1942. 37.

ст. преп. д-р Андраш ЗЕЛЬД, 1111 Будапешт, XI, Мюедъетем ракпарт 3
научн. сотр. Иштван ПАЛОЦ, Будапешт, XIV, Ангол у. 3
Венгрия