

KONSTRUKTIVE PHOTOGRAMMETRISCHE VERFAHREN ZUR REKONSTRUKTION VON ROTATIONSFLÄCHEN

Von

A. HORN

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität Budapest
(Eingegangen am 1. Dezember 1967)

Einleitung

Ein Teil der Rotationsflächen hat auch aus dem Gesichtspunkt des Photogrammeters eine besondere Bedeutung. Wir denken dabei hauptsächlich an die an Baudenkmalern vorkommenden Rotationsflächen, deren Verewigung für die Nachwelt im Rahmen von Dokumentationen zu den Aufgaben der Photogrammetrie gehört. Aufgrund ähnlicher Überlegungen sind auch Gegenstände mit Rotationsflächen, die bei archäologischen Erschließungen zum Vorschein kommen, nicht weniger bedeutend.

So ist die vorliegende Arbeit in der Absicht entstanden, zur Realisierung der obigen Ziele für die Praxis eine Reihe von einfachen und verhältnismäßig raschen Konstruktionsverfahren zu liefern.

Im ersten Teil des Aufsatzes wird die Rekonstruktion der Rotationsflächen aufgrund der Einbild-Photogrammetrie, im zweiten Teil aufgrund der Stereophotogrammetrie behandelt. Im ersten Teil des ersten Abschnittes werden für die Bestimmung des Projektionszentrums aufgrund des Bildes mehrere Lösungen erläutert. Unser Ziel dabei war, die Auswertung auch aufgrund von Aufnahmen zu ermöglichen, die nicht mit einer photogrammetrischen Kamera, sondern nur mit einfacheren Photoapparaten gemacht wurden.

Im weiteren soll die Entfernung des Projektionszentrums von der Bildebene anstatt Fokusdistanz mit dem Wort Distanz bezeichnet werden. Die Aufnahmen für die Architektur und Archäologie erfolgen nämlich meistens innerhalb einer Entfernung von 0,5–8 m. Infolgedessen stimmt die Fokusdistanz des Linsensystems mit der Distanz des Projektionszentrums und der Bildebene selten überein, deshalb soll dieser veränderliche Abstand im weiteren als Distanz bezeichnet werden.

Weiterhin folgt ein Verfahren zur Bestimmung der Lage des Projektionszentrums im Verhältnis zu dem Bilde auch auf rechnerischem Wege, um eine größere Genauigkeit zu erreichen bzw. um die Genauigkeit der Konstruktion eventuell kontrollieren zu können.

Statt Photoaufnahmen sollen zeichnerische Abbildungen verwendet werden, damit das Liniennetz der Konstruktion und dessen Beschriftung klar ersichtlich sind. So werden z. B. des öfteren anstatt Bauteilen dem Themenkreis der Archäologie vielmehr entsprechende Vasen vorkommen. Jedoch können die an diesen vorgeführten Konstruktionsverfahren in jedem Falle an ähnlichen Bauteilen wiederholt werden.

Hier muß auch die auf dem Wege der Konstruktion erreichbare maximale Genauigkeit angestrebt werden und dafür sind nicht nur spitze Schnitte, sondern auch umständliche Konstruktionen zu vermeiden.

In dem Textteil bedeutet Konstruktion »von voller Genauigkeit« eine Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann, bei einer Konstruktion von »annähernder Genauigkeit« sind außer der Geraden und des Kreises noch Kurven anderer Art erforderlich.

Im Abschnitt über die Einbild-Photogrammetrie werden jene Konstruktionen gezeigt, die als Rekonstruktion idealer Rotationsflächen gelten. Zu diesen gehören im allgemeinen die archäologischen Funde und die kleineren architektonischen Objekte. Bei größeren architektonischen Konfigurationen — wie z. B. bei Kuppeln — entstehen kleinere Abweichungen.

Ungenauigkeiten, Deformationen schon während des Baues oder später. Doch sind diese entweder so gering, daß sie die zulässige Ungenauigkeit nicht überschreiten, oder verlieren die Flächen — falls die Abweichungen größer sind — den Charakter einer Rotationsfläche. Obwohl diese Abweichungen auch durch die Einbild-Photogrammetrie nachweisbar sind, falls die inneren Daten nicht aufgrund des Bildes der Fläche erstellt werden müssen, wird das Thema in einer weiteren Abhandlung erörtert werden. In der Stereophotogrammetrie hingegen lassen sich diese Deformationen durch Konstruktion genau nachweisen.

Es soll noch bemerkt werden, daß in der Einbild-Photogrammetrie die Rekonstruktion nur durch Konstruktion erfolgen kann. Die Auswertung kann in der Stereophotogrammetrie — wenn ein entsprechendes Bildpaar vorliegt — auch maschinell durchgeführt werden, doch ist das Verfahren ziemlich umständlich, da der Weg der Auswertung aufgrund der Konturkurve nicht gangbar ist, wie das in einem weiteren Abschnitt dargelegt wird.

Bei der Rekonstruktion wird nur angestrebt, ein genaues Bild der Form des dargestellten Gebildes zu zeichnen. Zur Feststellung der Größe muß die tatsächliche Länge einer auf dem Bilde vorhandenen Entfernung bekannt sein. Diese ergibt den Maßstab der Rekonstruktion. In der Stereophotogrammetrie wird dieser Maßstab auch durch das Verhältnis der bei der Rekonstruktion und der bei der Aufnahme angewandeten Basislängen bestimmt.

Sollten sich im Aufbau oder an einzelnen Stellen des Aufsatzes gewisse Mängel zeigen, so sei es gestattet, schon im voraus zu bemerken, daß bei der Bearbeitung Verfasser sich auf keine frühere diesbezügliche Literatur stützen konnte.

A. EINBILD-PHOTOGRAMMETRIE

Rekonstruktion der Rotationsfläche mit zur Bildebene paralleler Achse

1.1. Verlauf der Rekonstruktion

Die Rekonstruktion kann in folgenden Schritten erfolgen:

- a) Bestimmung der *inneren Daten* durch Angabe der senkrechten Projektion des Zentrums in der Bildebene: F (Hauptpunkt) und dessen Entfernung von der Bildebene: d (Distanz).
- b) Bestimmung des *Flächenachsenbildes*.
- c) In Kenntnis der obigen Angaben Rekonstruktion der *Konturkurven*, *Parallelkreise*, *Meridiankurven* und *allgemeinen Punkte der Rotationsfläche*.

1.2. Bestimmung der inneren Daten

1.21. *Erzeugung der inneren Daten mit Hilfskreisen*. In Abb. 1 ist die Vorderansicht und Draufsicht einer Rotationsfläche mit vertikaler Achse, weiterhin die Draufsicht auf das Projektionszentrum gegeben. Die Verbindungsebene der Achse t und des Zentrums C ist die Symmetrieebene des Systems Fläche—Zentrum. So ist vom Zentrum aus die Achselbreite beiderseitig der Kontur unter gleichem Winkel zu sehen, der unabhängig von der Stelle des Zentrums in waagerechter Projektion erscheint. Hingegen schneiden die die Schultern abbildenden Strahlenpaare, die gleiche Winkel schließen, unterschiedliche Teile in der Bildebene der waagerechten Projektion ab. D. h. $A'B' \neq C'D'$. Bei der Konstruktion des Zentrums suchen wir also die geometrischen Orte jener Punkte in der waagerechten Projektion, von denen

die durch die ursprünglichen Projektionsstrahlen abgeschnittenen Schulterabbildungen von verschiedener Größe unter gleichen Winkeln zu sehen sind.

Die Lösung dieser Aufgabe stellt die praktische Anwendung des Satzes »Kreis der Schnittpunkte der Kreisreihen mit gemeinsamer Potenzlinie in perspektivischer Lage« in einem Spezialfall dar.* Daher wird im folgenden der hier interessierende Teil des Satzes samt dessen Beweisführung behandelt. Werden vier beliebige Punkte einer Geraden paarweise als Basispunkte je

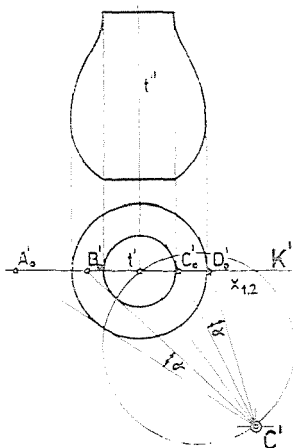


Abb. 1

einer Kreisreihe gewählt und je eine Glied der so erhaltenen zwei Kreisreihen in der Weise gepaart, daß die Geraden, die deren Mittelpunkte verbinden, durch einen gegebenen Punkt gehen, d. h. eine einzige Strahlenreihe bilden, so liegen die Schnittpunkte der erhaltenen Kreispaare auf einem Kreis. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist auch der der Strahlenreihe.

Hier soll nur der Fall behandelt werden, wo sich der Einreihpunkt der Strahlenreihe auf der gemeinsamen Potenzlinie befindet und im Ähnlichkeitspunkt der durch die Basispunkte bestimmten Basissehnen liegt.

Seien in Abb. 2 die gemeinsame Potenzlinie h , die auf dieser liegenden Basispunkte der zwei Kreisreihen A und B bzw. C und D . Der Einreihpunkt der Strahlenreihe ist H , der Ähnlichkeitspunkt der Sehnen. Dieser wurde durch die Verbindungsgerade der Punkte A_1C_1 — die durch Drehen der Punkte A um B , sowie C um D in gleicher Richtung und in gleichem Winkel entstanden sind — auf der gemeinsamen Potenzlinie ausgeschnitten. Nun zieht man von H einen beliebigen Strahl a_1 . Dessen Schnittpunkte mit den Zentralen c_1 und c_2 der zwei Kreisreihen werden die Mittelpunkte O_1 und O_2

* A. HORN: Schnittpunktskreis perspektiver Kreisbüschel mit gemeinsamer Potenzlinie. Wiss. Arb. T. U. Bau- und Verkehrsw. Bp. 10 (1964) H. o. 57—68.

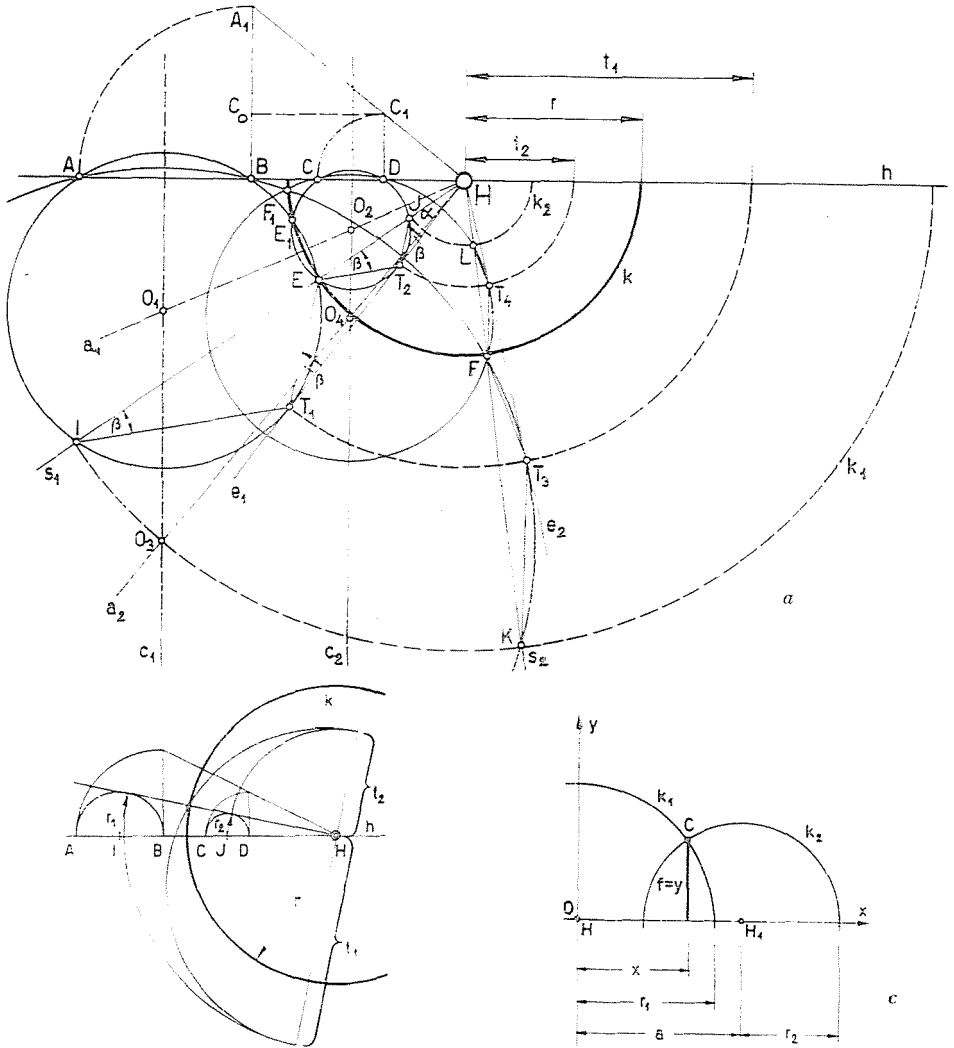


Abb. 2

der Glieder der Kreispaaire sein. Mit O_1 als Mittelpunkt wird durch die Punkte A und B , mit O_2 durch die Punkte C und D das erste Kreispaar gezeichnet. Die erhaltenen Schnittpunkte sind E und E_1 . Nach Wiederholung derselben Konstruktion ergibt Strahl a_2 auf den Zentralen c_1 und c_2 die Mittelpunkte O_3 und O_4 . Das mit diesen Mittelpunkten durch die entsprechenden Basispunkte gezeichnete zweite Kreispaar schneidet sich in den Punkten F und F_1 . Da die Punkte E und E_1 zu der Geraden a_1 symmetrisch sind, ist ihre Entfernung von dem auf der Geraden a_1 liegenden Punkt H gleich. Bei den Punkten F und F_1 ist der Fall derselbe. Wird daher nachgewiesen, daß die Punkte E

und F von H gleich entfernt sind, so ist damit auch bewiesen, daß sich die Schnittpunkte der auf die erwähnte Weise konstruierten Kreispaare von Punkt H in gleicher Entfernung befinden und so auf demselben Kreis liegen.

Zum Beweis sollen von Punkt H aus zu den Schnittpunkten E und F der Kreispaare die Sekanten s_1 und s_2 dargestellt werden, die die Glieder des Kreispaares an weiteren je zwei Punkten I und J bzw. K und L schneiden, weiterhin die Tangenten e_1 und e_2 , deren Tangentialpunkte T_1, T_2, T_3 und T_4 sind. Sodann verbinden wir die folgenden Punkte: IT_1, T_1E, ET_2, T_2J und KT_3, T_3F, FT_4, T_4L . Die erhaltenen Geraden werden paarweise parallel sein: IT_1 und ET_2 , T_1E und T_2J , KT_3 und FT_4 , T_3F und T_4L , da sich ihre entsprechenden Endpunkte auf den vom äußeren Ähnlichkeitspunkt des Kreispaares gezogenen Strahlen befinden.

Bei den Kreisen O_1 und O_2 sind die Dreiecke IHT_1 und EHT_2 , weiterhin die Dreiecke EHT_1 und JHT_2 ähnlich, da sie je zwei gemeinsame Seiten besitzen und ihre dritten Seiten parallel sind. Die Dreiecke IHT_1 und EHT_2 sind ebenfalls ähnlich, da der Winkel α in Punkt H gemeinsam ist. Weiterhin sind die Winkel β bei den Punkten I und T_1 gleich, da beide zur Sehne ET_1 gehörige Umfangswinkel des Kreises mit dem Mittelpunkt O_1 darstellen. Somit sind die erwähnten vier Dreiecke einander ähnlich.

Aus den Dreiecken EHT_1 und EHT_2 gelten:

$$T_1H : EH = EH : T_2H, \quad EH^2 = T_1H \cdot T_2H;$$

aus den Dreiecken FHT_3 und FHT_4 :

$$T_3H : FH = FH : T_4H, \quad FH^2 = T_3H \cdot T_4H;$$

aufgrund der bekannten Potenz Eigenschaft der Kreisreihen sind:

$$T_1H = T_3H \text{ und } T_2H = T_4H, \text{ somit } EH^2 = FH^2,$$

$$EH = FH,$$

also liegen die Schnittpunkte auf dem Kreise k .

Dieser Kreis wird bei den weiteren Konstruktionen als Hilfskonstruktion verwendet und im weiteren Hilfskreis genannt. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$T_1H = T_3H = t_1, \quad T_2H = T_4H = t_2, \quad EH = FH = r.$$

Danach wird sowohl die erste als die zweite Gleichung folgende Form annehmen:

$$r^2 = t_1 \cdot t_2,$$

also ist der Halbmesser des Schnittpunktenkreises das geometrische Mittel zwischen den Halbmessern der Kreise der zu Punkt H gehörigen Tangentialpunkte.

1.22. Berechnung der Hilfskreise. Statt einer Konstruktion läßt sich die Lage des Punktes H durch Messen am Komparator auf Grund der Angaben der Punkte A, B, C und D auch rechnerisch leicht ermitteln.

Betrachten wir nochmals die Abb. 2a. Aus den ähnlichen Dreiecken $A_1C_0C_1$ und C_1DH gelten

$$A_1C_0 : C_0C_1 = C_1D : DH, \quad A_1C_0 \cdot DH = C_0C_1 \cdot C_1D.$$

Da

$$A_1C_0 = A_1B - C_1D \quad \text{und} \quad C_0C_1 = BD$$

weiterhin

$$A_1B = AB, \quad C_1D = CD$$

ist, gilt

$$(AB - CD) \cdot DH = BD \cdot CD$$

$$DH = \frac{BD \cdot CD}{AB - CD}.$$

Die Berechnung des Halbmessers r des Kreises k kann auf Grund von Abb. 2b mit den Daten der Punkte A, B, C, D und des schon bekannten Punktes H erfolgen.

Laut der früheren Feststellungen (Abb. 2a) ist:

$$r^2 = t_1 \cdot t_2.$$

Nach Abb. 2b ist:

$$t_1^2 = IH^2 - r_1^2, \quad t_2^2 = IH^2 - r_2^2.$$

Mit

$$IH = \frac{AB}{2} + BH, \quad JH = \frac{CD}{2} + DH$$

und

$$r_1 = \frac{AB}{2}, \quad r_2 = \frac{CD}{2}$$

ist

$$t_1^2 = \left(\frac{AB}{2} + BH \right)^2 - \left(\frac{AB}{2} \right)^2, \quad t_2^2 = \left(\frac{CD}{2} + DH \right)^2 - \left(\frac{CD}{2} \right)^2.$$

Nach Durchführung der Operationen und Ordnen der Gleichungen erhält man:

$$t_1^2 = BH(AB + BH), \quad t_2^2 = DH(CD + DH)$$

$$t_1 = \sqrt{BH(AB + BH)}, \quad t_2 = \sqrt{DH(CD + DH)}.$$

Nach Einsetzung in die erste Gleichung ergeben sich:

$$r^2 = \sqrt{BH(AB + BH) \cdot DH(CD + DH)},$$

$$r = \sqrt[4]{BH(AB + BH) \cdot DH(CD + DH)}.$$

Der Punkt H ist aber der äußere Ähnlichkeitspunkt sowohl der Basissehnen als auch der Kreispaare. Deshalb erscheint von jedem Umfangspunkt beider Glieder des Kreispaares aus, der auf die gleiche Seite der Potenzlinie fällt, die Basissehne des eigenen Kreises unter dem gleichen Winkel. Von den Schnittpunkten der Kreispaare aus, weiterhin von allen Punkten des aus diesen gebildeten Kreises k , erscheinen die Basissehnen AB und CD unter gleichem Winkel. So muß das Zentrum den früheren Feststellungen entsprechend auf dem Kreis k liegen, da die Schultern vom Zentrum aus unter gleichem Winkel erscheinen.

Enthält die Photoaufnahme die Abbildung zweier Rotationsflächen, so können zwei Kreise erzeugt werden, deren Schnittpunkt schon die waagerechte Projektion C' des Zentrums C ergibt.

Die Angaben der Projektion C' des Zentrums C können auf Grund von Abb. 2c errechnet werden.

Seien r_1 der Halbmesser des Kreises mit dem Mittelpunkt H , r_2 jenes mit dem Mittelpunkt H_1 , und a die Entfernung beider Mittelpunkte, so sind:

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Wird die zweite Gleichung auf y^2 geordnet und in die erste Gleichung eingesetzt, erhält man nach Durchführung der Operationen und Ordnen der Gleichung als Ergebnis:

$$x = \frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2a}.$$

Nach Einsetzen des Wertes x in die erste Gleichung sind:

$$y^2 = r_1^2 - \left(\frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2a} \right)^2,$$

$$y = \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2a} \right)^2}.$$

1.23. *Anwendung der Hilfskreise.* Abb. 3 zeigt einen Abschnitt mit drei Säulen eines Erkergeländers aus Stein. Die Bilder der Teilungen der Auflager- und Abdecksteine liegen in je einer Geraden und die Teilungslinien sind mit-

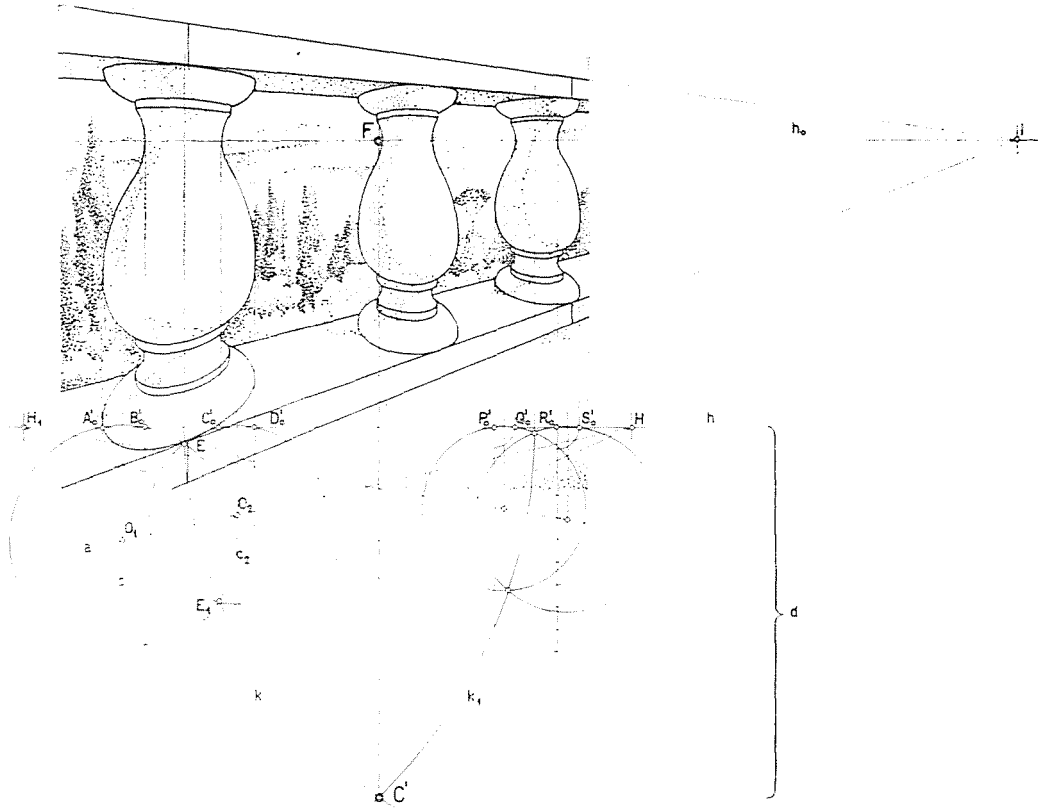


Abb. 3

einander parallel. Da diese Teilungen in jedem Falle senkrecht stehen, zeigen ihre parallelen Bilder eindeutig, daß die Aufnahme ebenfalls in vertikaler Bildstellung vorgenommen wurde. Demnach ist die Achse der Säulen auf dem Bild mit der Bildebene parallel.

Man erhält den Fluchtpunkt I der waagerechten Auflager- und Abdecksteine im Schnittpunkt ihrer Bilder, durch den die Linie h_0 , das Bild des Horizontes, normal zu den Bildern der vertikalen Kanten, also waagrecht geht. Der noch unbekannte Hauptpunkt F wird auf diesem liegen müssen. Sodann wird parallel mit h_0 , in beliebiger Höhe unter dem Bild, die horizontale Schnittlinie h angenommen, die die Schnittlinie der vertikalen Bildebene und der waagerechten Projektionsebene darstellt. Die in vertikaler Stellung gemachte Aufnahme ist in dieser waagerechten Ebene in der Schnittlinie h zu sehen. Nun werden die zu den Hals- und Schaftteilen gehörigen senkrechten Tangenten der Balustersäulen auf dem linken und rechten Rand gezeichnet, die in der Schnittlinie h die waagerechten Projektionen der Bilder der Schultern, d. h. die Punkte A'_0, B'_0, C'_0, D'_0 , weiterhin P'_0, Q'_0, R'_0, S'_0 ergeben. Gemäß

Abb. 1 muß die waagerechte Projektion des Zentrums C' so liegen, daß die von ihr ausgehenden und zu den Punkten A'_0, B'_0 führenden Strahlen mit dem zu den Punkten $C'_0D'_0$ führenden Strahlenpaar gleiche Winkel α bilden. Ebenso soll der Winkel β der Strahlen $P'_0Q'_0$ mit dem des Strahlenpaares $R'_0S'_0$ übereinstimmen.

Die Konstruktion erfolgt durch Wiederholung des in Abb. 2 vorgeführten. Mit $A'_0B'_0$ und $C'_0D'_0$ erhält man den Kreis k .

Mit den Basissehnen $P'_0Q'_0$ und $R'_0S'_0$ wird die obige Konstruktion wiederholt, wobei man den Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt H_1 erhält, dessen Schnittpunkt C' mit dem Kreis k die waagerechte Projektion des Zentrums ist. Wird Punkt C' auf das Bild h_0 der Horizontlinie senkrecht projiziert, erhält man die senkrechte Projektion des Zentrums C in der Bildebene, den Hauptpunkt F . Die Entfernung d zwischen Punkt C' und Linie h ist die Distanz und entspricht der Entfernung des Punktes C von der Bildebene. Somit ist mit der Erzeugung des Hauptpunktes F und der Distanz d die Bestimmung der inneren Daten beendet.

Wie wir gesehen haben, wurde auf dem Bilde die Erzeugung des Zentrums C durch die verschiedenen Schulterbreiten ermöglicht. Bei der Anfertigung der Aufnahmen muß man deshalb trachten, daß die Bilder der Rotationsflächen — sofern es die Verzeichnung der Linse noch erlaubt, — möglichst auf die beiden Ränder der Photoaufnahme kommen, denn so ergibt sich der größte Unterschied zwischen den Projektionen der Schultern. Freilich wird das Bild so für eine unmittelbare Betrachtung verzerrt scheinen, doch wird dadurch die Genauigkeit der Erzeugung der auf Grund der Unterschiede der Schultern konstruierten Kreise k und k_1 erhöht.

Gibt es zwischen der rechten und der linken Seite der Bildkonturkurven der Rotationsfläche keinen Unterschied, sind diese also symmetrisch, das bedeutet, daß die Verbindungsebene der Flächenachse und des Zentrums C zur Bildebene senkrecht steht. In diesem Fall kommt der Hauptpunkt F auf die Symmetrielinie der Konturkurve, also auf das Bild der Achse zu liegen.

Abb. 4 zeigt die Konstruktion des Bildes der Horizontlinie h_0 für den Fall, wo die Schnitte der Bilder der waagerechten Kanten a_0 und b_0 außerhalb der für die Konstruktion zur Verfügung stehenden Fläche liegen würden.

1.24. *Erzeugung der Hilfskreise durch neue Paarung der Ausgangspunkte.* Vom Zentrum C' aus sind nicht nur die Schultern unter dem gleichem Winkel α zu sehen. Wie Abb. 5 zeigt, sieht man den Halsteil der Rotationsfläche mit der linksseitigen Schulter unter dem gleichem Winkel β wie Halsteil und rechtsseitige Schulter.

Daher kann das Konstruktionsverfahren der zur Erzeugung der Zentrumprojektion C' dienenden Hilfskreise, das bei Abb. 2 und 3 behandelt und für die Punkte $A'_0B'_0$ und $C'_0D'_0$ sowie $P'_0Q'_0$ und $R'_0S'_0$ in Abb. 5, als Ausgangs-

ergeben in ihrem Schnittpunkt das Bild des Gipfelpunktes des Kegels. Da die Kegel von den Tangenten und Sekanten der Meridiankurve abgeleitet werden, liegen ihre Gipfelpunkte auf der Achse der Rotationsfläche. Das Bild der Achse der Rotationsfläche wird mit der Verbindungsgeraden des Bildes der zwei Spitzen bestimmt.

Abb. 6 zeigt eine früher schon vorgeführte Geländersäule. In der Abbildung sind einige der soeben erörterten Kegel dargestellt. Die Verbindungsgerade der Spitzen ergibt das Bild der Rotationsflächenachse. In Kenntnis

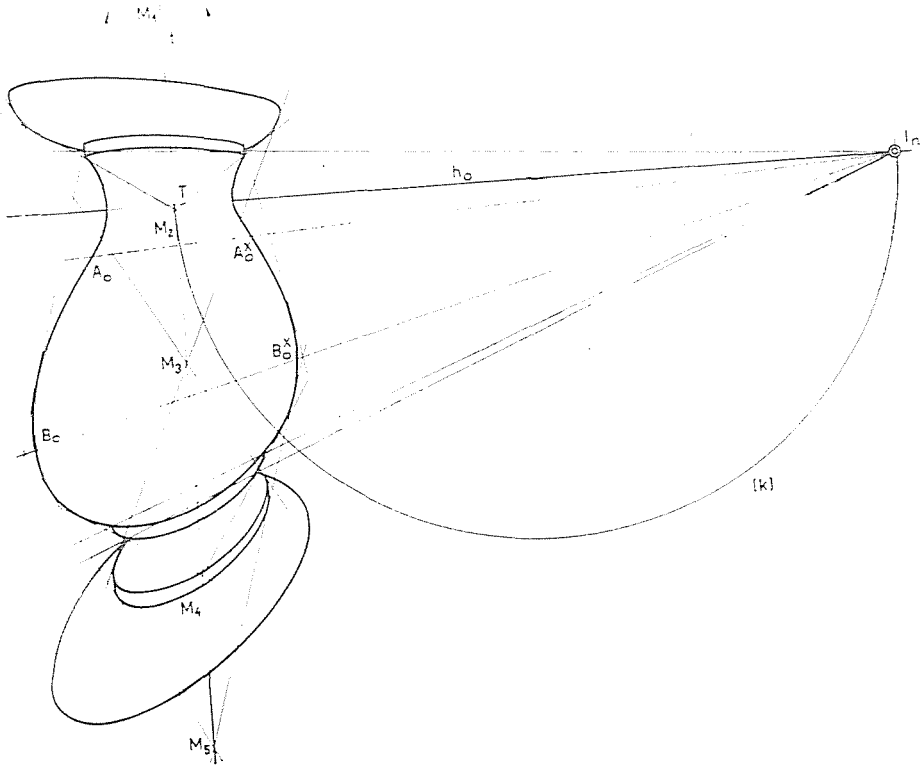


Abb. 6

des Achsenbildes wird der zur Erzeugung des Hauptpunktes F und des Zentrums C in Abb. 3 verwendete Hilfskreis aufgrund einer anderen Erwägung konstruiert.

Die mit der Achse der Fläche und dem Zentrum bestimmte Ebene bildet auch die Symmetrieebene des Projektionskegels. Da die Symmetrieebene des zum Flächenzentrum gehörigen Projektionskegels nicht senkrecht zur Bildebene ist, schneidet die Bildebene von den zwei symmetrischen Hälften des Flächen-Projektionskegels asymmetrische Projektionen aus. Auf dem asymmetrischen Bildumriß können von den in Wirklichkeit symmetrischen Punkt-

paaren jene am leichtesten gefunden werden, die die Brechpunkte des Bildumrisses liefern. Sowohl deren Verbindungsgeraden, wie auch die der übrigen symmetrisch liegenden Punktpaare stehen senkrecht zur Symmetrialebene, stellen also auch die Normalen der Ebene dar.

Sie schneiden sich im gemeinsamen Fluchtpunkt I_n .

Das Bild des Horizontes h_0 geht waagrecht durch den Fluchtpunkt I_n . Die Bilder des Horizontes h_0 und der Achse schneiden sich im Schnittpunkt T . So sind die Punkte T und I_n mit dem noch unbekanntem Zentrum durch ein zueinander senkrecht stehendes waagrecht Geradenpaar verbunden. Eine davon ist die waagrechte Gerade der vertikalen Symmetrialebene, die andere die Normale derselben Ebene. Wird nach Drehen der Horizontalebene auf den Abschnitt zwischen T und I_n des Horizontes h_0 mit dem Durchmesser TI_n ein Kreis (k) gezogen, so muß das eingedrehte Bild des Zentrums auf diesem Kreis liegen. Enthält die Aufnahme noch eine Rotationsfläche, so läßt sich ein weiterer Hilfskreis erzeugen, und der Schnittpunkt der beiden Kreise ist das eingedrehte Bild des Zentrums (C). Seine senkrechte Projektion auf h_0 ergibt den Hauptpunkt F . $F(C)$ ist dann die Distanz.

In der Abbildung sind noch zwei weitere Konturpunktpaare von allgemeiner Lage eingezeichnet. So sind A_0 und A_0^x , B_0 und B_0^x die Konturpunkte je eines Parallelkreises.

Die Verbindungsgeraden der scheinbaren Schnittpunkte von zwei zur Fläche gehörigen, beliebigen Kegeln führen ebenfalls zu I_n . Auch die zum durch das Bild der Achse t gedeckten Punkt der Parallelkreise gehörigen Tangenten schneiden sich in I_0 .

Zu den in Abb. 6 vorgeführten sei noch bemerkt, daß die durch die Projektion der Achse geteilten zwei Hälften der zentralen Projektion der Rotationsfläche stets miteinander in zentral-kollinearem Zusammenhang stehen. Die Achse dieser zentralen Kollineation ist das Bild der Flächenachse, ihr Zentrum ist Punkt I_n .

1.33. *Bestimmung des Zentrums durch Parallelkreise.* In Abb. 7a wurde das Zentrum C auf anderem Weg erstellt. Die Abbildung zeigt das elliptische Bild von zwei voneinander entfernten Parallelkreisen der Fläche.

Es werden zwei mit der Bildebene parallele Sekanten des Tellerkreises f_0 gezeichnet, die wegen der waagrecht Ebene des Tellerkreises auch auf dem Bilde waagrecht verlaufen. Diese Sekanten werden durch die Punkte F_1 und F_2 sowohl in Wirklichkeit wie auch auf dem Bilde halbiert. Durch Verbinden der Punkte F_1 und F_2 erhält man den auf die zur Bildebene parallelen Sekanten senkrechten Durchmesser a_1 , der auf die Bildebene ebenfalls senkrecht steht. So ist dessen Fluchtpunkt der noch unbekanntem Hauptpunkt F .

Beim Äquatorkreis e_0 konstruiert man mit Hilfe des *Brianchonschen Satzes* aus vier beliebigen (1, 2, 3, 4) und aus einer waagrecht aufgenommenen

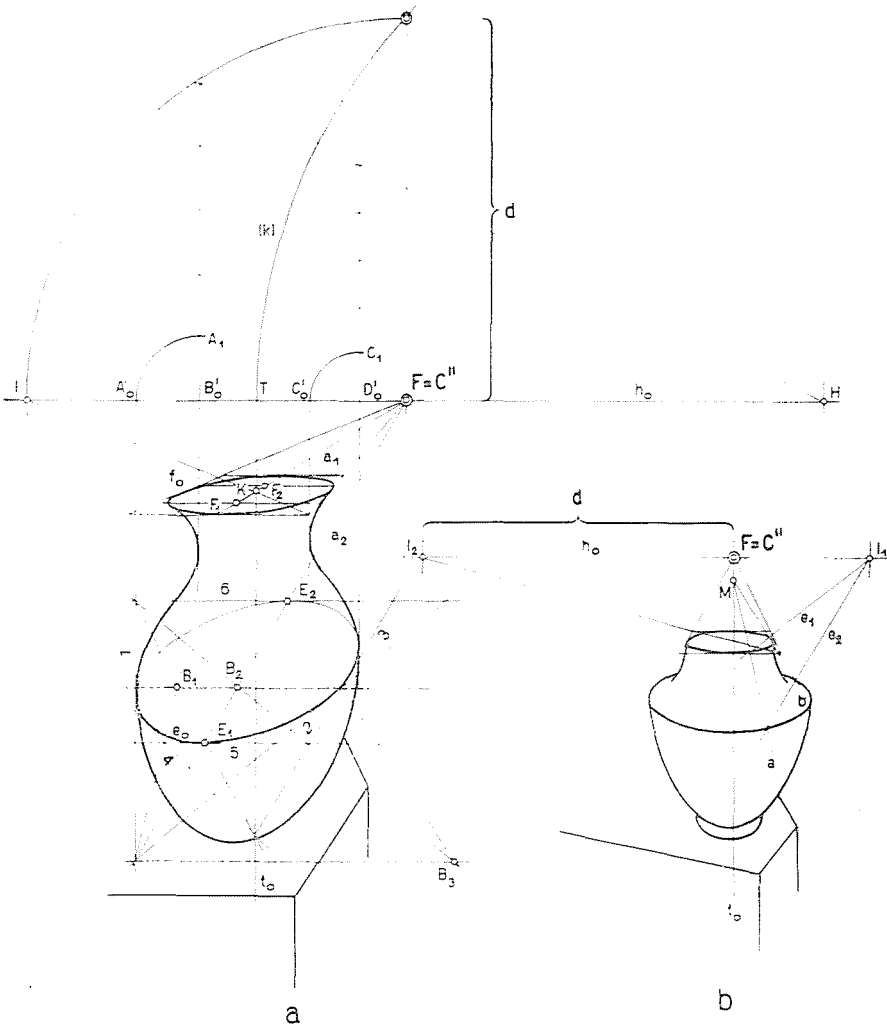


Abb. 7

Tangente (5) die andere (auf den unsichtbaren Teil fallende) waagerechte Tangente (6). In beiden waagerechten Tangenten werden deren Berührungspunkte E_1 und E_2 bestimmt. E_1 und E_2 ergeben a_2 , deren Fluchtpunkt wieder Punkt F ist. Zeichnen wir also den Schnittpunkt der Durchmesser a_1 und a_2 , erhalten wir den Hauptpunkt F .

Senkrecht zu den im Bild vertikalen Kanten des Postaments, also waagrecht wird das Bild der Horizontlinie h_0 gezeichnet. Sodann zieht man die zum Hals- sowie zum Schaftteil der Rotationsfläche gehörigen vertikalen Tangenten, durch die die im Bild vorkommenden verschiedenen Schulterbreiten auf die Linie h_0 projiziert werden. Dort erhält man gemäß Abb. 3 die Punkte

A'_0, B'_0, C'_0 und D'_0 . Aus diesen wird auf die bereits erörterte Weise der Punkt H bestimmt.

Im weiteren konstruiert man vom Punkt F aus zum Tellerkreis der Vase zwei Tangenten, die die Bilder der auf die Bildebene senkrechten Tangenten geben. Danach zeichnet man auch die zur Bildebene parallelen Tangenten, deren Projektionen waagrecht sind. Diese vier Tangenten bestimmen das Bild des einfassenden Quadrats des Tellerkreises. Jede seiner Diagonalen schneidet auf der die sehnehalbierenden Punkte F_1 und F_2 verbindenden Geraden den gemeinsamen Mittelpunkt K des Quadrats und des Tellerkreises aus. Durch diesen Punkt verläuft vertikal das Bild der Flächenachse.

Es ist zu bemerken, daß die Erzeugung des Achsenbildes auch jetzt mit Hilfe des auf den Tellerkreis der Vase gestellten und das untere gewölbte Glied berührenden Kegels erfolgen kann. Die Achse der Rotationsfläche geht durch die Spitze dieses Kegels und ist parallel zu den senkrechten Kanten des Postaments.

Wie in Abb. 3 zu sehen ist, wird der Schnittpunkt T des Achsen- und Horizontbildes durch den Kreis k mit dem Mittelpunkt H — mit dessen Hilfe auf dem Kreis k_1 der Punkt C' ausgeschnitten wurde — berührt. Wird jetzt in Abb. 7 um den Punkt H durch Punkt T ein Kreis gezogen und in Punkt F mit einer auf h_0 gestellten Senkrechten geschnitten, so ist das mit der Horizontalebene eingedrehte Bild (C) des Zentrums bestimmt. Die Entfernung $F(C)$ ist die Distanz, die Entfernung des Zentrums von der Bildebene.

Die Lage des Zentrums C kann in Kenntnis des Hauptpunktes F auch aufgrund einer anderen Erwägung ermittelt werden. Verlängert man die Diagonale des einfassenden Quadrats — mit dem der auf der Achse liegende Mittelpunkt des Tellerkreises bestimmt wurde —, so erhält man in der Horizontlinie den Fluchtpunkt I der Diagonale. Da die Diagonale mit der Bildebene einen Winkel von 45° bildet, liegt der Fluchtpunkt vom Hauptpunkt F genau in der Distanz d . Wird also durch I ein Kreis mit dem Mittelpunkt F gezeichnet, so schneidet dieser auf der in Punkt F gestellten Senkrechten die Eingedrehte (C) des Zentrums C aus.

In Abb. 7b ist das Bild der Rotationsfläche symmetrisch. Zwei Kanten des die beiden Parallelkreise verbindenden Kegels schneiden in den Kreisen parallele Sekanten aus, deren Fluchtpunkt I_1 ist. Die durch I_1 durchgehende Ebene h_0 gibt auf t_0 den Hauptpunkt F an. Der Fluchtpunkt I_2 der Diagonale des mit Hilfe von F zu dem Kreis konstruierten Quadrats liegt von F in der Distanz d .

Wie auf der erörterten Abbildung gezeigt wurde, ist es mit Hilfe des Bildes einer einzigen Rotationsfläche gelungen, die inneren Daten, den Hauptpunkt F , das eingedrehte Bild des Zentrums (C) und die Distanz d zu bestimmen. Dies wurde durch das Bild der zwei Parallelkreise der Rotationsfläche ermöglicht.

1.4. Die Rekonstruktion

1.41. Rekonstruktion der Konturkurve mit Tangenten. In Abb. 8 wird die Rekonstruktion der Konturkurve von zentraler Projektion in senkrechte Projektion mit Hilfe von Tangenten durchgeführt.

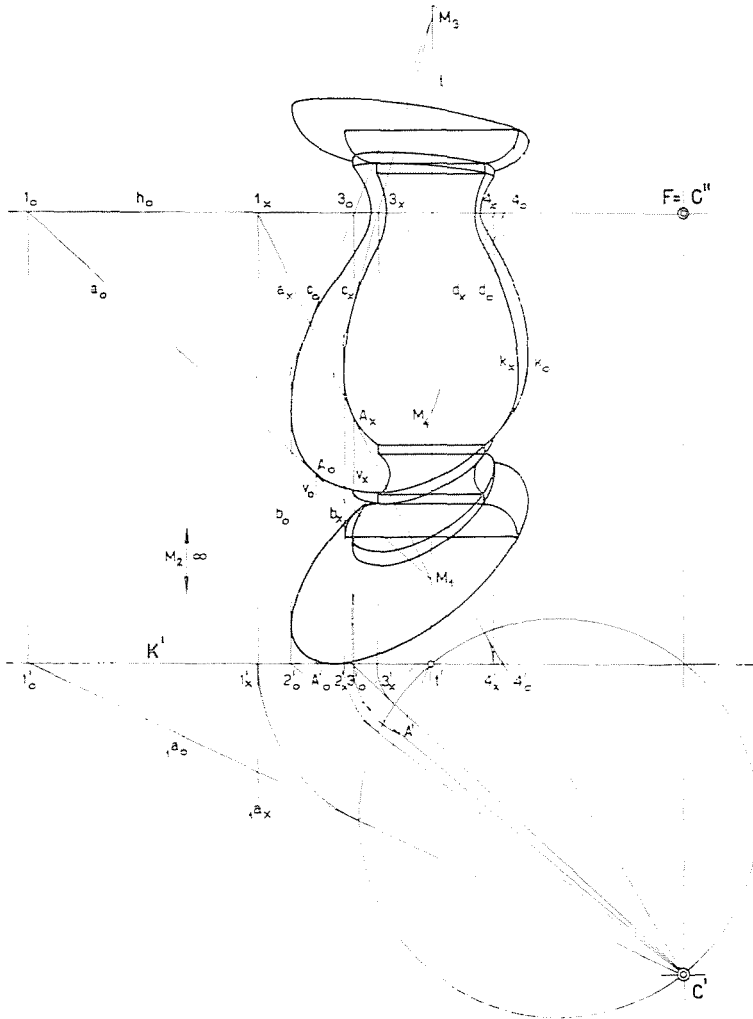


Abb. 8

In dieser Abbildung werden die zentralen Projektionen mit dem Index 0 , die mit deren Hilfe konstruierten senkrechten Projektionen mit einem x bezeichnet. Schließlich werden diese in der waagerechten Projektionsebene noch — dem ersten Bild entsprechend — mit dem Hochzeichen ' versehen.

Die inneren Daten sowie das Bild der Flächenachse sind hier bekannt.

Als Ausgangsschritt zeichnet man durch den Hauptpunkt F das Bild der auf der Linie h_0 ersichtlichen, zur Bildebene senkrechten Horizontalebene, worin das Zentrum C enthalten ist. Der besseren Übersicht halber transformiert man diese Ebene dann — anstatt einzudrehen — auf die zu ihr parallele und sich an die Achse x_{12} fügende waagerechte Projektionsebene und dreht diese in die Bildebene. So erfolgt die in der Horizontalebene durchzuführende Konstruktion in der waagerechten Projektionsebene.

Das Wesentliche dieses Konstruktionsverfahrens liegt darin, daß die Tangentialebenen der Rotationsfläche, deren Lage der zentralen Projektionsebene entspricht und deren Schnittlinien mit der Bildebene in zentraler Projektion Tangenten der Konturkurve sind, um die in der Bildebene liegenden Achse t in eine zur Bildebene senkrechte Lage gedreht werden. Die mit der Bildebene erzeugten Schnittlinien der so gedrehten Projektionsebene des Mongeschen Systems werden in senkrechter Projektion die Tangenten der Konturkurve sein.

Das Drehen der Tangentialebenen um die Achse t erfolgt durch das Drehen ihrer in der Horizontalebene liegenden Hauptlinien und mit Hilfe ihres auf der Achse verbleibenden Punktes. So schneidet die zur Tangente a_0 gehörige Tangentialebene aus der Horizontalebene die Hauptlinie l_0C , auf der Achse den Punkt M_1 aus. Nach erfolgtem Drehen geht die Gerade l_0C in zur Bildebene senkrechter Lage durch den Punkt l_x . Da die ihr zugehörige gedrehte Tangentialebene jetzt bereits die zweite Projektionsebene im Mongeschen System darstellt, wird sie in der Geraden a_x sichtbar, die den beim Drehen unverrückt gebliebenen Punkt M_1 mit l_x verbindet. In senkrechter Projektion ist die Spurlinie a_x die Tangente der Konturkurve.

Auch die Konstruktion des mit Hilfe des auf a_0 liegenden Berührungspunktes A_0 herstellbaren Punktes A_x wurde gezeichnet, u. zw. nach dem früher gezeigten Verfahren mit Hilfe der Geraden v_0 und v_x .

Der ähnliche Konstruktionsgang der zur Achse parallelen Tangente b_x sowie der Tangenten von allgemeiner Lage c_x und d_x ist in der Abbildung ebenfalls dargestellt.

Die zentrale Projektion der Konturkurve weist aber auch Punkte auf, deren senkrechte Projektionen auch Konturpunkte bleiben (Abb. 9). In zentraler Projektion können nur solche Punkte als Konturpunkte erscheinen, in deren Tangentialebene das Zentrum C liegt, in senkrechter Projektion hingegen jene Punkte, deren Tangentialebene eine zweite Projektionsfläche bildet. Im Falle beider Projektionen muß die Tangentialebene des Punktes also beide Bedingungen befriedigen, d. h. die durch das Zentrum C durchgehende zweite Projektionsebene darstellen. So läuft die Spurlinie durch den Hauptpunkt F ; wenn also nach Abb. 9 zu einem Punkte der zentralen Konturkurve aus dem ebenfalls in der Bildebene liegenden Hauptpunkt F eine Tangente gezogen

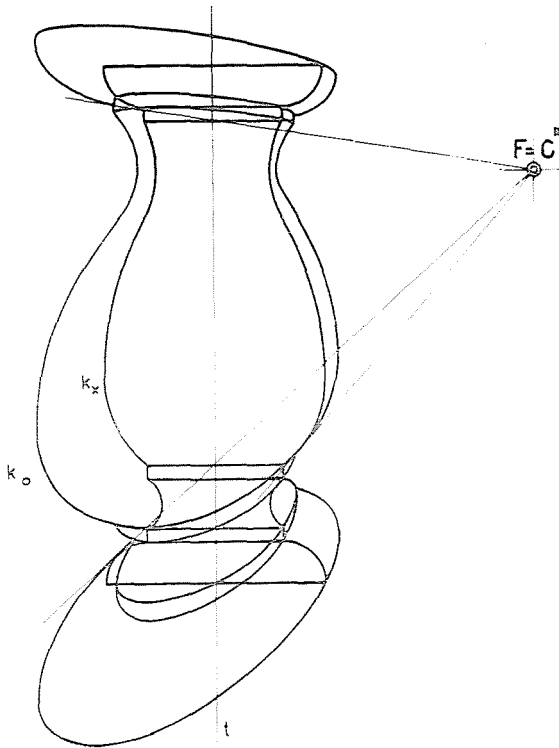


Abb. 9

werden kann, so wird dieser Punkt auch in der senkrechten Projektion ein Konturpunkt sein.

Die Bestimmung der Berührungspunkte der Tangenten ist — mit Rücksicht auf den allgemeineren Charakter der Bildkonturkurve — in der Zentralprojektion nur schätzungsweise möglich und daher kann der Berührungspunkt auch in der Mongeschen Projektion nur mit einer annähernden Genauigkeit bestimmt werden.

1.42. *Rekonstruktion eines allgemeinen Punktes der Fläche.* In Abb. 10 wurde die Rekonstruktion eines Punktes von allgemeiner Lage P_0 mit Hilfe der ersten Projektionsebene des ihm zugehörigen zentralen Projektionsstrahles s bestimmt. Aufgrund der bereits rekonstruierten Bildkontur wurde im Mongeschen System die Schnittkurve g der Projektionsebene mit der Fläche dargestellt, durch die im zweiten Bilde auf dem Projektionsstrahl die senkrechte Projektion P'' des Punktes P ausgeschnitten wurde: durch dessen Ordinate wird der Ort von Punkt P' und s' bestimmt.

1.43. *Rekonstruktion von Parallelkreisen.* Die Rekonstruktion der auf Parallelkreisen liegenden Punkte läßt sich schon mit voller Genauigkeit durchführen. In Abb. 11a wurde als erster Schritt der Rekonstruktion eines belie-

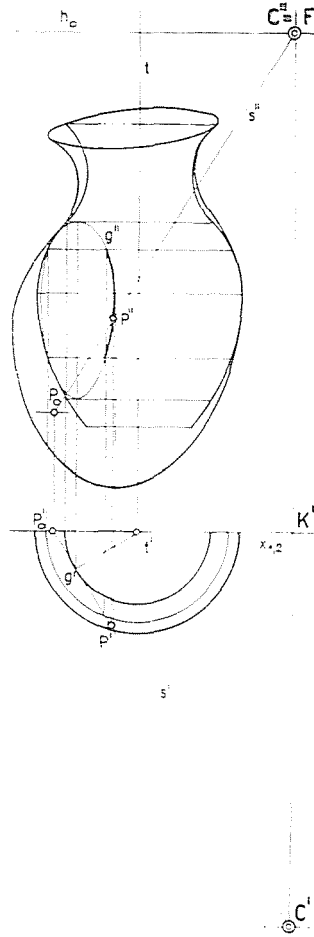


Abb. 10

bigen Punktes A_0 des Bildes des Parallelkreises a_0 , die vertikal erscheinende Tangente f_0 und deren Projektion auf der ersten Bildebene f'_0 bestimmt. Das erste Bild a' des Parallelkreises kann schon gezeichnet werden, da es in dieser Projektion die die Tangente f_0 mit dem Zentrum C verbindende zentrale Projektionsebene berührt, die auf dem ersten Bilde in der Spurlinie n_1 erscheint. Über die zentrale Projektion A_0 des Punktes A auf dem Kreis und deren erstes Bild A'_1 zeichnet man die Bilder des zum Punkte A gehörigen zentralen Projektionsstrahles: s'_1 und s''_1 . Durch s'_1 wird in a' das erste Bild des Punktes A , nämlich A' ausgeschnitten. Mit Hilfe der Ordinate desselben findet man auf s''_1 das Bild A'' . Durch A'' geht das Bild a'' des Parallelkreises in horizontaler Richtung durch, dessen Konturpunkte man aus seinem ersten Bild durch

Projektion erhält. So sind beide senkrechten Projektionen eines beliebigen Parallelkreises und eines auf diesem liegenden Punktes dargestellt.

In der Abbildung ist auch die Rekonstruktion des Punktes B des Äquatorkreises nach einem ähnlichen Verfahren gezeigt.

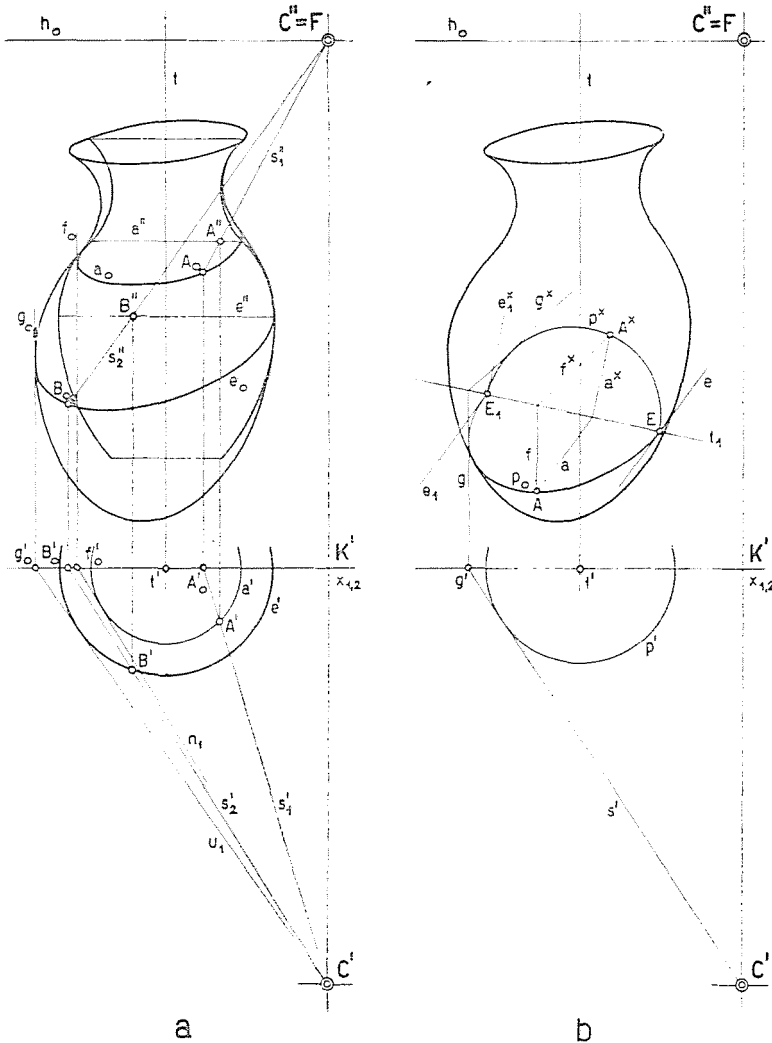


Abb. 11

In Abb. 11b wurde ein Parallelkreis gewählt, bei dem die Umgebung der Punkte mit senkrechten Tangenten nicht mehr sichtbar ist.

In diesem Falle werden auf dem sichtbaren Teil des Parallelkreises fünf beliebige Tangenten aufgenommen. Dann konstruiert man zu einer von diesen

aufgrund des Brianchonschen Satzes eine parallele Tangente, und bestimmt aufgrund des Satzes die Berührungspunkte E und E_1 der beiden parallelen Tangenten e und e_1 .

Sodann wird aufgrund der Affinität die senkrechte Tangente konstruiert. Die E mit E_1 verbindende Gerade t_1 ist der Durchmesser des elliptischen Bildes des Parallelkreises. Dieser stellt die Achse der schiefen Affinität dar, in welcher der Ellipse p_0 der Kreis p^* entspricht. Durch einen beliebigen Punkt A des Kreisbildes zeichnet man die zur Tangente e_1 parallele Sekante a . Diese wird durch den Homologen a_x in t_1 geschnitten, der parallel zu e_1^x verlaufend auf dem Kreis den Homologen A^x des Punktes A ausschneidet.

Danach konstruiert man mit dem Punktpaar $A - A^x$ der Affinität den Homologen f^x der vertikalen Sekante f . Der Homolog g der mit f^x parallelen Tangente g^x des Kreises entspricht der gesuchten vertikalen Tangente des Bildes des Parallelkreises p_0 .

Die Rekonstruktion des Parallelkreises p_0 stimmt von da an mit den in Abb. 11a vorgeführten überein.

In Abb. 12 werden zur Rekonstruktion des Mittelpunktes und Halbmessers der Parallelkreise weitere Methoden dargestellt, wobei nur das zweite Mongesche Bild verwendet wird.

Zuerst zeichnet man die waagerechten und zum Hauptpunkt F führenden Tangenten der Kreisbilder. Diese sind Bilder der zur Bildebene parallelen und auf diese senkrechten Tangenten der Kreise, die in Wirklichkeit senkrecht aufeinander stehen. Ihre Winkelhalbierenden bilden mit den Tangenten beider Richtungen und auch mit der Bildebene Winkel von 45° . So liegt der gemeinsame Fluchtpunkt I der Bilder der Winkelhalbierenden in der Horizontlinie h_0 genau in Distanz d vom Hauptpunkt F . Werden also die Schnittpunkte der erwähnten Tangenten der Kreise mit dem Fluchtpunkt I verbunden, so sind die Bilder ihrer Winkelhalbierenden dargestellt, die auf der Achse die Mittelpunkte O_1, O_2, O_3, O_4 der Parallelkreise ausschneiden. Die senkrechten Projektionen der Parallelkreise gehen in waagerechter Richtung durch die Mittelpunkte. Die auf den Hauptpunkt F gerichteten Tangenten schneiden diese in ihren Endpunkten.

Die Tangente aus dem Hauptpunkt F zum Parallelkreis mit Mittelpunkt O_5 kann nicht gezeichnet werden, da der zum Berührungspunkt gehörige Kreisabschnitt nicht mehr sichtbar ist. Daher läßt sich der Halbmesser mit Hilfe des Kreises mit dem Mittelpunkt O_4 bestimmen.

Die Kreise mit den Mittelpunkten O_4 und O_5 werden durch die beliebig angenommenen waagerechten Sekanten s_4 und s_5 geschnitten. Danach verbindet man deren Halbierungspunkte F_4 und F_5 mit dem Hauptpunkt F . Die so erhaltenen parallelen Durchmesser ergeben auf den Parallelkreisen die Punkte E_4 und E_5 . Die diese verbindende Linie, die eine Kante des die erwähnten zwei Parallelkreise verbindenden Kegels ist, schneidet die Achse in der

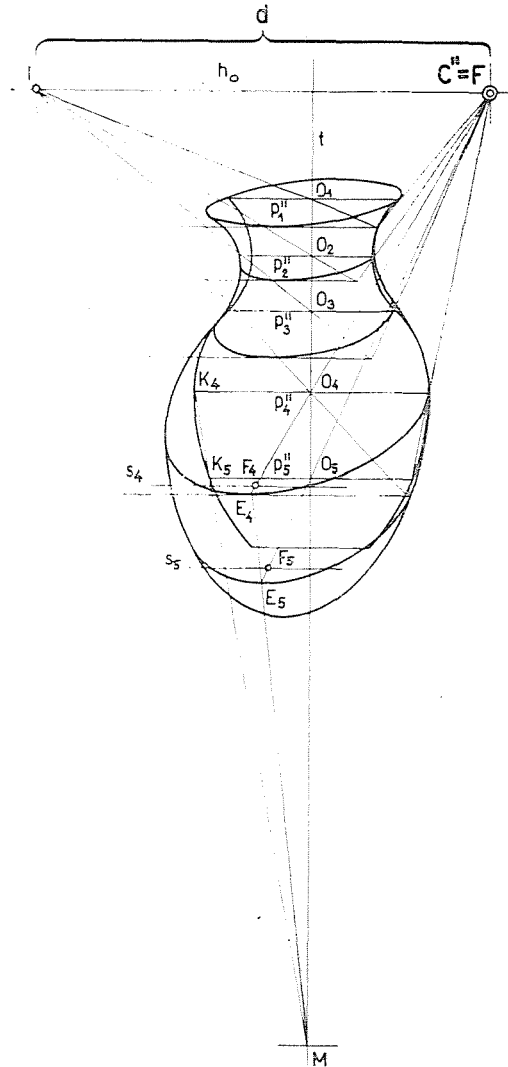


Abb. 12

Spitze M des Kegels. Verbindet man die Spitze M des Kegels mit dem Konturpunkt K_4 des Parallelkreises p_4 , so schneidet die so erhaltene, in der Bildebene liegende Kegelkante — die in senkrechter Projektion Konturkante ist — auch in der Projektion des Parallelkreises p_5 den Konturpunkt K_5 aus.

Wird der Halbmesser des Parallelkreises p_4 durch r_4 , der des Parallelkreises p_5 durch r_5 bezeichnet, so gelten:

$$P_4 : P_5 = O_4 M : O_5 M,$$

so ist

$$P_5 = P_4 \frac{O_5 M}{O_3 M}$$

1.44. *Rekonstruktion der Meridiankurven.* In Abb. 13 ist die Rekonstruktion der Meridiankurve m_0 dargestellt. Zuerst wurde hier die vertikale Tangente f_0 der Flächenbildkontur gezeichnet. Diese bestimmt, verbunden mit dem Zentrum C , die auf die Spurlinie n_1 gestellte erste Projektionsebene, die den Äquatorkreis e der Fläche berührt. Durch die die vertikale Tangente g_0 der Projektion der Meridiankurve m_0 mit dem Zentrum verbindende erste Projektionsebene mit der Spurlinie u_1 wird auf dem Äquatorkreis der erste

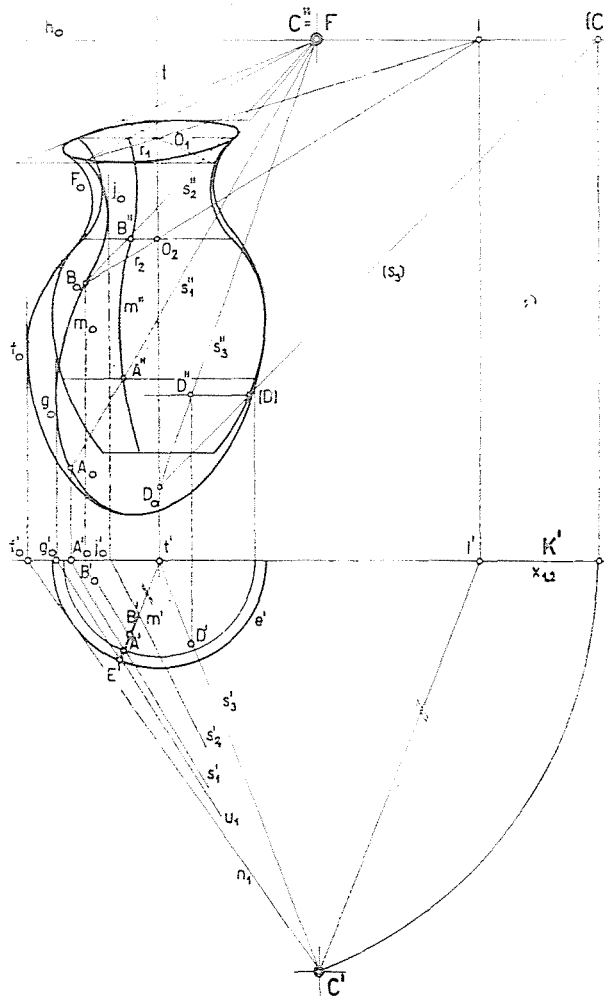


Abb. 13

Konturpunkt E' der Meridiankurve m ausgeschnitten. Das erste Bild m' der Meridiankurve verbindet E' mit t' . Das erste Bild A'_0 des Punktes A_0 der Meridiankurve wird mit dem zentralen Projektionsstrahl s'_1 auf m' projiziert, wo man A' erhält. In dessen Ordinate liegt A'' in s''_1 . Der Punkt B_0 wurde ohne Benutzung des ersten Bildes aufgrund anderer Erwägung konstruiert.

Zuerst wurde der zum Punkt F_0 auf dem Tellerkreis der Meridiankurve m gehörige Halbmesser r_1 konstruiert. Dieser geht durch den Mittelpunkt O_1 des Tellerkreises, der im Schnittpunkt der Diagonale des in Abb. 7 benutzten Umfassungsquadrats mit der Achse t liegt. Wird der Halbmesser r_1 bis zum Bilde der Horizontallinie verlängert, erhält man dessen Fluchtpunkt I . Der zu Punkt B_0 gehörige Halbmesser r_2 des Parallelkreises ist parallel zu r_1 , daher läuft dessen Bild ebenfalls in den Fluchtpunkt I . Der Mittelpunkt O_2 des zu B_0 gehörigen Parallelkreises liegt im Schnittpunkt von Achse t und r_2 . Die waagerechte Vorderansicht dieses Parallelkreises geht durch O_2 . Auf dieser schneidet die Projektion s''_2 des in das Zentrum C gerichteten Projektionsstrahles s_2 den Punkt B'' aus. B' erhält man durch Projektion des Projektionsstrahles s_2 auf das erste Bild.

Auch der in waagerechter Projektion auf dem Kehlkreis liegende Punkt der vertikalen Tangente j_0 der Meridiankurve wurde ermittelt. In der Abbildung wurde ferner auch die Konstruktion des Punktes D_0 der durch Achse t gedeckten Meridiankurve gezeigt. Die Verbindungsebene des Zentrums C und der Achse t — in der auch die erwähnte Meridiankurve liegt — wird um Achse t in die Ebene der Perspektivprojektion gedreht. Der Projektionsstrahl s_3 des Punktes D_0 kommt damit in Lage (s_3) und schneidet auf der bereits rekonstruierten Bildkontur die Gedrehte (D) des Punktes D aus. Man erhält dann durch waagerechtes Rückdrehen in s''_3 den Punkt D'' , dessen Ordinate in s''_3 den Punkt D' ausschneidet.

1.45. Rekonstruktion reicher Oberflächenverzierungen. Die punktweise Rekonstruktion der figuralen oder ornamentalen Verzierungen der Fläche würde unvertretbar arbeitsaufwendig sein. Es ist in solchen Fällen zweckmäßig, den verzierten Flächenteil durch ein dichtes Oberflächennetz aufzuteilen. Das Netz kann aus Parallelkreisen und Meridiankurven zusammengestellt werden.

Die Perspektive dieses Netzes wird mit Hilfe senkrechter Projektionen konstruiert. Die Verzierung wird von der Zentralprojektion auf die in der vertikalen Projektion ebenfalls vorhandene Netzaufteilung nach Augenmaß übertragen.

Die Fluchtlinie i ist mit der Horizontlinie h identisch, wenn die Achse der Rotationsfläche vertikal und die Bildebene bei der Aufnahme geneigt war. Dagegen ist sie mit der Horizontlinie h nicht identisch, wenn im Augenblick der Aufnahme die Bildebene vertikal, die Rotationsflächenachse hingegen geneigt war. Obzwar im allgemeinen nahezu immer der erste Fall, — den auch die Stabilität erfordert, — vorliegt, begegnet man — wenngleich selten — sogar auf dem Gebiet der Architektur auch dem zweiten Fall. Man denke nur an den berühmten schiefen Turm in Pisa.

Sodann zeichnet man die zwei zu i parallelen Sekanten des Deckkreises gemäß der in Abb. 7 vorgeführten Konstruktion. Diese sind auch mit der Bildebene parallel. Verbindet man ihre Halbierungspunkte, erhält man das Bild des auf dieselben senkrechten Kreisdurchmessers, dessen Fluchtpunkt I_3 auf der Fluchtlinie i durch den Durchmesser ausgeschnitten wird. In Aufnahmelage wurde Punkt I_3 durch die mit dem zur Fluchtlinie i senkrechten Kreisdurchmesser parallele Gerade, die durch das Zentrum C geht, auf der Bildebene ausgeschnitten. Wenn daher in Punkt I_3 auf die in der Bildebene liegende Fluchtlinie i eine senkrechte Ebene gestellt wird — die in senkrechter Projektion als Gerade m zu sehen ist —, so muß das Zentrum C in dieser Ebene liegen.

Im nächsten Schritt wird der in Abb. 6 schon benutzte Kreis k auf Grund derselben Erwägung konstruiert. Zuerst werden die auf den durch das Achsenbild geteilten asymmetrischen zwei Teilen der Kontur der Rotationsfläche liegenden, einander entsprechenden, scheinbaren Brechpunkte miteinander verbunden. Die so erhaltene Gerade l schneidet auf der Fluchtlinie i den Punkt I_n aus. Wenn auf der Kontur kein Brechpunktpaar liegt, so entspricht auch die zum durch die Achse gedeckten Punkt eines beliebigen Parallelkreises gehörige Tangente, da die Bilder einer jeden in den Punkt I_n fliehen. Um dies zu veranschaulichen, wurde in Abb. 14 unter Anwendung von weiteren vier beliebigen Punkten des Achselkreises mit Hilfe des Pascalschen Satzes die zum durch die Achse gedeckten Punkt A_0 des Achselkreises gehörige Tangente j dargestellt.

Da zu den in der zentralen Projektionsebene der Rotationsachse liegenden Parallelkreispunkten gehörigen Tangenten sowie die die scheinbaren Brechpunktpaare der von dem Zentrum C aus gesehenen Konturkurve verbindenden Geraden auf die zentrale Projektionsebene gleicherweise senkrecht stehen, ist I_n der Fluchtpunkt der auf die zentralen Projektionsebene senkrechten Geraden, der Normalen. Sonach ist Punkt I_n in der Situation der Aufnahme der Durchstoßpunkt der auf die zentrale Projektionsebene mit Spurlinie t_0 senkrechten Geraden in der Bildebene. Wird daher durch Punkt I_n eine auf die Spurlinie t_0 senkrechte Ebene gestellt und in dieser auf die den mit t_0 gebildeten Durchstoßpunkt T mit I_n verbindende Gerade, als Durchmesser, ein Kreis gezeichnet, so muß das Zentrum C in dieser liegen. Die senkrechte

Projektion k'' des jetzt gezeichneten Kreises k schneidet auf der früher konstruierten Projektionsfläche mit Spurlinie m die senkrechte Projektion C'' des Zentrums C aus. C'' ist mit dem Hauptpunkt F identisch.

Wird der Kreis k um seinen Durchmesser $I_n T$ in die Bildebene gedreht, und von Punkt C'' aus auf den Durchmesser eine senkrechte Gerade gestellt, so schneidet diese auf (k) das eingedrehte Bild (C) des Zentrums aus. Der Abschnitt $(C) F$ stellt die Distanz d dar. Somit sind sämtliche inneren Daten bekannt. Die Richtung der Ebenen der Parallelkreise erhält man, indem man das Zentrum C mit der Fluchtlinie i verbindet. Die Flächenachse steht senkrecht auf diese Ebene.

Aufgrund der zur Verfügung stehenden Angaben kann der Ort der Achse in der Ebene $C t_0$ nicht bestimmt werden, die Richtung der senkrechten Projektion in der Bildebene und deren Neigung zur Bildebene können aber bereits abgeleitet werden. Das wird mit Hilfe einer zur durch das Zentrum C durchgehenden Achse parallelen Geraden bewerkstelligt. Deren senkrechte Projektion t_x'' geht durch C'' und steht senkrecht auf i , ist daher mit der Fluchtlinie m der früher durch Punkt I_3' auf i gestellten senkrechten Ebene identisch und liefert den Fluchtpunkt I_t der Achse in t_0 . Wird die Gerade t_x'' um m in die Bildebene gedreht, kommt sie in die Lage (t_x) . Der mit t'' gebildete Winkel ist zufolge des bestehenden Parallelverhältnisses mit dem durch die Flächenachse und die Bildebene gebildeten Winkel identisch.

2.2. *Rekonstruktion der Rotationsfläche mit zur Bildebene nicht paralleler Achse, falls die inneren Daten bekannt sind*

2.21. *Die Rekonstruktion der Konturkurve.* Bei Aufnahmen, wo die inneren Daten gegeben sind oder dem vorigen Punkt gemäß ermittelt wurden, vollzieht man die Rekonstruktion der Konturkurve von Rotationsflächen mit zur Bildebene paralleler Achse nach der in Abb. 8 dargelegten Methode.

Das Wesen dieses Verfahrens besteht darin, daß die auf der zentralen Projektion der Rotationsfläche durch die Tangenten der Kontur bestimmten zentralen Projektionsebenen — die zugleich auch die Tangentialebenen der Fläche sind — um die Achse der Ebene in eine Projektionsflächenlage zur Bildebene der senkrechten Projektion gedreht werden. In der senkrechten Projektion erscheinen die so gedrehten Tangentialebenen als gerade Linien und ergeben gleichzeitig die Tangenten dieser Projektion (S. Abb. 15).

Die erste und zweite Bildebene der zu ermittelnden vertikalen Projektionen werden durch die Gerade i der Bildebene der zentralen Projektion gehend aufgenommen. So ist die Gerade i als Fluchtlinie der Flächen-Parallelkreisebenen mit der Achse x_{12} identisch. Diese Anordnung der Bildebenen hat den Vorteil, daß sich sowohl die Spurlinien jeder Ebene in der Bildebene der zentralen Projektion wie auch deren erste und zweite Spurlinie in der Achse x_{12}

schneiden. Als erste Bildebene wird die Verbindungsebene des Zentrums C und der Achse x_{12} gewählt, die somit zu den Parallelebenen parallel ist. Daher kann die auf die Parallelkreisebenen senkrechte Achse t der zu rekonstruierenden Fläche in die zweite Bildebene aufgenommen werden, die die durch das Zentrum C gehende erste Bildebene in der Achse x_{12} senkrecht schneidet. Zuzufolge der Beziehung zwischen Achse und zweiter Bildebene ist die Kontur der in der zweiten Bildebene dargestellten senkrechten Projektion zugleich auch die Meridiankurve der Fläche.

In Abb. 15 kommen das zentrale Bild der Vase der vorigen Abbildung sowie die mit dessen Hilfe bestimmten inneren Daten, der Hauptpunkt F , die Distanz d und die Fluchtlinie i der Parallelkreisebenen vor.

Vor allem wird das zentrale Bild in der Weise eingestellt, daß die Fluchtlinie i waagrecht liegt. Sodann wird eine auf i durch den Hauptpunkt F senkrechte dritte Bildebene aufgenommen, die die Projektion t_0 der Flächenachse im Fluchtpunkt I_t schneidet. Die Achse ist mit CI_t parallel, daher senkrecht auf i und schneidet diese in ihrem Schnittpunkt mit der Projektion t_0 in T . Wird die dritte Bildebene um ihre Schnittlinie in die Bildebene der zentralen Projektion gedreht, so gelangt das Zentrum C in die Lage C_3 . Dieser Punkt befindet sich in der Entfernung d von F . Die Verbindungslinie der Punkte C_3 und I_t bestimmt die Richtung des dritten Bildes der Achse t und ergibt gleichzeitig den durch die zentrale Bildebene und die Achse gebildeten Winkel α .

Auf der dritten Bildebene ist die erste Bildebene als Gerade C_3i'' , die zweite in der zu C_3I_t parallelen Projektion t''' der Achse sichtbar. Damit auch die erste und zweite Bildebene in ursprünglicher Größe, ohne Verzerrung sichtbar sind, dreht man auch diese um die Achse x_{12} in die Ebene der zentralen Projektion. Nach dem Drehen der ersten Bildebene kommt das Zentrum C in den Punkt C_1 , durch Eindrehen der zweiten Bildebene die Flächenachse in t zu liegen.

Die in t_0 liegenden Punkte werden vom eingedrehten Punkt (C) aus auf t projiziert. (C) ist nämlich das Zentrum derjenigen zentralen Kollineation, die zwischen den in der zentralen Bildebene liegenden eingedrehten Bildern der Punkte der zweiten Bildebene und den zentralen Projektionen dieser Punkte besteht und deren Achse x_{12} ist. (C) wurde durch das Drehen um i der zu der durch das Zentrum gelegten, zur zweiten Bildebene parallelen Ebene in die Ebene der zentralen Projektion erhalten. Die Drehrichtung stimmt mit der Richtung des früheren Drehens der zweiten Bildebene überein, wie das im dritten Bild gut ersichtlich ist.

Nach den jetzt vorgeführten vorangehenden Konstruktionen kann jede beliebige Tangente der Kontur der zentralen Projektion mit ihrem Berührungspunkt rekonstruiert werden.

Das Drehen um die Flächenachse der Tangentialebenen von der Lage einer zentralen Projektionsebene in die Lage der zweiten Projektionsebene

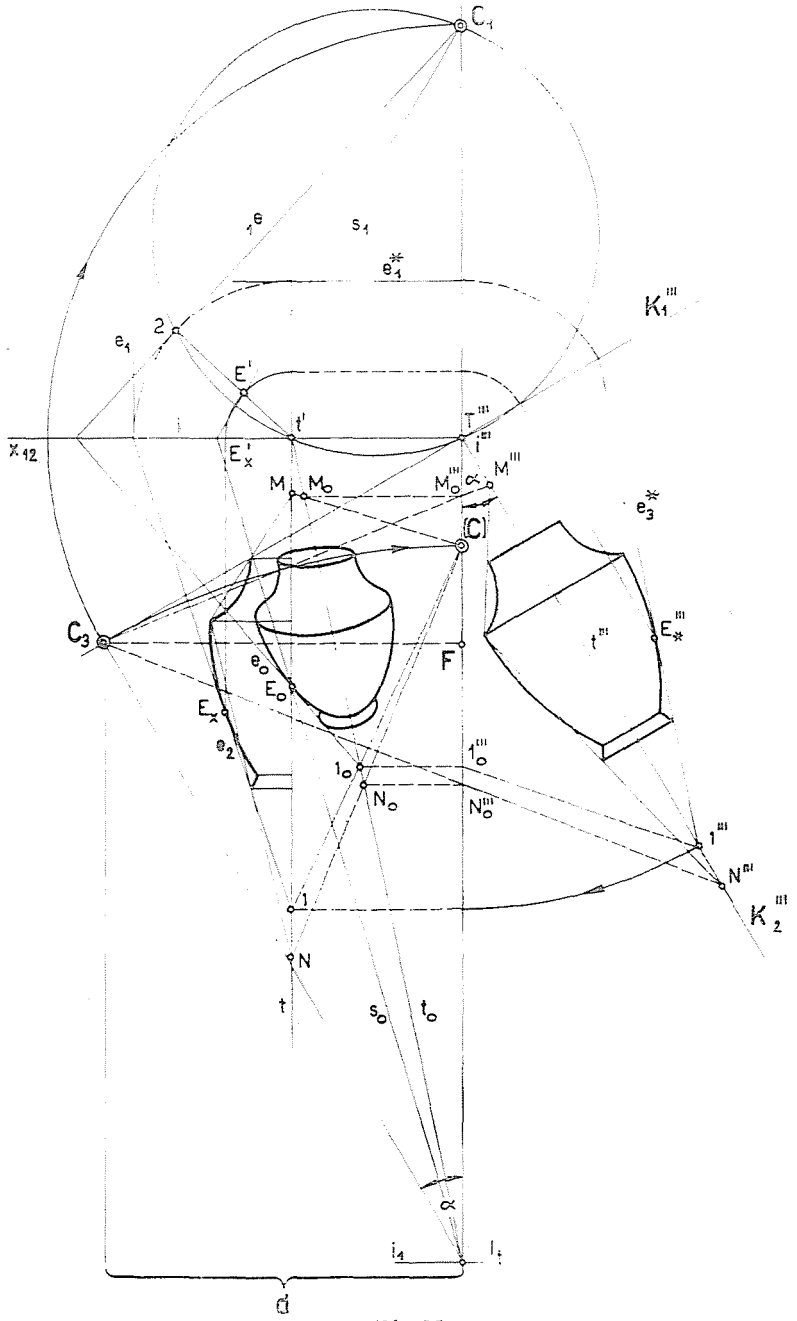


Abb. 15

bewerkstelligt man durch das Drehen ihrer ersten Spurlinien und mit Hilfe ihrer auf der Achse verbleibenden Punkte.

Die zentrale Projektionsebene der Tangenten e_0 schneidet t_0 im Punkt l_1 , dessen senkrechte Projektion der auf t gelegte Punkt l ist. Dieselbe Ebene schneidet die erste Bildebene in der Geraden ${}_1e$. Wird diese Ebene um die Achse in die Lage der zweiten Projektionsebene gedreht, so wird diese die erste Bildebene in der Spurlinie e_1 , die zweite in der durch Punkt l gehenden Spurlinie e_2 schneiden. Die Spurlinie e_2 ist in ihrer senkrechten Projektion Tangente der Konturmeridiankurve. Die Rekonstruktion des Berührungspunktes E_0 erfolgt durch die erste Projektionsebene, die von der Lage einer durch denselben verlaufenden zentralen Projektionsebene ist, und in der Bildebene der zentralen Projektion in der Spurlinie s_0 , in der ersten Bildebene in s_1 sichtbar ist. Letztere schneidet die Verbindungsebene $2t$ im ersten Bild E' des Berührungspunktes E . Die Entfernung $E't'$ ist der Halbmesser des Parallelkreises des Punktes E , mit dessen Hilfe schon der Berührungspunkt E_x in e_2 ermittelt werden kann.

In der Abbildung ist auch die Rekonstruktion der Tangenten und der Berührungspunkte, anstatt in der zweiten, in der dritten Bildebene vorgeführt. Hier wurde die Tangentialebene des Punktes E_0 in die Lage einer dritten Projektionsebene gedreht, die dann die erste Bildebene in der Gerade e_1^* schneidet, deren drittes Bild als Punkt erscheint. Verbindet man letzteren mit l'' , erhält man die dritte Spurlinie e_3^* der gedrehten Tangentialebene, die die Tangente der in der dritten Bildebene dargestellten senkrechten Projektion ist. l'' wurde durch Projizierung mit Hilfe von C_3 aus l'' bestimmt. Die Ermittlung von E'' erfolgte auch hier mit Hilfe des Parallelkreis-Halbmessers $E't'$.

2.22. Rekonstruktion der Parallelkreise. Die Rekonstruktion der Parallelkreise ist in Abb. 16 gezeigt. Zuerst konstruiert man die zentralen Projektionen ihrer Mittelpunkte. Dies geschieht nach dem Verfahren in Abb. 12. Zuerst zeichnet man die zum Betrachter näheren, mit der Bildebene parallelen Tangenten und die auf diese senkrechten rechtseitigen Tangenten der Bilder aller Parallelkreise. Die ersteren sind parallel zu i , die letzteren schneiden sich in Punkt I_1 . Ihre Winkelhalbierenden sind im Bilde auf Punkt I_2 gerichtet und schneiden auf der Achsenprojektion t_0 die Bilder der Mittelpunkte der Kreise aus. Diese werden aus t_0 mit Hilfe von (C) auf t projiziert.

Die Ermittlung der Halbmesser der Parallelkreise wird in Verbindung mit dem Achselkreis mit Mittelpunkt O gezeigt. Man zeichnet durch Punkt O_0 das Bild des zu i parallelen Durchmessers f_0 . Wird dessen auf dem Achselkreis liegender Endpunkt A_0 aus I_1 parallel zu der Achse auf i projiziert, erhält man den Punkt A' . Die Entfernung $A't'$ ist der Halbmesser des Achselkreises, da das Viereck $A_0A'TO_0$ ein rechteckiges Parallelogramm ist.

Der Halbmesser r kann auch anders konstruiert werden. Zu dem Bild

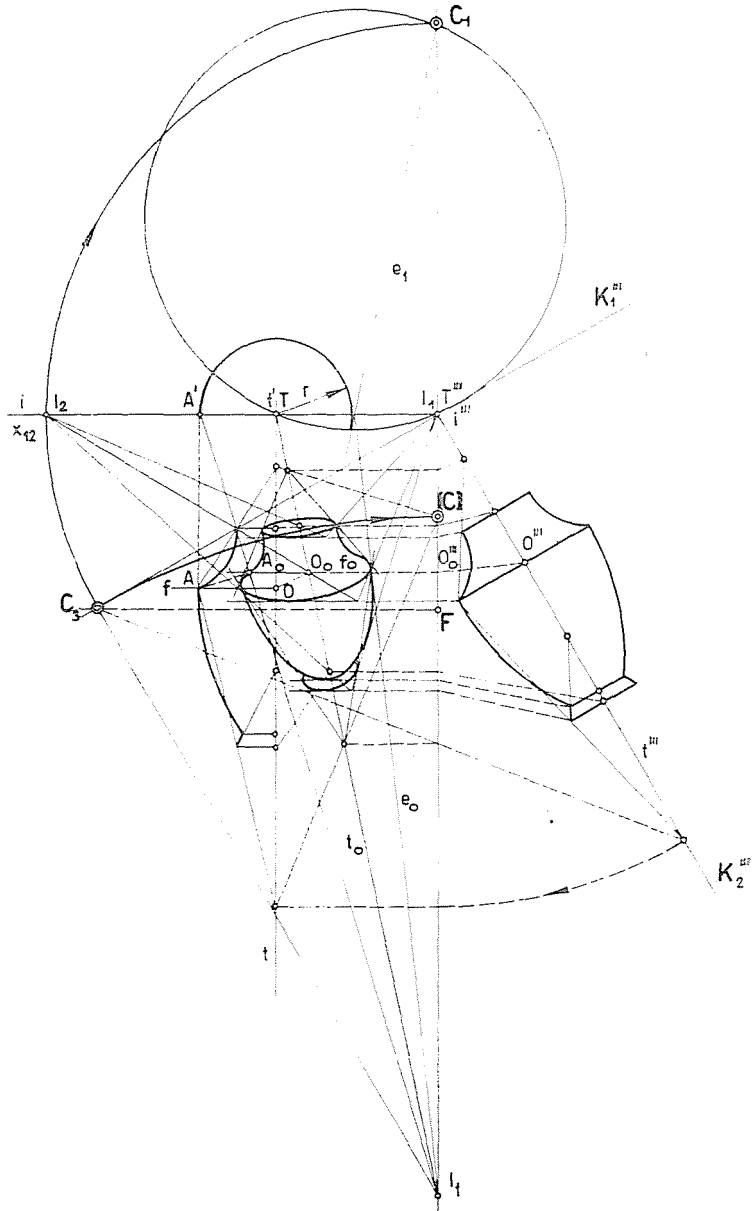


Abb. 16

des Achselkreises wird von I_t aus die Tangente e_0 dargestellt. Die durch diese gelegte zentrale Projektionsebene — die gleichzeitig eine erste Projektionsebene bildet — erscheint in der ersten Bildebene als Spurlinie e_1 , die der Achselkreis mit dem Mittelpunkt t' berührt. So ist dessen Halbmesser gleich der Entfernung $t'e_1$.

Durch eine weitere Erwägung erhält man ebenfalls den Halbmesser r des Achselkreises, falls man den Endpunkt A_0 des durch den Punkt O_0 geführten Durchmessers f_0 von (C) aus auf den durch Punkt O gehenden Durchmesser f projiziert. Zwischen der in die Ebene der zentralen Projektion gedrehten, in der zweiten Bildebene liegenden Projektion eines jeden Punktes der Fläche und der zentralen Projektion desselben besteht nämlich die kürzlich benutzte zentrale Kollineation.

Schließlich projiziert man unter Anwendung der dritten Bildebene die Mittelpunkte und die mit i parallelen Tangenten der Parallelkreise von der zentralen Projektion auf das in der Geraden I_1I_t sichtbare dritte Bild dieser Projektion. Wird Punkt C_3 mit diesen verbunden, erhält man die dritten Bilder der Projektionsstrahlen. Die Projektionsstrahlen der Mittelpunkte schneiden t'' in den Bildern der Mittelpunkte der Parallelkreise. Durch diese konstruiert man die in je einer auf t'' senkrecht stehenden Geraden sichtbaren Ebenen der Kreise. Danach werden auf diese die zugehörigen, früher bereits aufgezeichneten, zu i parallelen Tangenten, die im dritten Bilde Punkte darstellen, projiziert. Hierdurch erhält man die Halbmesser und Konturpunkte der Parallelkreise.

In Kenntnis eines Parallelkreises mit bereits bekanntem Halbmesser kann man den Halbmesser eines weiteren Parallelkreises auch durch den Verbindungskegel des zu rekonstruierenden und des schon rekonstruierten Parallelkreises ermitteln.

2.23. *Rekonstruktion der Meridiankurve.* In Abb. 17 wird eine beliebige Meridiankurve mit Hilfe des auf dem bereits rekonstruierten Achselkreis befindlichen Punktes P_0 der Meridiankurve rekonstruiert. Punkt P_0 wird von I_1 aus auf den Durchmesser f_0 projiziert, was eine Projizierung in senkrechter Richtung auf die senkrechte Bildebene bedeutet. Wird dann diese mit Hilfe von (C) auf f projiziert, erhält man die senkrechte Projektion P'' des erwähnten Schnittpunktes. Die Meridiankurve kann dann schon aus der Konturmeridiankurve durch Affinität konstruiert werden, deren Achse t , und deren Richtung senkrecht auf t ist, wobei der Punkt P'' und der Konturpunkt des betreffenden Parallelkreises eines ihrer Punktpaare bilden.

Auf Grund einer anderen Erwägung konstruiert man den Fluchtpunkt I_2 des Durchmessers O_0P_0 . Im ersten Bilde ist die Projektion der Meridiankurve in Punkt T parallel zur Verbindungsgeraden C_1I_2 . Bei weiterer Überlegung konstruiert man die Spurlinie s_1 der ersten Projektionsebene, die die Lage einer sich an die Gerade I_tP_0 anschmiegenden zentralen Projektionsebene

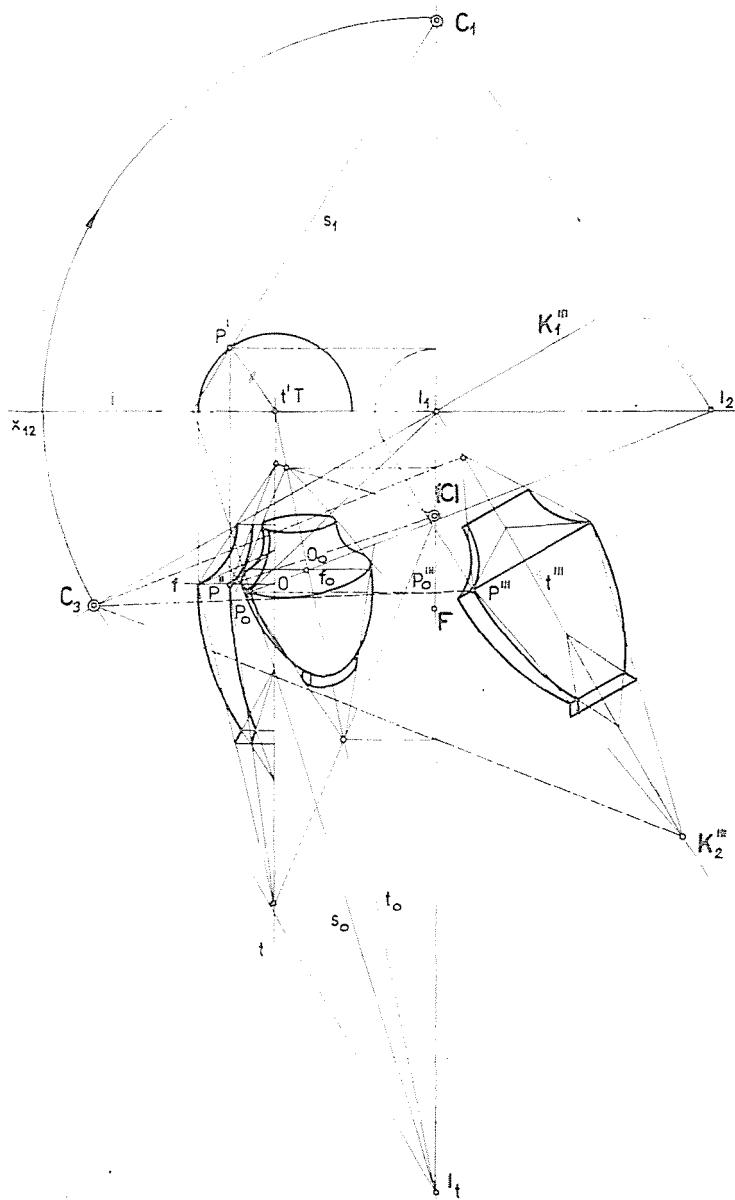


Abb. 17

einnimmt. Diese schneidet das erste Bild des Achselkreises im Punkt P' , der mit t' verbunden das erste Bild der Meridiankurve ergibt.

Schließlich zeichnet man mit Hilfe der dritten Bildebene das dritte Bild P_0''' des Punktes P_0 , und wird dieses von C_3 aus auf das dritte Bild des Achselkreises projiziert, erhält man P''' . Das dritte Bild der Meridiankurve wird auch hier durch Affinität aus der Konturkurve erstellt.

2.3. Trennung der zur Achse der Rotationsfläche parallelen und nicht parallelen Aufnahmen

Die in Abb. 14 gezeigte Konstruktion ist geeignet, die inneren Daten und die Lage der Achse zu der Bildebene mit ihrer Hilfe zu bestimmen. Die angewendete Methode ermöglicht, die Aufnahmen danach zu unterteilen, ob ihre Bildebenen parallel oder nicht parallel zu der Achse stehen.

Falls der Hauptpunkt F in die Richtlinie der Parallelkreise i fällt, ist die Achse zu der Bildebene parallel. Wenn aber der Hauptpunkt F außerhalb der Richtlinie i liegt, besteht zwischen Achse und Bildebene keine Parallelität.

2.4. Unanwendbarkeit der stereoskopischen Auswertung bei der Rekonstruktion aufgrund einer Konturkurve

Wie darauf schon früher hingewiesen wurde, ist die Rekonstruktion der Rotationsfläche mit Hilfe der Konturkurve aufgrund von zwei oder mehreren Aufnahmen durch stereoskopische Auswertung nicht möglich. Auf den von verschiedenen Standpunkten aus aufgenommenen Bildern befinden sich nicht dieselben Punkte der Fläche in Konturlage. So ergeben nicht zwei Bilder derselben Kurve die stereoskopisch gesehene Kontur, sondern je ein Bild von zwei verschiedenen Kurven. Die durch stereoskopische Vereinigung entstandene Kurve verläßt die Fläche und berührt sie nur in einigen Punkten.

In Abb. 18 ist dieser Umstand veranschaulicht. Hier ist eine Kugel dargestellt, deren Mittelpunkt, zusammen mit der die Zentren C_1 und C_2 verbindenden Basislinie b eine zur Bildebene parallele Ebene bestimmt. Die Tangentialkreise der zwei Projektionskegel der Kugel k_1 und k_2 erscheinen als Geraden. Werden diese stereoskopisch vereinigt, vereinigen sich die linkseitigen Punkte 1 und 3 von k_1 und k_2 in Punkt 5, die rechtseitigen Punkte 2 und 4 derselben in Punkt 6, die nicht auf der Kugeloberfläche liegen. Die Schnittpunkte der Tangentialkreise k_1 und k_2 , die sich hier deckenden Punkte A und B , sind ebenfalls Punkte der stereoskopischen Kontur. Da diese mit 5 und 6 in einer Geraden sichtbar sind, bestimmen sie gemeinsam eine Flachkurve, in Form einer mit e bezeichneten Ellipse. Die zwei Projektionskegel besitzen nämlich in den Punkten A und B zwei gemeinsame Tangentialebenen und ihre Durchdringungen erzeugen zwei Kegelschnitte: die Kurven e und h .

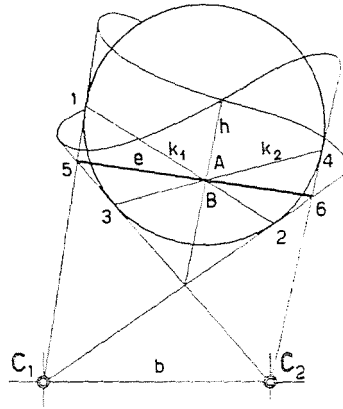


Abb. 18

Von den Punkten A und B abgesehen, die sich auf der Kugel befinden, liegen die übrigen Punkte der Ellipse e außerhalb der Oberfläche der Kugel.

So kann die Rekonstruktion der Rotationsfläche aus der zentralen Projektion mit Hilfe der Bildkontur nur eine Aufgabe der Einbildphotogrammetrie sein.

3. Rekonstruktion einer Rotationsfläche mit auf die Bildebene senkrechter Achse

3.1. Rekonstruktion einer Rotationskuppel

In der Architektur kommt die durch eine Rotationsfläche abgeschlossene Raumgestaltung schon seit dem Altertum oft vor. Nicht nur bei Rotunden mit Kreisgrundriß, sondern auch an markanten und repräsentativen Punkten der Gebäude mit geradlinigem Grundriß sind in unzähligen Fällen durch Rotationsflächen ausgestaltete Räume, hauptsächlich Kuppeln anzutreffen.

In Fällen, wo die Rotationsfläche nicht von außen, sondern von innen betrachtet wird, also nicht als Masse, sondern als Raum erscheint, ändert sich auch die Methode der Rekonstruktion. Es ist hier keine von außen sichtbare Kontur vorhanden, so kann die Rekonstruktion aufgrund eines Bildes mit Hilfe anderer Flächenpunkte und -kurven, hauptsächlich von Parallelkreisen durchgeführt werden.

In solchen Fällen erweisen sich die von waagerechter Bildebenenstellung aus gemachten Aufnahmen als am besten geeignet, da es sich — wie bereits erwähnt — meistens um die Rekonstruktion von hochgelegenen Gewölben, Kuppeln handelt. Abbildung 19 zeigt die Rekonstruktion einer sog. Vierungskuppel über der Kreuzung von Längs- und Querschiff.

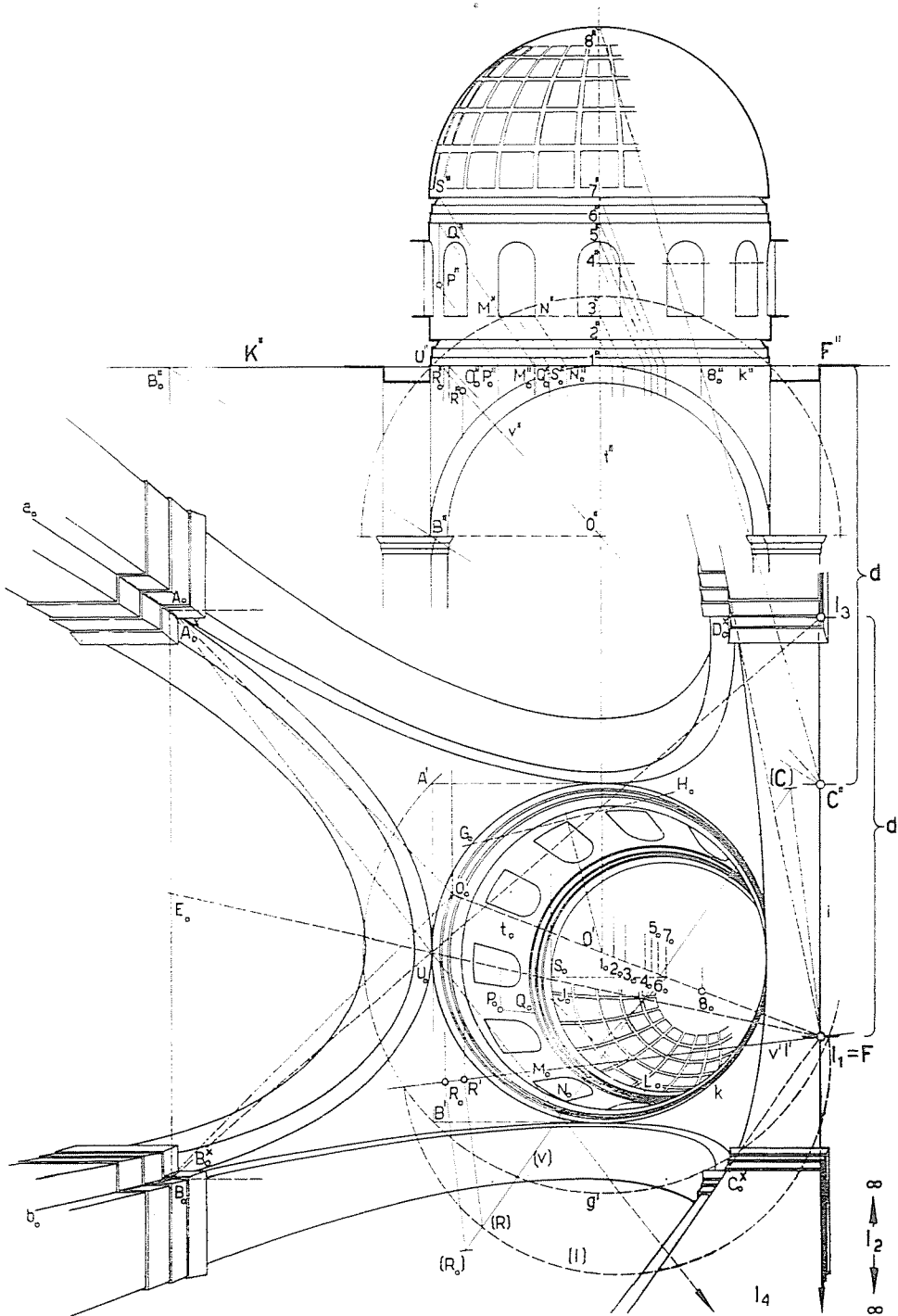


Abb. 19

Als Beweis dafür, daß es sich um eine waagerechte Aufnahme handelt, dient der Umstand, daß die in waagerechten Ebenen liegenden Parallelkreise der Kuppel und Vierungsquadrate auch auf dem Bilde Kreise und Quadrate geblieben sind. Demnach mußte die Bildebene bei der Aufnahme mit den Ebenen der waagerechten Elemente parallel gewesen sein.

Zuerst wurden die inneren Daten konstruiert. Die inneren Eckpunkte der oberen Horizontalkanten der Kapitelle der die Kuppel tragenden vier Bündelpfeiler, die einander entsprechenden Punkte $A_0^* B_0^* C_0^* D_0^*$ bestimmen ein Quadrat, dessen Mittelpunkt O_0 ist. Die Diagonalen des Quadrats schneiden auf den Kanten a_0 und b_0 der Bündelpfeiler die Punkte A_0 und B_0 aus. Die Punkte A_0 und B_0 sind die Widerlagerpunkte des durch die Punkte $A_0 B_0 U_0$ durchgehenden Gurtbogens, von dem — in Kenntnis des Stils des Gebäudes — bekannt ist, daß es sich um einen Halbkreisbogen handelt. Hiervon kann man sich auch anhand einer Aufnahme — mit zur Ebene des Gurtbogens paralleler Bildfläche — überzeugen. Die eventuell erhöhten Widerlagerpunkte lassen sich auch mit Hilfe von aus dem Hauptpunkt F zum Bild des Bogens geführten Tangenten sowie drei beliebigen Tangenten im Sinne des Brianchonschen Satzes ermitteln. Man verbindet den Halbierungspunkt E_0 des Durchmessers $A_0 B_0$ mit dem Fluchtpunkte I_1 der vertikalen Pfeiler — der gleichzeitig der Hauptpunkt F der Aufnahme ist — und erhält das Bild des vertikalen Durchmessers des Halbkreises. Dieser schneidet auf dem Bogen den Punkt U_0 aus. Man verlängert die mit dem Durchmesser $U_0 E_0$ einen Winkel von 45° bildenden Sehnen $A_0 U_0$ und $B_0 U_0$ bis zur Fluchtlinie i des Kreisbogens und erhält die Fluchtpunkte I_3 und I_4 , die von I_1 in gleicher Entfernung liegen. Die Fluchtlinie i der Ebene des erwähnten senkrechten Gurtbogens wurde durch die durch das Zentrum C gelegte parallele Ebene auf der waagerechten Bildebene ausgeschnitten. Nun soll diese zu der waagerechten Bildebene senkrechte vertikale Ebene rekonstruiert werden. In dieser liegt das Zentrum C in der im Hauptpunkt F auf die Bildebene senkrechten Geraden in der Weise, daß die von C nach den Fluchtpunkten I_3 und I_4 gerichteten Fluchtlinien sowohl mit der auf die Bildebene senkrechten Geraden, als auch mit der Bildebene Winkel von 45° bilden. Sonach ist die Entfernung zwischen Zentrum C und Hauptpunkt F — die Distanz d — gleich der Entfernung $I_3 F$ oder $I_4 F$.

Nach der Bestimmung des Zentrums C mit Hilfe des Hauptpunktes F und der Distanz d kann bereits die Rekonstruktion erfolgen. Hierzu wählt man als Bildebene die Ebene des untersten Kuppelkreises k , der das Architravglied des zur Trommel gehörigen unteren Gesimses von unten abschließt und den früher benutzten Gurtbogen im Punkte U berührt. Damit ist der Maßstab der Rekonstruktion festgelegt. Der Kreis k bleibt nämlich, da er in der Bildebene liegt, unverändert, und die Konstruktion des ganzen zeichnerisch wiederhergestellten Gebildes erfolgt auch in demselben Maßstab. Mit der Höherverlegung der Bildebene vermindert sich die Größe der rekonstruierten Projektion,

da die Bilder der höher liegenden Kreise kleiner sind, während sie mit der Tieferverlegung der Bildebene zunimmt. Der Maßstab der Rekonstruktion wird demnach durch das Verhältnis der im Bild gemessenen Größe des Gebildes in der beliebig gewählten Bildebene zur Größe des ursprünglichen Gebildes angegeben. In Abb. 20 ist veranschaulicht, wie sich mit der Änderung des

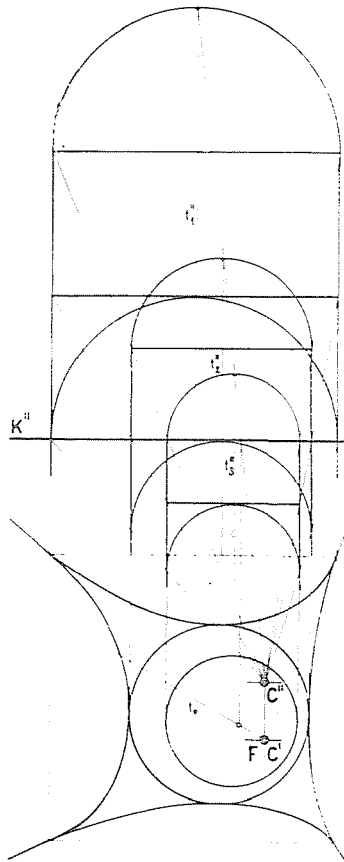


Abb. 20

in der Bildebene liegenden Elementes der Maßstab der rekonstruierten Projektion ändert.

In Abb. 19 wird zuerst das zweite Bild K'' der waagerechten Bildebene gezeichnet, das in Vorderansicht als eine Gerade erscheint. Diese muß stets senkrecht auf jene Richtung dargestellt werden, aus welcher die senkrechte Projektion der Kuppel konstruiert werden soll. Auf dieser wird der Punkt F'' mit dem Punkt F' gemeinsamer Ordinate konstruiert. Die Projektion des Zentrums C wird in lotrechter Richtung von F'' abwärts in Entfernung d liegen. Hiernach wird in der Zentralprojektion Punkt I_1 mit O_0 verbunden

und das Bild der Vertikalachse der Kuppel gezeichnet. In diesem ermittelt man mit Hilfe von beliebigen Sehnen der waagerechten Parallelkreise halbierenden Senkrechten die Bilder der Kreismittelpunkte $1_0, 2_0, 3_0, \dots$. Wird der Mittelpunkt 1_0 des in der Bildebene liegenden Kreises auf K'' projiziert, erhält man dessen zweites Bild $1''$, durch den das Bild t'' der Kuppelachse vertikal verläuft. Die Projektionen auf K der Mittelpunkte der übrigen Parallelkreise werden ebenfalls erstellt. Durch die Verbindung dieser mit C'' sind die Projektionsstrahlen in Vorderansicht rekonstruiert, die früher diese Punkte abgebildet haben. Diese Projektionsstrahlen schneiden auf t'' die Parallelkreismittelpunkte $1'', 2'', 3'', \dots$ in Vorderansicht aus. Die Projektionen der Parallelkreise gehen durch diese in waagerechter Richtung. Der in der Bildebene liegende Kreis k bleibt unverändert. So erhält man durch Projizierung des waagerechten Kreisdurchmessers die Konturpunkte von k'' . Bei den weiteren Kreisen, so z. B. bei dem obersten Kreis des oberen Gesimses der Trommel, der die Kranzleiste nach oben abschließt, konstruiert man den Endpunkt S_0 des durch den Mittelpunkt 7_0 gehenden waagerechten Durchmessers. Dieser wird zuerst auf die waagerechte Vorderansicht der Bildebene projiziert, um ihn dann von hieraus mit dem zentralen Projektionsstrahl auf seinen Parallelkreis zu projizieren, wodurch man dessen Konturpunkt S'' erhält. Dieselbe Konstruktion wird für jeden einzelnen Parallelkreis wiederholt. Aus den so ermittelten Konturpunkten der Parallelkreise erhält man die Kuppelkonturkurve in Mongescher Projektion. Bei dem obersten Profil der Kuppel schneiden sich die Halbierungssenkrechten der die Konturpunkte der Parallelkreise verbindenden Sehnen in einem Punkt der Achse. Sonach ist die Konturkurve ein Kreisbogen und die Fläche eine Kugelfläche. Das Gewölbe stellt übrigens stets eine Kugelfläche dar, sofern seine Höhe mit der Hälfte des Durchmessers der Trommel übereinstimmt.

Die Punkte der Parallelkreise werden auf ähnliche Weise konstruiert, wie das bei der Ermittlung der Fensterbankeckpunkte M und N gezeigt ist. Auf dieselbe Art bestimmt man auch die Punkte der zur Vierung gehörigen Gurtbogen und Pfeilerbündel.

Die Rekonstruktion des Punktes P_0 der Trommel bewerkstelligt man mit Hilfe der durch diese gelegenen Zylinderkante. Man sucht den Schnittpunkt letzterer mit einem beliebigen Parallelkreis der Trommelfläche (hier Q_0). Wenn Punkt Q'' auf seinen Parallelkreis projiziert wird, erhält man Q'' . In der durch diesen Punkt gehenden Kante liegt P'' , den man durch die Projizierung der Projektion P'' von C'' aus erhält.

Die Punkte der Zwickelflächen und der Halbkugelpuppel lassen sich als Durchstoßpunkt der zentralen Projektionsstrahlen mit der Kugelfläche rekonstruieren. Bei Rekonstruktion des Punktes R_0 des im unteren Viertel des Bildes befindlichen Zwickels zeichnet man die Bilder v' und v'' des dazu gehörigen zentralen Projektionsstrahles. Dann wird die Verbindungskugelfläche der

Zwickel im ersten Bild gezeichnet. Der Mittelpunkt dieser Fläche ist O , der, da er in der Vertikalachse der Kuppel liegt, sich mit dem Punkt I_0 deckt und unter diesem in der Entfernung $l''O''$ liegt. Die erste Konturkurve der Kugelfläche wird mit dem im zweiten Bild in Originalgröße sichtlichen Halbmesser $O''U''$ gezogen. Die erste Projektionsebene des zu R_0 gehörigen Projektionsstrahles v wird mit dem darin liegenden Kugelkreis l und Projektionsstrahl v in die durch den Mittelpunkt O waagrecht durchgehende erste Konturebene der Kugel gedreht. Nach erfolgtem Drehen kommen diese in die Lagen (l) und (v) . (v) erhielt man durch Drehen des Zentrums C und des Punktes R_0 . Dieser ergibt auf (l) den Durchstoßpunkt (R) des Projektionsstrahles in der Kugelfläche. Nach Rückdrehung der Projektionsebene kommt (R) in die Lage R' . Das gesuchte zweite Bild R'' desselben wird in v'' durch dessen Ordinate ausgeschnitten.

Aufgrund dieser Ausführungen kann also jeder Punkt der Kuppel und der Vierung, der von der Verbindungsebene der Achse t und der Sehne IU aus gesehen dem Betrachter gegenüber liegt, rekonstruiert werden. Die zu den Punkten G_0 und H_0 gehörige andere Kuppelhälfte, die aus derselben Richtung gesehen hinter dem Betrachter liegt, kann an der Stelle der zuvor rekonstruierten Projektion ebenfalls abgebildet werden. Da es sich um eine Rotationsfläche handelt, erscheinen in senkrechter Projektion die Bilder der Kontur und der Gesimse, in der gegebenen Anordnung auch sogar die der Fenster, unverändert. Das der Projektion t'' der Achse t entsprechende Spiegelbild der auf die dargelegte Weise ermittelten Punkte gibt die richtige Ansicht der hinter dem Betrachter liegenden Hälfte. Was nämlich hinter dem Betrachter auf der linken Seite war, wird — wenn er sich umdreht — vor ihm auf der rechten Seite sein.

3.2. Rekonstruktion der vertikalen Projektionen von Kuppelfresken

In Abb. 21 wird die Rekonstruktion der Freske einer Kuppel gezeigt. Die inneren Daten und die vertikale Projektion des Kuppelgewölbes sind hier bereits bekannt. Wegen der unendlich großen Zahl der Punkte der Freske würde die im vorhergehenden erörterte punktweise Rekonstruktion einen unübersehbar großen Arbeitsaufwand erfordern.

Daher wird auch hier eine beliebig dichte Netzeinteilung aus Parallelkreisen und Meridiankurven am Gewölbe angelegt. Das in vertikaler Projektion gezeichnete Netz wird mit Hilfe des Zentrums C auf die Bildebene der zentralen Projektion umkonstruiert. In der Abbildung ist die Konstruktion des Parallelkreises 3 dargestellt. Wird dessen Halbmesser $O''S''$ von C'' aus auf K'' projiziert, so erhält man zuerst den Halbmesser $O''_0S''_0$ des zentralen Bildes des Kreises. Durch Projizieren des Punktes O'' auf das zu K'' senkrechte Bild t_0 der Kuppelachse erhält man den Mittelpunkt O_0 . Die übrigen Parallel-

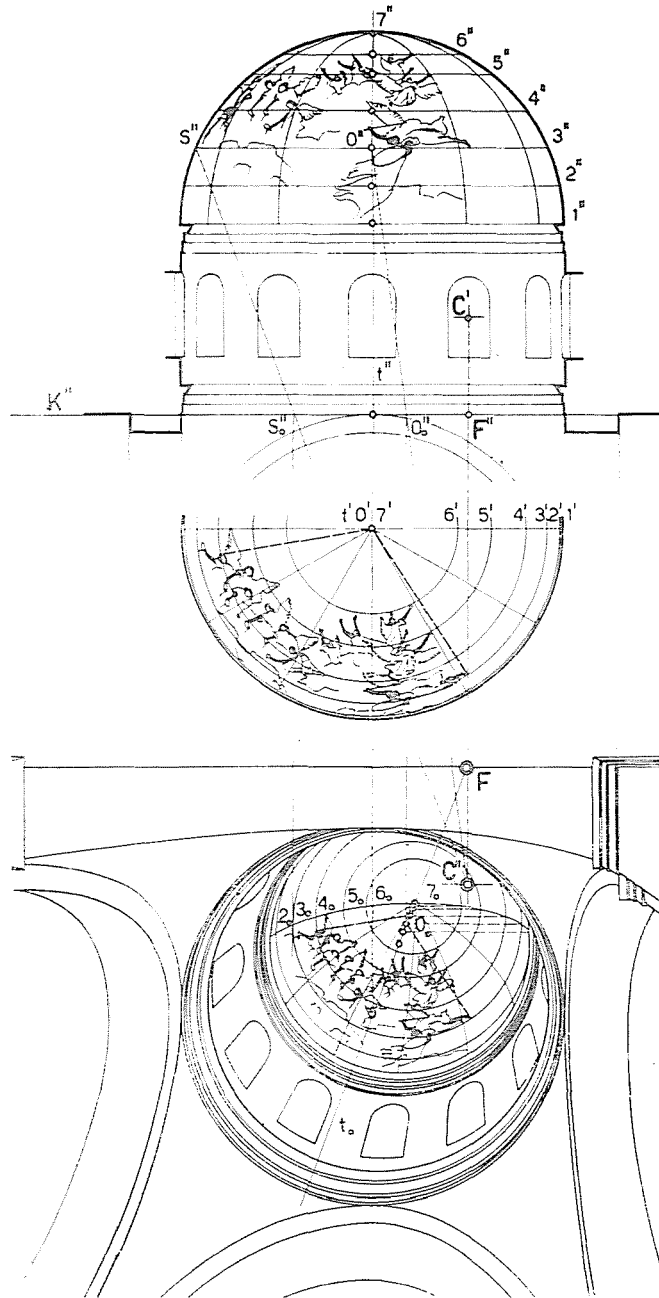


Abb. 21

kreise werden auf dieselbe Weise konstruiert. Sodann werden die Meridiankurven dargestellt. Man zeichnet dann die zum ersten Bilde der beliebig gewählten Meridiankurve parallelen Halbmesser der Parallelkreise in der Zentralprojektion. Jeder Halbmesser schneidet den eigenen Kreis in einem Punkt der gewählten Meridiankurve. Durch Verbinden der auf den Parallelkreisen durch die parallelen Halbmesser bestimmten Punkte kann also das Bild je einer Meridiankurve gezeichnet werden.

Zuerst werden die auf den Parallelkreisen liegenden Punkte rekonstruiert. Da die Bildebene der Zentralprojektion und die erste Bildebene der senkrechten Projektion gleichermaßen waagrecht sind, sind die Halbmesser der waagerechten Parallelkreise in beiden Projektionen miteinander parallel. Wenn man also im perspektivischen Bild mit den zu ausgewählten Punkten eines beliebigen Parallelkreises gehörigen Halbmessern im ersten Bilde der Kuppel parallele Halbmesser zeichnet, schneiden diese den erwähnten Kreis in den ersten Bildern der gewählten Punkte. Die Vorderansicht dieser Punkte erhält man im zweiten Bild des Parallelkreises durch deren Ordinaten. Bei der Ermittlung der auf den Meridiankurven liegenden Punkte projiziert man diese erst von dem perspektivischen Bild auf K'' , von hieraus dann mit Hilfe von C'' auf das zweite Bild der entsprechenden Meridiankurve. Die ersten Bilder derselben werden durch ihre Ordinaten auf den ersten Bildern der Meridiankurven festgelegt. Die in den einzelnen Feldern liegenden Punkte werden schätzungsweise auf die senkrechte Projektion übertragen. Um die Genauigkeit der Konstruktion zu erhöhen, verwendet man ein dichtes Netz. Dadurch läßt sich einerseits die Zahl der in den Feldern liegenden markanten Punkte vermindern, andererseits wird die schätzungsweise Bestimmung der Punkte in den kleineren Feldern genauer.

Soll die Rekonstruktion der Freske nicht auf Grund eines schon vorhandenen Bildes erfolgen, sondern auch die Aufnahme verfertigt werden, wobei die senkrechte Projektion des Kuppelgewölbes bekannt ist, so wird es zweckmäßig sein, die Aufnahme mit waagerechter Bildstellung in der Achse der Kuppel vorzunehmen. In diesem Falle erscheint die senkrechte Achse der Kuppel als Punkt, in dem die Mittelpunkte sämtlicher Parallelkreise zusammenfallen. So kann in der Zentralprojektion zu jedem Punkt der zugehörige Parallelkreis gezeichnet werden. Auf diese Weise lassen sich sämtliche Punkte der Freske, ohne auf Schätzungen angewiesen zu sein, genau rekonstruieren. Diese Ausführungen werden in Abb. 22 veranschaulicht.

A_0 sei ein beliebiger Punkt der zentralen Projektion der Kuppelfreske. Der zweite Konturpunkt des zugehörigen Parallelkreises wird durch A_0 geliefert. Dieser Punkt wird zuerst auf das zweite Bild der zentralen Projektion K'' , dann von dort von C'' aus auf die zweite Kontur der Kuppel projiziert. Durch den erhaltenen Konturpunkt kann bereits der Parallelkreis des Punktes A gezeichnet werden. Auf diesem erhält man den Punkt A'' durch Vertikal-

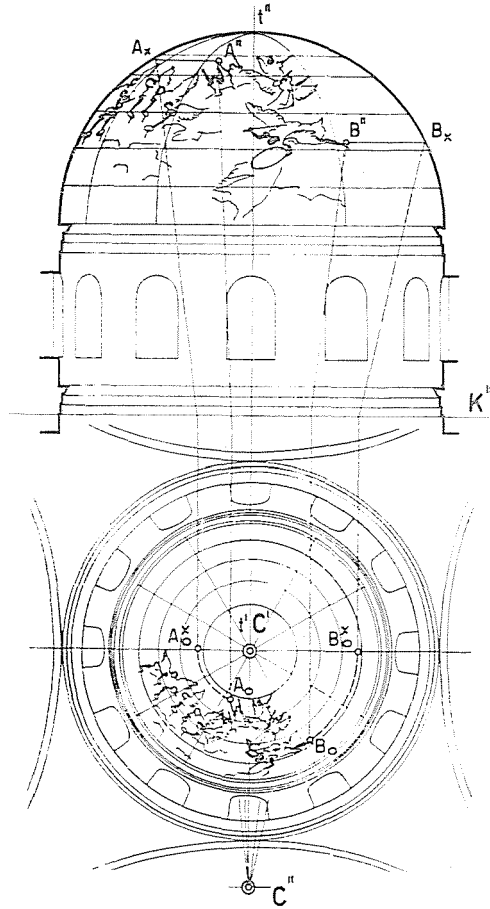


Abb. 22

projektion von A_0 auf K'' , sodann durch eine weitere Projektion von C'' aus auf das bereits gezeichnete Bild des Parallelkreises.

B. STEREOPHOTOGAMMETRIE

4. Rekonstruktion der senkrechten Projektion einer Rotationsfläche auf zeichnerischem Wege aus Stereobildpaaren

Die Rekonstruktion senkrechter Projektionen von Rotationsflächen kann in der Stereophotogrammetrie — im Gegensatz zur Einbild-Photogrammetrie — ohne jede besondere Bedingung erfolgen. Hier sind die inneren Daten der Aufnahmepeare bereits bekannt.

Werden die beiden Bilder des Stereobildpaares in eine solche gegenseitige Lage und Entfernung gebracht, wie im Zeitpunkt der Aufnahme — ungeachtet

dessen, ob sie auf einmal oder in verschiedenen Zeitpunkten aufgenommen wurden —, dann werden sich die zu den Projektionen in den zwei Bildebenen gehörigen zentralen Projektionsstrahlen eines beliebigen Punktes schneiden und ihre Schnittpunkte werden auf einer Fläche von gleicher Form und Größe wie das abgebildete Gebilde liegen. Wird das eine Bild des einander gegenüber richtig eingestellten, gegenseitig orientierten Bildpaares mit sich selbst parallel in Richtung der die Zentren der beiden Aufnahmen verbindenden Geraden, der Basis b verschoben, dem anderen Bild genähert oder von ihm entfernt, d. h. wird die Länge der Basis geändert, so werden sich die zu den Bildern der Punkte gehörigen zentralen Projektionsstrahlen auch weiterhin schneiden, die Form der Schnittpunktfläche bleibt unverändert, jedoch wird sie der Änderung der Basis verhältnismäßig an Größe zu- oder abnehmen. So können von den senkrechten Projektionen des zu rekonstruierenden Gebildes Zeichnungen verschiedenen Maßstabes durch Änderung der Länge der bei der Rekonstruktion verwendeten Basis hergestellt werden.

5. Gegenseitige relative Orientierung und Auswertung des Normalstereogramms durch Konstruktion

5.1. Bestimmung der Richtung der Basis

Ein Bildpaar, das bei auf die Basislinie senkrechten und miteinander parallelen Kameraachsen aufgenommen wurde, wird als Normalstereogramm bezeichnet. In diesem Falle liegen — wie das auch aus Abb. 23 ersichtlich ist — beide Aufnahmen in einer einzigen Ebene.

Die genaue Erfüllung dieser Forderung erfordert die Benutzung photogrammetrischer Aufnahmeapparate. Eine Ausnahme kann nur gemacht werden, wenn es sich um die Rekonstruktion eines Gewölbes, einer Kuppel oder eines Deckengemäldes handelt. In solchen Fällen kommt die Bildebene des auf den Fußboden wo immer aufgelegten Aufnahmeapparates in derselben waagerechten Ebene zu liegen, vorausgesetzt, daß die Rückseite des Apparates parallel zu dessen Bildebene ist.

Bei der Herstellung des Bildpaares muß auch darauf sorgfältig geachtet werden, daß die Achsen des Bildkoordinatensystems, die auf den Photoaufnahmen durch Randmarken gekennzeichnet sind, auf beiden Aufnahmen zueinander parallel sind. So kann die gegenseitige Orientierung der Bilder leicht durchgeführt werden. Schon aufgrund der Fertigung der Aufnahmen muß von einem Bildpaar bekannt sein, ob die Bilder ein Normalstereogramm oder ein Bildpaar mit seitwärts gerichteter Kameraachse darstellen. Jedoch geben darüber auch die Glieder des Bildpaares Aufschluß.

Das in Abb. 23 dargestellte Normalstereogramm enthält zwei Bilder einer Vase. Bei der gegenseitigen Orientierung werden die Bilder zuerst in

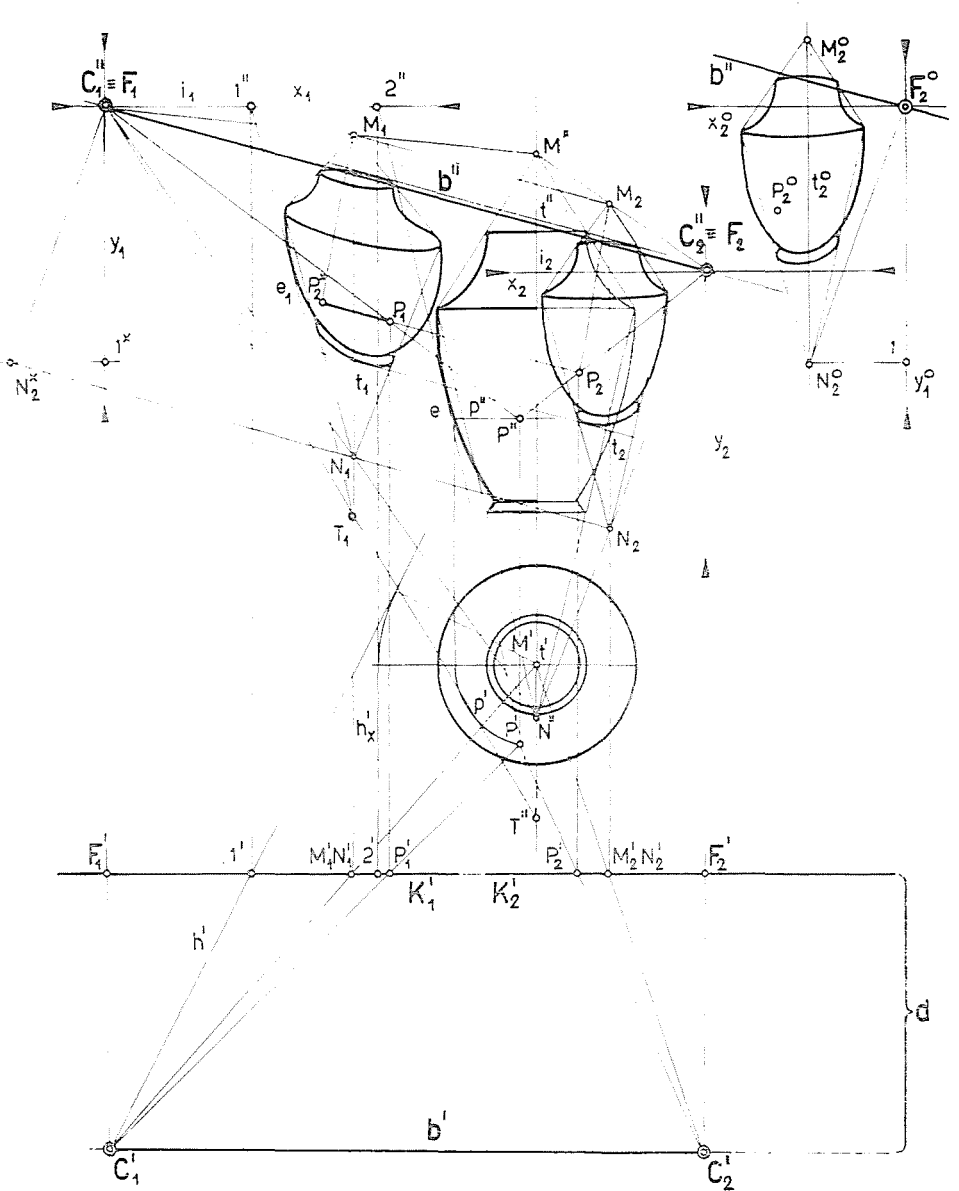


Abb. 23

der Weise angeordnet, daß die Bildkoordinatenachsen x_1, x_2^0 und y_1, y_2^0 zueinander parallel zu stehen kommen.

Dann wird auf beiden Bildern mit Hilfe der Punkte M und N das Bild der Rotationsflächenachse konstruiert. Auf dem ersten Bild erhält man durch Verbinden der Punkte M_1 und N_1 die Projektion t_1 der Achse, auf dem zweiten Bild durch Verbinden von M_2^0 und N_2^0 die Projektion t_2^0 .

Der Umstand, daß die Projektionen t_1 und t_2^0 der Achse zueinander parallel sind, beweist, daß die Ebenen der parallelen Aufnahmen bei deren Fertigung zu der Achse der Rotationsfläche parallel waren. Die gleiche Größe der Entfernungen M_1N_1 und $M_2^0N_2^0$ beweist, daß das Aufnahmepaar ein Normalstereogramm darstellt. Die Projektionen der Achse können nämlich in den parallelen Bildebenen bei gleicher Distanz nur dann von gleicher Größe sein, wenn sie sich von der Achse in gleicher Entfernung befinden.

Beim Normalstereogramm ist jeder Punkt des dargestellten Gebildes mit den Zentren in den Endpunkten der Basis durch die sog. Kernebene verbunden. Diese schneidet zufolge der Parallelität von Bildebene und Achse die gemeinsame Ebene der Aufnahmen in einer zur Basis parallelen Geraden. Die beiden Projektionen des Punktes liegen in dieser Schnittlinie. So sind die beiden Projektionen jedes Punktes sowohl bei der Aufnahme wie auch nach gegenseitiger Orientierung des Bildpaares durch eine Ordinate von Basisrichtung verbunden. Wird das eine Bild in Richtung zum anderen mit sich selbst parallel soweit verschoben, daß die zwei Hauptpunkte F_1 und F_2^0 zusammenfallen, so werden sich sowohl die Bildkoordinatenachsen beider Aufnahmen wie auch die Bilder der in unendlicher Ferne liegenden Punkte decken. Die doppelten Projektionen der im Endlichen liegenden Punkte bleiben jedoch auch weiterhin getrennt, und werden durch Ordinaten von Basisrichtung verbunden. So ermöglicht auch dieser Umstand, von Bildpaaren festzustellen, ob es sich um Normalstereogramme handelt. Durch Wiederholung des Obengesagten erhält man mit Hilfe eines beliebigen, bereits vorhandenen oder konstruierten Punktes die Richtung der Basis.

5.2. Gegenseitige Orientierung des Bildpaares

Die gegenseitige Orientierung des Bildpaares wird in Abb. 23 mit Hilfe des Punktes N durchgeführt. Im Falle des bereits erörterten Zusammenfallens der Hauptpunkte des rechts- und linksseitigen Bildes und der Bildkoordinatenachsen gelangt N_2^0 in die Lage N_2^x . N_2^x wurde aus der rechtseitigen Abbildung durch Umkopieren des Dreiecks F_2^0 1 N_2^0 erhalten. Durch Verbinden von N_2^x mit N_1 erhält man die Richtung der Basis. Parallel mit der erstellten Richtung zeichnet man durch die Punkte F_1 und F_2 auf beiden Bildern die Projektion b'' der Basis. Danach wird das rechtsseitige Bild parallel mit sich selbst in der Weise verschoben, daß die in beiden Bildern vorhandenen Basisprojektionen b'' in eine Gerade fallen. Die gegenseitige Orientierung des Bildpaares ist damit beendet. Die Basis der Rekonstruktion ist die die in beliebiger Entfernung befindlichen Zentren C_1 und C_2 verbindende Gerade.

Die Bestimmung der Richtung der Basis kann auch in der Weise vorgenommen werden, daß man das eine Bild mit sich selbst parallel soweit verschiebt, bis die beiden Projektionen eines beliebigen Punktes einander decken. In die-

sem Fall werden sämtliche Punkte, die sich von der Bildebene in einer anderen Entfernung befanden als der zuvor benutzte Punkt, durch das Verbinden ihrer beiden Projektionen die Richtung der Basis liefern. In der Abbildung gelangt, — dadurch, daß die Punkte M_2^0 und M_1 in Deckung gebracht werden, — Punkt P_2^0 in die Lage P_2^x , und ergibt mit Punkt P_1 verbunden ebenfalls die Richtung der Basis.

5.3. Durchführung der Rekonstruktion

Als erster Schritt der Rekonstruktion wird zur Ermittlung der vertikalen Projektionen das Mongesche Bildebenensystem aufgenommen. Als dessen vertikale zweite Bildebene wählt man die gemeinsame Ebene der Aufnahmen. Die auf diese senkrechte, waagerechte erste Bildebene wird auf die Projektionen t_1 und t_2 der Rotationsfläche senkrecht aufgenommen. So steht diese auch auf die Achse der Fläche senkrecht. Die zwei Aufnahmen erscheinen hier in den Abschnitten K'_1 und K'_2 , die in eine Gerade fallen. Die ersten Bilder der Hauptpunkte F_1 und F_2 sind F'_1 und F'_2 . In diesen auf die Bildebene senkrechten Geraden liegen in Distanz d die Zentren C_1 und C_2 . Ihre Projektionen sind C'_1 und C'_2 , die durch die Projektion b' der zur Bildebene parallelen Basis b verbunden sind.

Nach Einfügen des Bildpaares in das Mongesche Bildebenensystem rekonstruiert man zuerst die Rotationsflächenachse. Man zeichnet die zu den Punkten M und N gehörigen zentralen Projektionsstrahlen bei beiden Aufnahmen im ersten und zweiten Bild. So erhält man M'' im Schnittpunkt der zentralen Projektionsstrahlen C'_1M_1 und C'_2M_2 in Vorderansicht, M' dagegen im Schnittpunkt von $C'_1M'_1$ und $C'_2M'_2$ in Draufsicht. Die Verbindungslinie der senkrechten Projektionen M' und M'' ist eine auf die Achse x_{12} senkrechte Ordinate. Die Verbindung mit M des auf ähnliche Weise konstruierten Punktes N liefert die Projektionen t' und t'' der Achse t . Auch die Projektionen P' und P'' eines beliebigen Punktes P der Fläche werden auf ähnliche Weise rekonstruiert. Der Halbmesser des zu Punkt P gehörigen Parallelkreises ist der Abstand $P't'$. Zur Erzeugung der zweiten Konturpunkte des Parallelkreises wird die Entfernung $P't'$ — der Halbmesser des zu Punkt P gehörigen Parallelkreises — durch P'' auf die Projektion p'' des auf t'' senkrecht gezeichneten Parallelkreises gemessen oder der Punkt P um die Achse t in die zweite Konturebene der Fläche gedreht. Diese Punkte stellen bereits Punkte der Konturmeridiankurve der Rotationsfläche dar.

Die Rekonstruktion aufgrund der Konturen der zentralen Projektionen gibt durch stereoskopische Auswertung kein richtiges Ergebnis. Diese Frage wurde bereits im Abschnitt über die Rekonstruktion aus einem Bilde unter Punkt 2,4 eingehend erörtert.

Es bleibt jedoch noch immer der Weg offen, die Flächenachse aus einem

Bildpaar nach einem stereoskopischen Verfahren zu ermitteln. Bei der Verwendung nur eines einzigen Bildes dreht man die zur Tangente der in diesem Bilde befindlichen Projektion gehörige zentrale Projektionsebene um die schon rekonstruierte Flächenachse in die Lage einer zum System der vertikalen Projektionen gehörigen zweiten Projektionsebene. So wird die Ebene in Vertikalprojektion als Gerade sichtlich sein und berührt zugleich die Konturkurve. Der Gedankengang der Konstruktion stimmt also mit den früheren Ausführungen in bezug auf Abb. 8 überein.

Abschließend wurde in Abb. 23 mit der Tangente e_1 des linksseitigen Bildes die Tangente e der senkrechten Projektion konstruiert. Die zentrale Projektionsebene der Tangente e_1 schneidet die Projektion der Achse t_1 in T_1 , dessen Rekonstruierte T'' mit Hilfe des Zentrums C_1 in t'' ermittelt wurde. Dieselbe zentrale Projektionsebene schneidet in der das Zentrum C_1 mit dem Punkt 1 verbindenden Hauptlinie h die zur durch das Zentrum C_1 gehenden ersten Bildebene parallele Ebene. Wird die zentrale Projektionsebene um die Achse t in die Lage einer zweiten Projektionsebene gedreht, so kommt die Hauptlinie h in die Lage h_x . Diese ist in der zweiten Bildebene in Punkt 2" sichtlich. Wird letzterer Punkt mit dem in der Rotationsflächenachse an seiner Stelle verbleibenden Punkt T'' verbunden, erhält man das als Kante sichtliche Bild der zweiten Projektionsebene, welche zugleich auch die Tangente o der vertikalen Projektion der Fläche ist.

6. Gegenseitige Orientierung des Bildpaares mit seitwärts gerichteten Kameraachsen

Abb. 24 zeigt ein Bildpaar mit nach rechts gerichteter Kameraachse. Die Ebenen der zwei Aufnahmen fallen nicht mehr zusammen, sie sind nur zueinander parallel. So ist auch die Basis zu den Ebenen der Aufnahmen nicht parallel.

Als zweite Bildebene des doppelten Bildebenenensystems der senkrechten Rekonstruktionsprojektionen wird die Ebene der einen Aufnahme gewählt. In dieser wird auch die zu ihr parallele zweite Aufnahme ohne Deformation, in Originalgröße sichtlich sein.

Zuerst wird auch hier das eine Glied des Bildpaares gegenüber dem anderen derart gedreht, daß die entsprechenden Bildkoordinatenachsen zueinander parallel zu liegen kommen, da auch bei der Aufnahme diese Lage bestand. Danach werden auf beiden Bildern durch die Punkte M und N die Projektionen t_1 und t_2^0 der Achsen ermittelt. Deren parallele Lage bedeutet, daß die Achse t der Fläche zur Bildebene parallel war. So ist auch die senkrechte Projektion t'' der Achse auf der zweiten Bildebene zur Richtung der zentralen Projektionen t_1 und t_2 parallel.

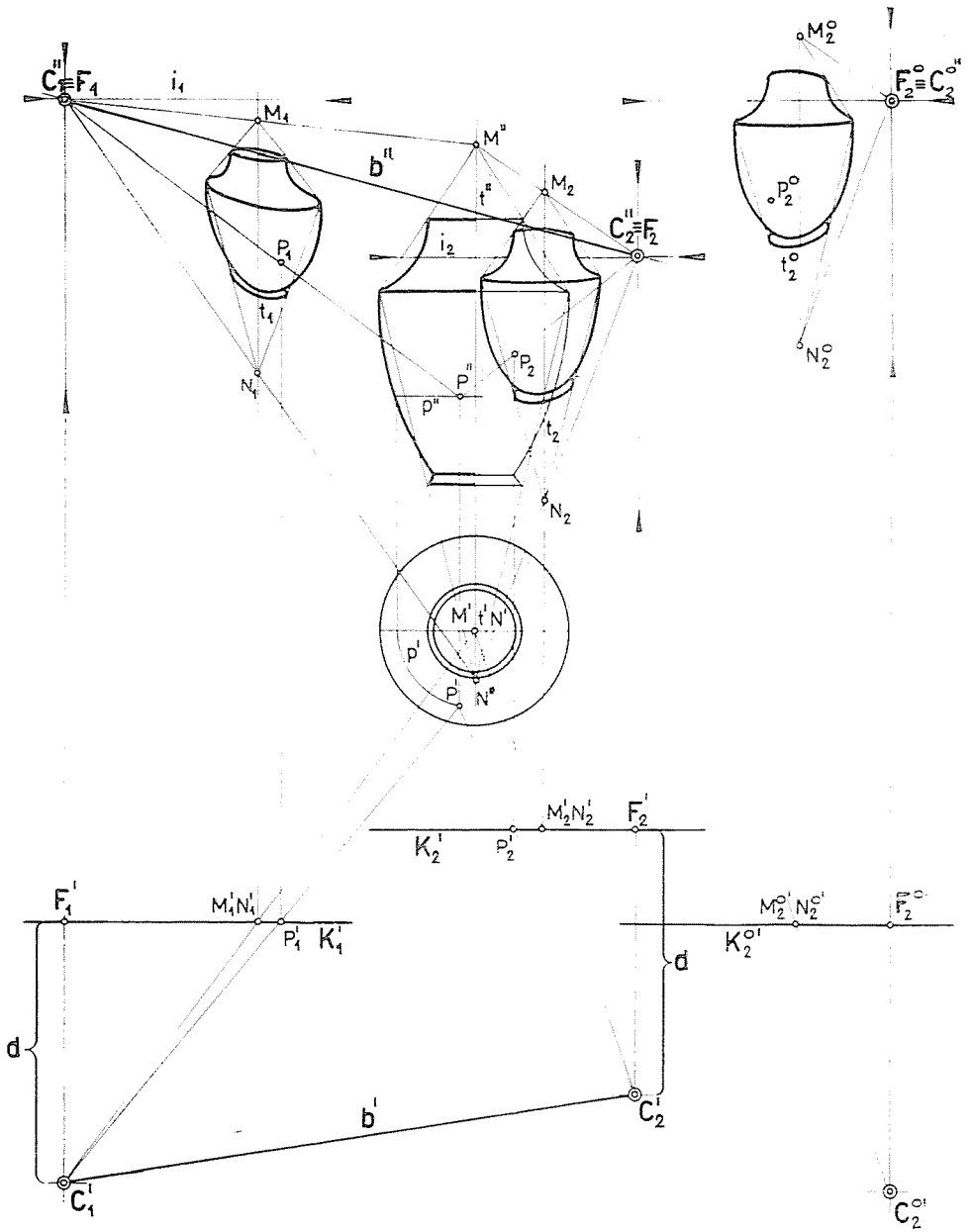


Abb. 24

Sodann werden die in den Ebenen der Aufnahmen befindlichen vertikalen Projektionen der zu den Punkten M und N gehörigen zentralen Projektionsstrahlen gezeichnet. Diese verbinden im linksseitigen Bild F_1 mit den Punkten M_1 und N_1 , im rechtsseitigen Bild dagegen F_2^0 mit M_2^0 und N_2^0 . Auf der linksseitigen Aufnahme wird an einer beliebigen Stelle, parallel zu t_1 und t_2^0 die senkrechte Projektion t'' der Achse aufgenommen, auf der die erwähnten senkrechten Projektionsstrahlen die Vorderansichten M'' und N'' der Punkte M und N ausschneiden. Nun zieht man durch M'' und N'' zu den Geraden $M_2^0 F_2^0$ und $N_2^0 F_2^0$ parallele Geraden, in deren Schnittpunkt F_2 liegt. Jetzt wird die rechtsseitige Aufnahme zu sich selbst parallel soweit verschoben, daß F_2^0 und F_2 sich decken. Auch C_2'' , die Vorderansicht des Zentrums C_2 , fällt mit F_2 zusammen. F_1 wird mit F_2 durch b'' , die senkrechte Projektion der durch die Zentren C_1 und C_2 gehenden Basis verbunden. Damit ist die gegenseitige Orientierung der Bilder im zweiten Bild, also in Vorderansicht durchgeführt.

Die gegenseitige Orientierung des Bildpaares kann auch auf die Weise erfolgen, daß man nach Ermittlung der Projektion t'' des linksseitigen Bildes, zwischen den vertikalen Projektionen der zu M_2 und N_2 gehörigen Projektionsstrahlen des rechtsseitigen Bildes eine zur Projektion t'' parallele Schnittlinie von der Länge des Abstandes $M''N''$ konstruiert. Sodann werden die beiden Bilder gegeneinander orientiert, indem man die zwei Sekanten von gleicher Länge und Richtung in Deckung bringt.

Die erste Bildebene wird auch hier senkrecht auf die Projektion t'' der zur zweiten Bildebene parallelen Rotationsflächenachse, somit auch auf die Achse selbst aufgenommen. In dieser Projektion ist die linksseitige Aufnahme im Geradenabschnitt K_1' sichtlich. Auf diesem findet man in der Ordinate von F_1 den Punkt F_1' , vor welchem in einem Abstand d das Zentrum C_1 liegt. Wird es mit M_1' und N_1' verbunden, so ist die Draufsicht jener zentralen Projektionsstrahlen gezeichnet, auf deren Vorderansicht schon die Punkte M'' und N'' der Achse konstruiert wurden. Da sich im ersten Bild die beiden Projektionsstrahlen decken, fallen die vom zweiten Bild projizierten Punkte M' und N' ebenfalls zusammen: daher wird die Projektion t' der Achse ein Punkt sein. Danach verbindet man das Zentrum C_2^0 des rechtsseitigen Bildes mit M_2^0 und zieht durch t' eine parallele Gerade. In dieser erhält man in der gleichen Ordinate wie C_2^0 den Punkt C_2' . Im Abstand d liegt Punkt F_2' , durch den die mit K_2' parallele Draufsicht K_2' des rechtsseitigen Bildes geht. Damit ist die gegenseitige Orientierung auch im ersten Bilde durchgeführt.

Von dem gegenseitig orientierten Bildpaar kann die Rekonstruktion der Rotationsfläche erfolgen. Die Abbildung zeigt die Konstruktion des Punktes P und dessen Parallelkreises. Da der Gang der Konstruktion mit dem in der vorigen Abbildung dargestellten vollständig übereinstimmt, soll darauf nicht näher eingegangen werden.

Es sei noch bemerkt, daß das für die gegenseitige Orientierung des Bildpaares mit seitwärts gerichteter Kameraachse eben vorgeführte System auch bei der gegenseitigen Orientierung von Normalstereogrammen nach Abb. 23 angewendet werden kann.

Abb. 25 stellt wieder ein Bildpaar mit nach rechts gerichteter Kameraachse dar.* Nach der Parallelstellung der Bildkoordinatenachsen sind die mit Hilfe der Punkte M und N konstruierten Projektionen t_1 und t_2 der Rotationsflächenachse nicht mehr parallel. Dieser Umstand beweist, daß die Rotationsflächenachse zu den parallelen Bildebenen nicht parallel war.

Für die gegenseitige Orientierung des Bildpaares muß zuerst die Richtung der senkrechten Projektion der Flächenachse auf der zweiten Bildebene des zur Rekonstruktion verwendeten doppelten Bildebenensystems konstruiert werden, wie das auch in der vorigen Abbildung geschehen ist. Bei der linksseitigen Aufnahme wurde durch Verbinden der Projektion t_1 mit dem Zentrum C_1 die zentrale Projektionsebene der Flächenachse erhalten, in der bei der Aufnahme die Achse lag. Bei der rechtsseitigen Aufnahme gilt dasselbe für die Verbindungsebene des Zentrums C_2 und der Projektion t_2 . Bei der Aufnahme schnitten sich also diese beiden zentralen Projektionsebenen in der Achse. So erhält man in der Schnittlinie beider Ebenen eine mit der Achse parallele Gerade. Auch das ändert die Richtung der Schnittlinie nicht, wenn eine der Ebenen mit sich parallel verschoben wird. D. h., daß bei der linksseitigen Aufnahme die zentrale Projektionsebene der Achse mit Hilfe des Dreiecks $C_1M_1N_1$ mit sich parallel in das Zentrum C_2^0 des rechtsseitigen Bildes geschoben wird. Wird der Schnittpunkt der in der Bildebene liegenden Spurlinien $M_1^0N_1^0$ und $M_2^0N_2^0$ der beiden zentralen Projektionsebenen mit den im $C_{1,2}$ vereinigten Zentren verbunden, erhält man eine zur Flächenachse parallele Gerade t_x . Die senkrechte Projektion derselben in der zweiten Bildebene ist t_x'' . Wird die Gerade t_x mit ihrer zweiten Projektionsebene in die zweite Bildebene gedreht, so bilden die Spurlinie t_x'' der Projektionsebene und das eingedrehte (t_x) den Winkel α , der den durch die Achse und die Ebenen der Aufnahmen gebildeten Winkel ergibt.

Der Verlauf der gegenseitigen Orientierung stimmt von da an mit den in Abb. 24 vorgeführten vollständig überein. Zwischen den senkrechten Projektionen der zu M und N gehörigen zentralen Projektionsstrahlen der links- und rechtsseitigen Aufnahmen werden zu t_x'' parallele Sekanten gleicher Länge t'' und t° konstruiert. Durch parallele Verschiebung der rechtsseitigen Aufnahme bringt man t° mit t'' in Deckung. Im ersten Bild führt man die Orientierung in Draufsicht mit Hilfe eines beliebigen Punktes P durch, dessen Projektion P'' in Vorderansicht als Schnittpunkt der Projektionsstrahlen P_1 und P_2 erhalten wurde. Im ersten Bild der linksseitigen Aufnahme wird im

* In Abb. 25 ist die Anfangslage der rechtsseitigen Aufnahme nicht dargestellt.

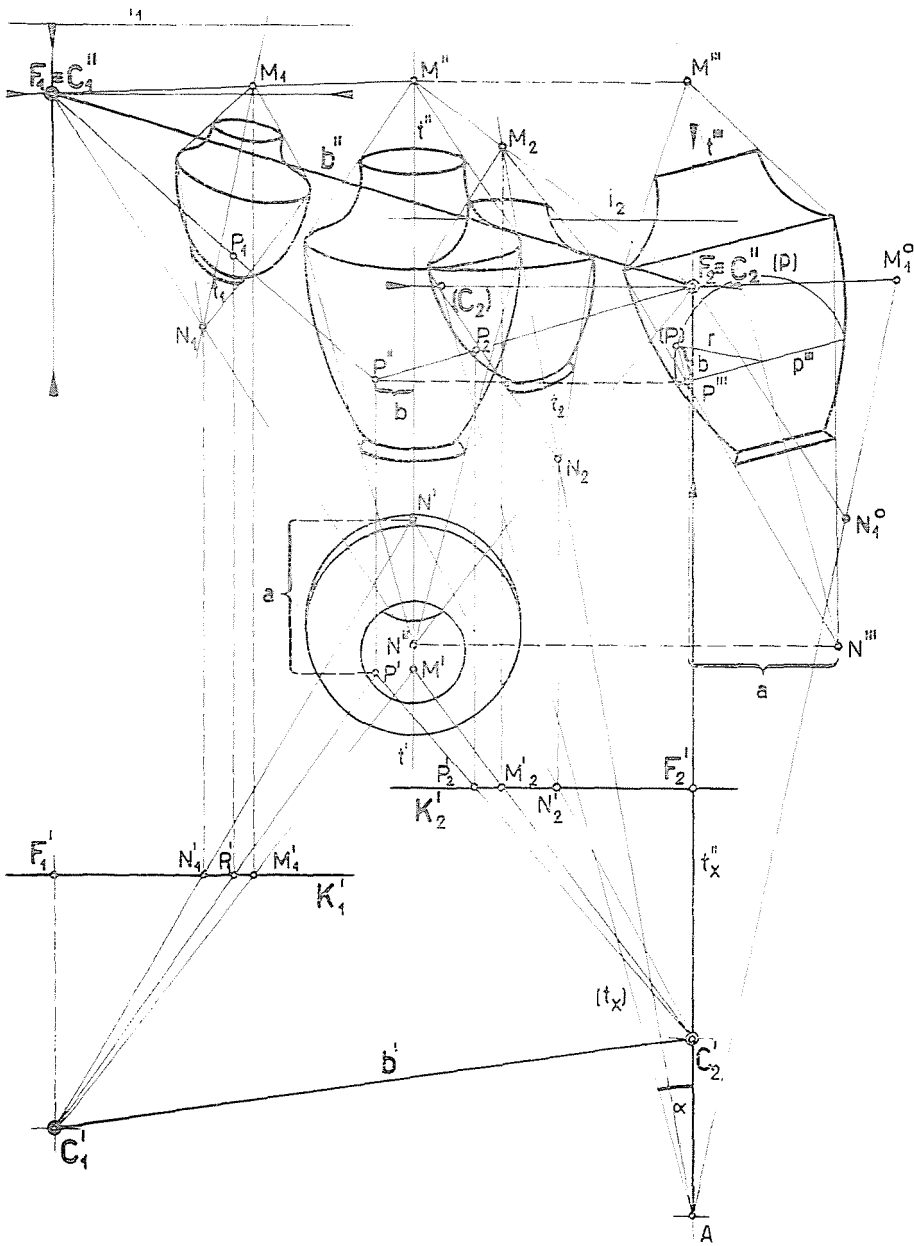


Abb. 25

Projektionsstrahl $C_1'P_1'$ der Punkt P' gezeichnet; man zieht durch P' eine mit dem Projektionsstrahl $C_2^0P_2^0$ parallele Gerade, in der C_2' durch die Ordinate von C_2'' bestimmt wird. Nach paralleler Verschiebung der Draufsicht des rechteitigen Bildes in das soeben bestimmte C_2' ist die gegenseitige Orientierung des Bildpaares beendet. Durch die Projektion b' der die beiden Zentren des orientierten Bildpaares verbindenden Basis werden C_1' mit C_2' , durch ihre Vorderansicht b'' C_1'' mit C_2'' verbunden.

Da die Flächenachse weder zur ersten, noch zur zweiten Bildebene parallel steht, muß die Fläche auf eine weitere, mit der Achse parallele Bildebene transformiert werden, wo bereits die Kontur durch mit dieser Bildebene parallele Meridiankurven gebildet wird. Zuerst werden die Projektionen t' und t'' der Achse im ersten und zweiten Bild durch die Punkte M und N bestimmt, dann werden diese Projektionen auf die mit t'' parallele dritte Bildebene transformiert, um so die in Originalgröße sichtbare Projektion t''' zu erhalten. Für Punkt P werden zuerst ebenfalls dessen erstes und zweites Bild erstellt. Diese werden auch auf die dritte Bildebene transformiert. Die durch P''' senkrecht auf t''' angesetzte Ebene — die als eine auf t''' senkrechtstehende Gerade sichtbar ist — stellt die Ebene des zum Punkt P gehörigen Parallelkreises dar. Wird diese um ihre die Achse schneidende dritte Hauptlinie in zur dritten Bildebene parallele Lage gedreht, kann der Halbmesser r des Parallelkreises des Punktes P erzeugt werden; wird dieser aus t''' auf das dritte Bild des Parallelkreises projiziert, erhält man die Konturpunkte desselben. Aus den auf die behandelte Weise konstruierten Konturpunkten kann die in der dritten Bildebene in Originalgröße sichtbare Konturmeridiankurve gezeichnet werden.

7. Gegenseitige Orientierung des Bildpaares mit ausweichenden Kameraachsen

In Abb. 26 ist die gegenseitige Orientierung und die Auswertung eines Bildpaares mit ausweichenden Kameraachsen vorgeführt. Die inneren Daten sind hier schon bekannt.

Das Wesen der Lösung dieser Aufgabe besteht darin, daß von beiden Aufnahmen derselbe Parallelkreis in gleicher Größe und in auf die Achse senkrechter Projektion rekonstruiert wird. Die beiden Aufnahmen werden entlang der Parallelkreisprojektionen gleicher Größe aneinander gefügt und eine der Aufnahmen wird mit Hilfe eines Paßpunktes so gedreht, daß sie in die dem Aufnahmenezustand entsprechende gegenseitige Lage kommen.

Zuerst konstruiert man auf beiden Aufnahmen in der in Abb. 14 gezeigten Weise die Fluchtlinie i der Parallelkreisebenen und den Fluchtpunkt I_i der Flächenachse.

Auf der Aufnahme K_1 fällt der Hauptpunkt F_1 nicht in die Fluchtlinie i_1 der Parallelkreisebenen, also war bei der Aufnahme deren Ebene zur

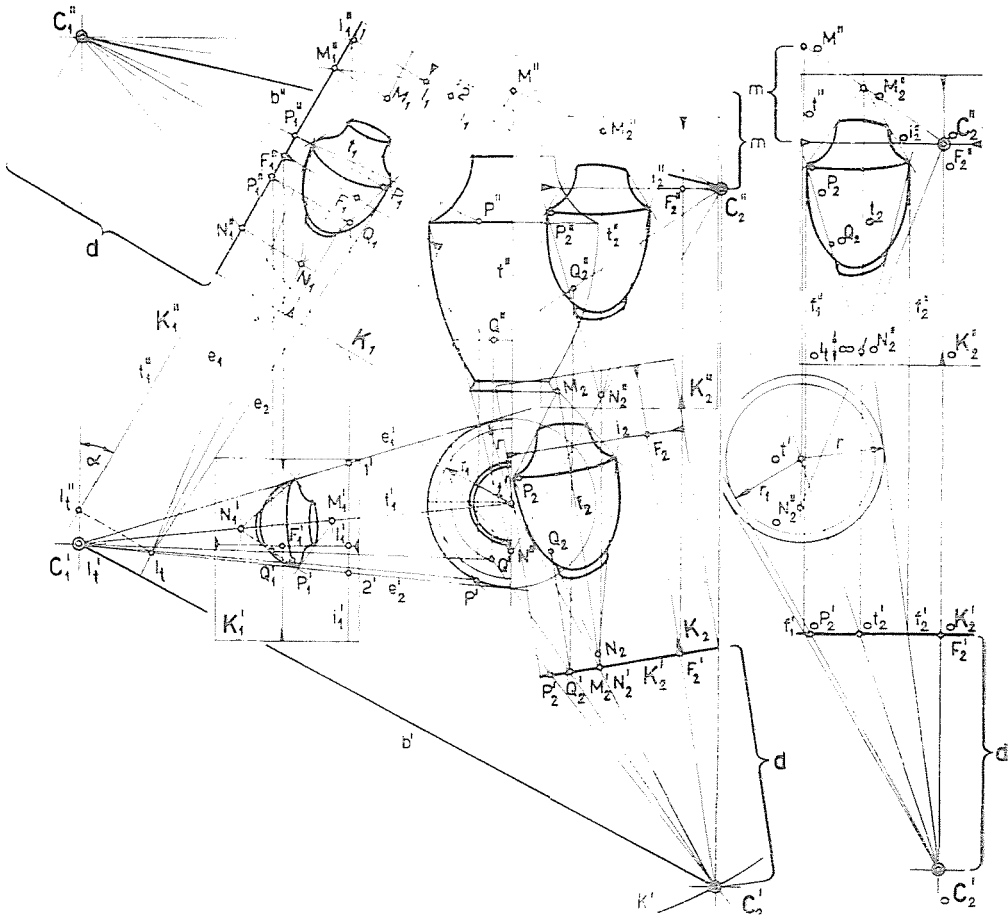


Abb. 26

Rotationsflächenachse nicht parallel. Dagegen liegt auf der Aufnahme K_2 Punkt F_2 in der Fluchtlinie i_2 . Dies beweist die Parallelität der Aufnahme mit der Flächenachse. Also ist das Bildpaar mit ausweichenden Kameraachsen aufgenommen worden.

Die Aufnahme K_1 wird in das bei der Rekonstruktion angewendete Mongesche Bildebenensystem in der Weise eingefügt, daß deren Ebene als zweite Projektionsebene, die zur Flächenachse parallele Gerade C_1I_1 als erster Projektionsstrahl dienen. Daher wird das früher konstruierte Dreieck $C_1I_1I_1$ als Vorderansicht derart aufgezeichnet, daß die Gerade $C_1''I_1''$ waagrecht, die Gerade $C_1''I_1''$ dagegen vertikal steht. Die Verbindungsgerade $I_1''I_1''$ ist K_1'' , das zweite Bild der Aufnahme K_1 . Die Aufnahme K_1 wird so auf das Zeichenblatt aufgeklebt, daß i_1 auf K_1'' senkrecht steht und durch I_1'' verläuft. Im Bilde der eingedrehten Lage wurde, um die Überfüllung zu vermeiden, die Bezeich-

nung () weggelassen. So steht auch die Gerade F_1F_1'' senkrecht auf K_1'' und geht durch C_1'' . Aus dem zweiten Bilde von K_1 und aus dessen in die zweite Bildebene eingedrehtem Bilde werden die erforderlichen Punkte des ersten Bildes von K_1 ermittelt. Zwar wurde zwecks leichterer Übersicht in der Abbildung die ganze zentrale Projektion gezeichnet, doch ist das bei der Lösung ähnlicher Aufgaben unnötig.

Sodann zeichnet man in der gedrehten Projektion aus I_1 Tangenten zu dem Bilde des Achselkreises. Die zentralen Projektionsebenen von e_1 und e_2 sind auch die zur Flächenachse parallelen Tangentialebenen des Achselkreises, die gleichzeitig die ersten Projektionsebenen bilden. Ihre ersten Bilder werden mit Hilfe des mit C_1' in Deckung befindlichen Punktes I_1' , ferner der in i_1' liegenden Punkte $1'$ und $2'$ aufgezeichnet. t_1' ist im ersten Bild die Winkelhalbierende von e_1 und e_2 , und stellt das in einer Geraden sichtbare Bild der zentralen Projektionsebene der vertikalen Achse t dar. Als Projektion t' der Flächenachse wählt man einen beliebigen Punkt dieses Bildes und zeichnet mit gemeinsamer Ordinate vertikal t'' . Der e_1' und e_2' berührende Kreis mit dem Mittelpunkt t' ist die Draufsicht des Schulterkreises. Auf diesem wurde P' durch den zentralen Projektionsstrahl P_1' bestimmt. Projiziert man P' auf die Gerade $C_1''P_1''$, erhält man P'' , durch den die Vorderansicht des Schulterkreises waagrecht verläuft. Die Punkte M und N können auf t'' aus den Projektionen M_1'' und N_1'' mit Hilfe von C_1'' durch Projektion bestimmt werden. Auf dieselbe Weise können auch die Mittelpunkte der Parallelkreise in der senkrechten Projektion erhalten werden, wenn ihre zentralen Bilder bereits bestimmt wurden.

Das zweite Glied des Bildpaares wird nicht mehr zum ersten, sondern zur teilweise rekonstruierten Fläche orientieren. So kommt auch die gegenseitige Orientierung des Bildpaares zustande.

Das zweite Glied des Bildpaares K_2 wird erst in einer besonderen Konstruktion vorbereitet, wobei die Ebene der auf das Zeichenblatt gelegten Aufnahme als zweite Bildebene benutzt wird. Die erste Bildebene wird senkrecht auf t_2'' aufgenommen, die somit auch auf die Flächenachse senkrecht steht. Jetzt zeichnet man auch auf der Aufnahme die Tangenten zum Bild des Schulterkreises, die aus dem hier im Unendlichen liegenden I_1'' gezogen werden können, sowie die vertikalen f_1'' und f_2'' . Die zentralen Projektionsebenen von f_1 und f_2 sowie von o_1t_1' bilden zugleich erste Projektionsebenen, von denen letztere den durch die beiden ersten gebildeten Winkel halbiert. Jetzt wird die hier mit o_1t_1' bezeichnete Draufsicht der Flächenachse so aufgenommen, daß der um diese gezeichnete Schulterkreis die zentralen Projektionsebenen von f_1 und f_2 berührt, und mit dem Halbmesser r des aus der Aufnahme K_1 rekonstruierten Schulterkreises übereinstimmt.

Die gegenseitige Orientierung wird mit Hilfe des Punktes P des Schulterkreises durchgeführt.

Bei der Aufnahme ${}_0K_2$ konstruiert man im ersten Bild den Abstand r_1 zwischen der Achse ${}_0t'$ der Fläche und dem die zu P gehörigen Punkte ${}_0C'_2$ und ${}_0P'_2$ verbindenden Projektionsstrahl. Mit diesem Abstand zeichnet man um den aus K_1 konstruierten t' einen Kreis und konstruiert von P' aus dessen Tangenten. In der Hilfskonstruktion erhält man in der dem ersten Bilde des zu ${}_0P'_2$ gehörigen zentralen Projektionsstrahles entsprechenden Tangente, in einem Abstand ${}_0t'{}_0C'_2$ von t' , das erste Bild C'_2 des schon orientierten Zentrums C_2 . C''_2 liegt auf derselben Ordinate in einem Abstand m unter dem auf t'' rekonstruierten Punkt M'' . Der Abstand m ist der Höhenunterschied zwischen ${}_0M''$ und ${}_0C''$ aus der rechtsseitigen Hilfskonstruktion.

Danach wird die in der rechtsseitigen Hilfskonstruktion bereits konstruierte Draufsicht der Aufnahme K_2 zu C'_2 kopiert. Neben die so erhaltene Aufnahme K'_2 klebt man die Aufnahme K_2 — als deren in die erste Bildebene eingedrehtes Bild — derart auf, daß i_2 zu K_2 parallel ist, die Verbindungsgerade von F_2 und F'_2 dagegen auf K'_2 senkrecht zu stehen kommt. Damit ist die gegenseitige Orientierung beendet.

In der Abbildung ist bei K'_2 die Projektion des ganzen Bildes gezeichnet. Dies ist ebenso überflüssig wie das bei K_1 gezeichnete volle Bild, und wurde nur der besseren Übersicht halber gefertigt.

Des weiteren wurde in der Abbildung noch die Rekonstruktion des in beiden Bildern sichtlichen Punktes Q und dessen Parallelkreises gezeichnet.

Bei der jetzt vorgeführten Konstruktion wurde noch vor Beendigung der gegenseitigen Orientierung des Bildpaares von einem der Bilder die dargestellte Rotationsfläche teilweise rekonstruiert.

Der Vorteil der Stereophotogrammetrie wird dann offenbar, wenn Flächenpunkte und sich daraus ergebende figurale oder ornamentale Verzierungen rekonstruiert werden sollen.

Abschließend sei bemerkt, daß das vorgeführte Verfahren auch dazu geeignet ist, die Rekonstruktion aufgrund eines mit zwei verschiedenen Photoapparaten aufgenommenen Bildpaares vorzunehmen.

8. Rekonstruktion einer Kuppel mit Fresken

In Abb. 27 wurde die senkrechte Projektion einer Kuppel und ihrer Freske ermittelt. Die erste Aufnahme mit dem Zentrum C_1 erfolgte in der Achse der Kuppel mit dem auf dem waagerechten Fußboden gelegten Apparat, die zweite dagegen mit dem Zentrum C_2 von einem beliebigen Punkt des Fußbodens aus. Die Lage der Bildebene ist bei beiden Aufnahmen waagrecht und so ergeben sie zusammen ein Normalstereogramm.

Die erste Aufnahme wurde auf das Zeichenblatt so befestigt, daß die Hälfte, deren senkrechte Projektion hergestellt werden soll, unter die durch die als Punkt dargestellte Kuppelachse gezogene waagerechte Linie zu liegen

kommt. Auf beiden Bildern werden die Bilder je einer auf beiden Aufnahmen gut identifizierbaren, zur Bildebene parallelen Geraden a_1 und a_2 aufgezeichnet. Die Punkte A und B sind die Schnittpunkte der vertikalen Kanten der Fensterzargen auf der unteren Gesimskante der Trommelfläche. Darauf folgend wird die zweite Aufnahme in der Weise gedreht, daß die beiden Geraden a_1 und a_2 parallel miteinander zu liegen kommen. Dann werden die Bilder von zwei beliebig gewählten Punkten in verschiedener Höhe, — hier F_1 mit P_1 und F_2 mit P_2 — miteinander verbunden. Dann konstruiert man im ersten Bild den Punkt P_2^x . Dieser liegt in derselben Richtung und in gleicher Distanz von F_1 , wie F_2 von P_2 . Die miteinander verbundenen Punkte P_1 und P_2 ergeben die Richtung der Basis. Jetzt verschiebt man die zweite Aufnahme parallel mit sich selbst, so daß P_2 auf die Gerade P_1P_2 zu liegen kommt. In dieser Lage sind die beiden Bilder sämtlicher Punkte durch in Basisrichtung verlaufende Ordinaten verbunden. Hiermit ist die gegenseitige Orientierung der beiden Aufnahmen beendet.

Der Abstand $C_1C_2 = F_1F_2$ bildet die Basis der Rekonstruktion, deren Verhältnis zur Basis der Aufnahme den Maßstab der Rekonstruktion liefert. So lassen sich Projektionen verschiedenen Maßstabes durch verschieden große Verschiebungen des zweiten Bildes in Richtung der Achse erzielen. Bei einer Projektion im Maßstab $1/200$ müssen z. B. die Punkte F_1 und F_2 in einer Entfernung voneinander liegen, die $1/200$ der Länge der Aufnahmenbasis entspricht.

Bei der Rekonstruktion wird als erste Bildebene der senkrechten Projektionen die gemeinsame Ebene der Aufnahmen gewählt. Senkrecht auf diese liegen die Bildebene der Vorderansicht über K'' , parallel zur Basis die neue Bildebene über K^{IV} . Beide werden um K'' bzw. K^{IV} in die Ebene der Aufnahmen gedreht. So werden die beiden Aufnahmen in Vorderansicht bzw. im zweiten Bild in K'' , im vierten Bild in K^{IV} sichtlich sein. Dann zeichnet man aus F_1 senkrecht auf K'' und K^{IV} in t'' und t^{IV} das zweite und vierte Bild der Kuppelachse, auf denen das Zentrum $C_1 : C_1''$ und C_1^{IV} in der Distanz d von der Bildebene liegen. Im vierten Bild wird die Genauigkeit der Rekonstruktion erhöht; um die zu spitzen Verschneidungen zu vermeiden, wird von K^{IV} aus die halbe Distanz d aufgetragen. Hierdurch erhält man hier die halbe Höhe der Punkte der Bildebene. (Wohlgemerkt, nimmt die Distanz d bei Vergrößerung der Aufnahmen in gleichem Maßstab verhältnismäßig zu.) Auf ähnliche Weise werden auch C_2'' und C_2^{IV} aufgezeichnet.

Bei der Rekonstruktion des Punktes P erhält man P'' im Schnittpunkt der Projektionsstrahlenprojektionen F_1P_1 und F_2P_2 . Auf dessen zweiter und vierter Ordinate werden P'' und P^{IV} durch das entsprechende Bild der zentralen Projektionsstrahlen C_1P_1 , oder C_2P_2 ausgeschnitten. Kann P' wegen der zu spitzigen Verschneidung nicht genau konstruiert werden, so bestimmt man erst dessen zweites oder viertes Bild mit Hilfe der zugehörigen zwei zen-

tralen Projektionsstrahlen. Die Distanz $P't'$ im ersten Bild ist der Halbmesser des Parallelkreises von Punkt P . Wird dieser auf die durch P'' gezogene waagerechte Gerade von t'' aus aufgetragen, erhält man den Konturpunkt P_x des Parallelkreises.

In der Abbildung ist auch der ähnliche Verlauf der Konstruktion der Punkte Q , R und S dargestellt. Da die mit deren Hilfe konstruierten Punkte P_x , Q_x , R_x und S_x auf einem Kreisbogen liegen, ist die Kuppel halbkugelförmig. Die weiteren Punkte der Freske werden auf die in Abb. 22 bereits gezeigte Weise ermittelt.

Zusammenfassung

Die vorgeführten Konstruktionen eignen sich für die Bestimmung der senkrechten Projektionen von Baudenkmalern in Rotationsflächenform — zentraler Gebäudemassen, Türme, Denkmäler, Grabmäler — und von durch Rotationsflächen begrenzten Räumen — Vierungen, Kuppeln, Kuppelfresken — aufgrund von Photoaufnahmen. Mit dem Konstruktionsverfahren erübrigt sich die früher übliche Vermessung, da der Photogrammeter aus zweckmäßig erstellten Aufnahmen am Arbeitstisch sitzend, bequem und selbständig die Vermessungsdokumentation verfertigen kann.

In der Abhandlung werden die verschiedensten Fälle der Bestimmung der vertikalen Projektionen von Rotationsflächen aus zentralen Projektionen (Photoaufnahmen) gezeigt. Im ersten Abschnitt wird die Aufgabe aufgrund der Einbild-Photogrammetrie, im zweiten aufgrund der Stereophotogrammetrie behandelt.

Bei der Bestimmung aufgrund eines einzigen Bildes wird die Rekonstruktion von einer vertikalen Aufnahme, von einer Aufnahme mit geneigter Bildebene oder mit waagerechter Bildebenenstellung behandelt. In allen drei Fällen befaßt sich je ein Kapitel mit der Bestimmung des Projektionszentrums aufgrund der Aufnahme, weitere Kapitel dieser Teile behandeln im einzelnen die Rekonstruktion anhand der Kontur, des Parallelkreises, der Meridiankurve, des allgemeinen Flächenpunktes und die von Flächenverzerrungen (Fresken).

Im Bereich der Stereophotogrammetrie werden das Normalstereogramm, das Bildpaar mit seitwärts gerichteter Kameraachse, weiterhin die Auswertung von Bildpaaren mit verschiedenen Bildebenenstellungen in besonderen Kapiteln erörtert.

Adjunkt Antal HORN, Múegyetem rakpart 3, Budapest XI, Ungarn