

BERECHNUNG PRISMATISCHER FALTWERKE MIT QUERSCHOTTVERSTEIFUNG

Von

S. BECKER

Lehrstuhl für Festigkeitslehre, Technische Universität, Budapest
(Eingegangen am 15. Dezember 1968)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. PELIKÁN

Prismatische Faltwerke werden an Stellen ohne äußere Abstützung oft durch Querschotte versteift (z. B. ein Faltwerk mit senkrechter Achse durch eine Zwischendecke). Ein Beispiel ist in Abb. 1 zu sehen, wo der als Faltwerk ausgebildete Turm durch die Dachdecke versteift ist.

Die Berechnung solcher Konstruktionen wurde zuerst von CRAEMER [1] behandelt: das dargelegte Berechnungsverfahren gründet sich auf die von ihm [2] und EHLERS [3] erarbeitete Berechnungsmethode. Auch später bediente man sich dieses Verfahrens, z. B. BORN [4]. In neuerer Zeit wurde von GIRKMANN [5] ein Verfahren zur Berechnung solcher Konstruktionen mitgeteilt.

Im weiteren soll gezeigt werden, wie sich solche Konstruktionen nach dem Spannungsverteilungsverfahren [6, 7] oder nach einer weiterentwickelten Form dieses Verfahrens [8] berechnen lassen.

Das Verfahren wird an demselben Beispiel vorgeführt, das auch die genannten Verfasser behandeln, die Daten stimmen also mit denen in [5] überein.

Es sind also die im Einspannquerschnitt des Faltwerkes in Abb. 1 unter Winddruck auftretenden Spannungen zu ermitteln.

Es seien L die Höhe des Turms, b das Seitenmaß des regelmäßigen Achteckgrundrisses, wobei die Plattendicke überall gleich d ist.

Die Bezugsgröße der auf die Begrenzungsflächen gleichmäßig verteilten Windlast ist im Grundriß angegeben.

Die Berechnung wurde unter den Annahmen in [1] und [5] durchgeführt:

Die Faltwerkplatten sind aneinander und an die Versteifungsplatte gelenkig angeschlossen und in das Fundament eingespannt.

Die Abmessungen der einzelnen Platten gestatten, die Spannungen in je einem Querschnitt anhand der Balkentheorie zu ermitteln.

Der Werkstoff für das Faltwerk folgt dem Hookeschen Gesetz, wobei der Wert der Poissonschen Zahl gleich Null ist ($\mu = 0$).

Bei der Berechnung wurde das Spannungsverteilungsverfahren angewandt, mit dem folgenden Grundgedanken: Im ersten Schritt stellt man sich das prismatische Faltwerk als längs der Kanten aufgeschlitzt vor, und es

werden die in den einzelnen Platten unter der Lastwirkung auftretenden Spannungen — wie in selbständigen Balken — bestimmt. (Das sind die sogenannten »Anfangsspannungen«.)

Die Kantenspannungen und Formänderungen der einzelnen plattenartigen Balken die gemeinsamen Kanten entlang werden offensichtlich nicht

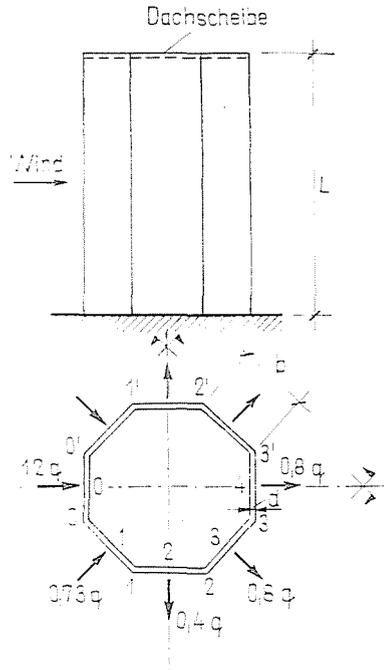


Abb. 1

die gleichen sein. Die kontinuierliche Formänderung des Faltwerkes erfordert jedoch, daß die Formänderungen in den Kanten der sich zu einer gemeinsamen Kante zusammenschließenden plattenartigen Balken einander gleich seien. Bei $\mu = 0$ kommt diese Bedingung einer Gleichheit der Kantenspannungen σ gleich. Die Kontinuität der Formänderungen wird durch die die Kanten entlang auftretenden Schubkräfte sichergestellt. Nach dem Spannungsverteilungsverfahren werden, statt ein Gleichungssystem für die Bestimmung der Schubkräfte anzuschreiben, durch schrittweise Annäherung die gesuchten Kantenspannungen direkt ermittelt.

Das Verfahren ist dem Momentenverteilungsverfahren von CROSS für die Berechnung von Durchlaufträgern und Mehrfeldrahmen analog, mit dem Unterschied, daß das Cross-Verfahren eine schrittweise Relaxationsmethode, das Spannungsverteilungsverfahren hingegen eine schrittweise Versteifungsmethode darstellt [6, 7, 8].

Im ersten Schritt der Berechnung stellen wir uns die Versteifungsdecke aus dem Faltwerk entfernt vor. Die so erzielte Konstruktion (eigentlich das sog. Grundsystem) läßt sich auf die bekannte Weise berechnen.

Vor allem werden die aus der Windlast auf die einzelnen Faltwerkplatten entfallenden Lasten ermittelt (Abb. 2):

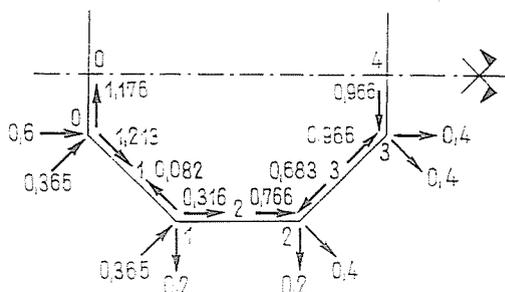


Abb. 2

Nach der Abbildung ergeben sich diese Werte zu

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 0 \\
 p_1 &= 1,131 \quad qb = c_1 qb \\
 p_2 &= 1,082 \quad qb = c_2 qb \\
 p_3 &= 0,283 \quad qb = c_3 qb \\
 p_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Man denkt sich jetzt das Faltwerk längs der Kanten aufgeschlitzt. Die Momente aus äußerer Last in den Einspannquerschnitten der so erhaltenen einzelnen plattenartigen Balken werden mit der Formel

$$M_i = p_i \cdot \frac{L^2}{2}$$

berechnet.

Da sämtliche Platten einander gleich sind, ist das Widerstandsmoment für jede Platte:

$$\frac{1}{6} db^2$$

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache wird die Anfangsspannung aus Formel

$$\sigma_{iq}^0 = c_i qb \frac{L^2}{2} \cdot \frac{6}{db^2} = c_i \frac{3qL^2}{bd} \tag{2}$$

Tafel I

| Kanten 0 | | 1 | | 2 | | 3 | |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,667 | 0,333 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,333 | 0,667 |
| 0 | +1,131 | -1,131 | +1,082 | -1,082 | +0,283 | -0,283 | 0 |
| +0,378 | -0,753 | +0,376 | -0,341 | +0,682 | -0,683 | +0,341 | |
| | -0,374 | +0,748 | -0,748 | +0,374 | +0,019 | -0,039 | +0,019 |
| -0,125 | +0,249 | -0,124 | +0,088 | -0,177 | +0,178 | -0,089 | |
| | -0,053 | +0,106 | -0,106 | +0,053 | -0,029 | +0,059 | -0,030 |
| -0,018 | +0,035 | -0,017 | +0,020 | -0,041 | +0,041 | -0,020 | |
| | -0,009 | +0,018 | -0,019 | +0,010 | -0,006 | +0,013 | -0,007 |
| -0,003 | +0,006 | +0,003 | -0,004 | -0,009 | +0,008 | -0,004 | |
| | | -0,003 | +0,004 | | | +0,003 | -0,001 |
| +0,232 | +0,232 | -0,024 | -0,024 | -0,189 | -0,189 | -0,019 | -0,019 |

errechnet. Die erhaltenen Werte sind in der zweiten Zeile von Tafel I angegeben, während in der ersten Zeile die Spannungsteiler stehen (natürlich unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse). Das Ergebnis der Spannungsteilung ist noch mit den Konstanten in Formel (2) zu multiplizieren. Die Spannungen an den einzelnen Kanten ergeben sich bei der Einspannung zu

$$\begin{aligned}
 \sigma_{0q} &= 0,696 \frac{qL^2}{bd}; & \sigma_{1q} &= -0,072 \frac{qL^2}{bd}; \\
 \sigma_{2q} &= -0,567 \frac{qL^2}{bd}; & \sigma_{3q} &= -0,019 \frac{qL^2}{bd}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Diese Spannungen nehmen die Kanten entlang einer Parabel gemäß ab, wobei ihr Wert bei dem Schott gleich Null ist.

Die Verschiebungen der einzelnen Platten in ihrer Ebene in Deckenhöhe lassen sich aus der Beziehung

$$u_{iq} = \frac{\sigma_{i-1} - c_i}{4} \cdot \frac{L^2}{bE}
 \tag{4}$$

berechnen.

Diese Werte sind:

$$\begin{aligned}
 u_{0q} &= 0 \\
 u_{1q} &= 0,192 \frac{qL^4}{b^2 dE}
 \end{aligned}$$

$$u_{2q} = 0,124 \frac{qL^4}{b^2 dE} \quad (5)$$

$$u_{3q} = -0,137 \frac{qL^4}{b^2 dE}$$

$$u_{4q} = 0$$

Eine Formänderung wird jedoch durch die in ihrer Ebene als unendlich steif betrachtete Versteifungsplatte verhindert. Dieser Umstand ist nun im weiteren zu berücksichtigen.

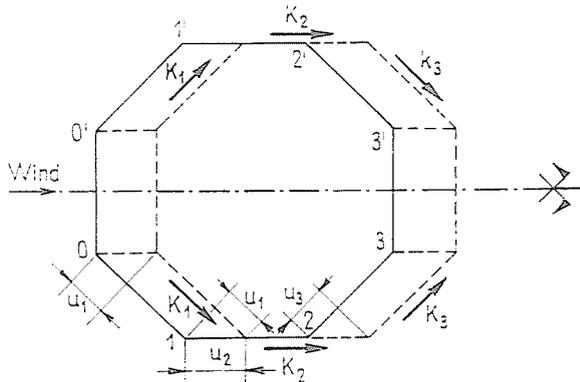


Abb. 3

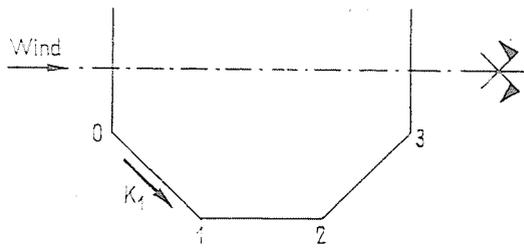


Abb. 4

Zufolge dieser Eigenschaft des Querschnitts und wegen der Symmetrieverhältnisse entsteht eine Formänderung gemäß Abb. 3, aus der auch die Verbindungskräfte ersichtlich sind.

Wegen der Symmetrie treten drei unbekannte Verbindungskräfte auf, zwischen denen des Gleichgewichts halber folgende Beziehung besteht:

$$K_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (K_1 + K_3) \quad (6)$$

Lassen wir auf das Faltwerk in der Höhe der Decke eine Kraft K_1 — von einstweilen unbekannter Größe — wirken (Abb. 4).

Tafel II

| 0 | | 1 | | 2 | | 3 | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,667 | 0,333 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,333 | 0,667 |
| 0 | -1,000 | -1,000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +0,333 | -0,667 | +0,333 | | | | | |
| | -0,166 | +0,333 | -0,334 | +0,166 | | | |
| -0,055 | +0,111 | -0,055 | +0,041 | -0,083 | +0,083 | -0,041 | |
| | -0,024 | +0,048 | -0,048 | +0,024 | -0,013 | +0,027 | -0,014 |
| -0,008 | +0,016 | -0,008 | +0,009 | -0,019 | +0,018 | -0,009 | |
| | -0,004 | +0,008 | -0,009 | +0,004 | -0,003 | +0,006 | -0,003 |
| -0,001 | +0,003 | -0,001 | +0,002 | -0,004 | +0,003 | -0,001 | |
| | | +0,001 | -0,002 | | | +0,001 | |
| +0,269 | -0,269 | -0,327 | -0,327 | +0,088 | +0,088 | -0,017 | -0,017 |

Das Einspannungsmoment ist:

$$M_{11} = K_1 L$$

Die Anfangsspannung beträgt:

$$\sigma_{11}^0 = K_1 L \frac{6}{db^2}$$

Die Spannungsteilung wurde in Tafel II durchgeführt. Deren Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} \sigma_{01} &= + 1,614 \frac{K_1 L}{b^2 d} & \sigma_{11} &= - 1,962 \frac{K_1 L}{b^2 d} \\ \sigma_{21} &= + 0,528 \frac{K_1 L}{b^2 d} & \sigma_{31} &= - 0,102 \frac{K_1 L}{b^2 d} \end{aligned} \quad (7)$$

Zufolge der Symmetrieverhältnisse erhält man die unter Einwirkung der — einstweilen gleicherweise unbekanntenen — Verbindungskraft K_3 auftretenden Spannungen durch eine vorzeichenrichtige Spiegelung von (7):

$$\begin{aligned} \sigma_{03} &= + 0,102 \frac{K_3 L}{b^2 d}; & \sigma_{13} &= - 0,528 \frac{K_3 L}{b^2 d}; \\ \sigma_{23} &= + 1,962 \frac{K_3 L}{b^2 d}; & \sigma_{33} &= - 1,614 \frac{K_3 L}{b^2 d} \end{aligned} \quad (8)$$

Aufgrund von Gleichung (6) erhält man die unter Einwirkung der Verbindungskraft K_2 auftretenden Spannungen ohne Schwierigkeit aus (7) und (8):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{02} &= -1,140 \frac{K_1 L}{b^2 d} - 0,072 \frac{K_3 L}{b^2 d} \\
 \sigma_{12} &= +1,386 \frac{K_1 L}{b^2 d} + 0,373 \frac{K_3 L}{b^2 d} \\
 \sigma_{22} &= -0,373 \frac{K_1 L}{b^2 d} - 1,386 \frac{K_3 L}{b^2 d} \\
 \sigma_{32} &= +0,072 \frac{K_1 L}{b^2 d} + 1,140 \frac{K_3 L}{b^2 d}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Aus der Summierung von (7), (8) und (9) ergeben sich die Spannungen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{0K} &= +0,474 \frac{K_1 L}{b^2 d} + 0,030 \frac{K_3 L}{b^2 d} \\
 \sigma_{1K} &= -0,576 \frac{K_1 L}{b^2 d} - 0,155 \frac{K_3 L}{b^2 d} \\
 \sigma_{2K} &= +0,155 \frac{K_1 L}{b^2 d} + 0,576 \frac{K_3 L}{b^2 d} \\
 \sigma_{3K} &= -0,030 \frac{K_1 L}{b^2 d} - 0,474 \frac{K_3 L}{b^2 d}
 \end{aligned} \tag{10}$$

wo K_1 und K_3 einstweilen unbekannte Verbindungskräfte bedeuten.

Da sich die durch die Verbindungskräfte erzeugten Spannungen die Kanten des Faltwerkes entlang linear verändern, lassen sich die Verschiebungen in Deckenhöhe aus Formel

$$u_{ik} = \frac{\sigma_{i-1,k} - \sigma_{ik}}{3} \cdot \frac{L^2}{Eb} \tag{11}$$

errechnen. In diesem Ausdruck sind $\sigma_{i-1,k}$ und σ_{ik} die unter (10) ermittelten Spannungen. Für die einzelnen Verschiebungen gelten:

$$\begin{aligned}
 u_{0K} &= 0 \\
 u_{1K} &= +0,350 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} + 0,062 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE} \\
 u_{2K} &= -0,244 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} - 0,244 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE}
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$u_{3k} = + 0,062 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} + 0,350 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE}$$

Für die Ermittlung der zwei unbekanntenen Verbindungskräfte K_1 und K_3 können zwei Formänderungsgleichungen aufgeschrieben werden. Unter Anwendung der Kurzbezeichnungen in Abb. 3 kann die Formänderung des Faltwerkes nur eine solche sein, die die Bedingungen

$$u_1 = u_3 \quad \text{und} \quad u_2 = u_1 \sqrt{2} \quad (13)$$

befriedigt.

Nach Einsetzen der Werte in (5) und (11), erhält man:

$$\begin{aligned} & 0,192 \frac{qL^4}{b^2 dE} + 0,350 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} + 0,062 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE} = \\ = & - 0,137 \frac{qL^4}{b^2 dE} + 0,062 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} + 0,350 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & 0,124 \frac{qL^4}{b^2 dE} - 0,244 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} - 0,244 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE} = \\ = & 0,272 \frac{qL^4}{b^2 dE} + 0,495 \frac{K_1 L^3}{b^3 dE} + 0,088 \frac{K_3 L^3}{b^3 dE} \end{aligned} \quad (14)$$

Die Lösungen der beiden Gleichungen sind:

$$K_1 = - 0,492 \, qbL \quad \text{und} \quad K_3 = 0,649 \, qbL$$

In Kenntnis der Verbindungskräfte kann man nun die gesuchten Spannungen im Einspannquerschnitt des Faltwerkes ermitteln: In die Spannungsformel (10) werden die ermittelten Werte für K_1 und K_3 eingesetzt und die Spannungen unter (3) werden hinzugezählt. Damit erhält man die Werte

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0,483 \frac{qL^2}{bd}; & \sigma_1 &= 0,110 \frac{qL^2}{bd}; \\ \sigma_2 &= - 0,269 \frac{qL^2}{bd}; & \sigma_3 &= - 0,312 \frac{qL^2}{bd} \end{aligned} \quad (15)$$

Die ermittelten Spannungen sowie die ohne Berücksichtigung der Versteifungsplatte bestimmten Spannungen (3) sind in Abb. 5 — die ersteren mit vollen, die letzteren mit gestrichelten Linien — eingetragen. Die Werte in der Abbildung sind mit qL^2/bd zu multiplizieren.

Die erhaltenen Spannungen stimmen mit den Werten in [5] gut überein.

Da die Änderungen die Erzeugende entlang sowohl der Spannungen in (3), als auch jener in (10) bekannt sind, hat es weiter kein Hindernis, die endgültigen Spannungen in einem beliebigen Querschnitt des Faltwerkes zu bestimmen.

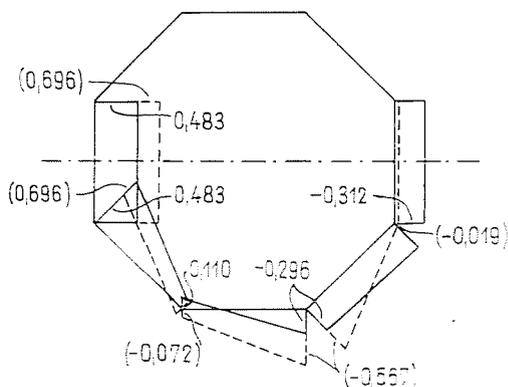


Abb. 5

Aufgrund der vorstehenden Ausführungen läßt sich feststellen, daß durch Querschotte versteifte prismatische Faltwerke nach dem Spannungsverteilungsverfahren ohne Schwierigkeit berechnet werden können.

Zusammenfassung

Prismatische Faltwerke werden an Stellen ohne äußere Abstützung oft durch Querschotte versteift (z. B. ein Faltwerk mit senkrechter Achse durch Zwischendecken). Auch für die Berechnung solcher Konstruktionen eignet sich das Spannungsverteilungsverfahren. Das zweckmäßige Vorgehen wird an der Lösung einer im Fachschrifttum mehrfach angeführten Aufgabe gezeigt.

Schrifttum

1. CRAEMER, H.: Der Einfluß von Querschotten auf die Beanspruchung geschlossener Faltwerke. Schweizerische Bauzeitung **69**, 613—614 (1951).
2. CRAEMER, H.: Allgemeine Theorie der Faltwerke. Beton und Eisen **29**, 276—281 (1930).
3. EHLERS, G.: Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. Beton und Eisen **29**, 281—286, 291—296 (1930).
4. BORN, J.: Faltwerke. Stuttgart 1954.
5. GIRMANN, K.: Flächentragwerke. VI. Ausgabe, 573—578 (1963).
6. BECKER, S.: Hasábalakú lemezművek számítása feszültségmódszerrel. (Berechnung prismatischer Faltwerke nach der Spannungsmethode.) Doktorarbeit, 1962.
7. BECKER, S.: Berechnung prismatischer Faltwerke nach dem Spannungsverteilungsverfahren. ÉKME Tudományos Közleményei **XII** 5—24. (1966).
8. BECKER, S.: Hasábalakú lemezművek számítása feszültségosztási módszerrel. (Berechnung prismatischer Faltwerke nach der Spannungsverteilungsmethode.) Magyar Építőipar **85—91**. (1968).

Oberassistent Dr. Sándor BECKER; Budapest XI, Műegyetem rakpart 3, Ungarn