

# СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ САХАРОЗЫ

М. А. КАРАГОДИН

Московский технологический институт пищевой промышленности

Поступило: 4 января 1986 г.

Представлено: проф. д-р. Р. Ластить

## Abstract

A new mathematical model of sugar crystallization process have been developed in Moscow Food Industry Institute. The structure of the model is shown, and the mathematical expressions, which show the functions between the parameters of the vacuum-pan crystallization are described. The model can be used for computer calculations of the process.

В результате анализа мировых достижений в области кристаллизации сахарозы в периодически действующих вакуум-аппаратах, а также на базе ряда экспериментальных данных в Московском технологическом институте пищевой промышленности создана математическая модель процесса кристаллизации сахарозы, в которой на базе проведенных исследований и последних литературных данных [2—13] систематизированы прямые и обратные связи между непрерывно изменяющимся составом утфельной массы, кинетикой кристаллизации, физико-химическими и другими свойствами системы.

На рис. 1 представлена структура математической модели процесса кристаллизации сахарозы в периодически действующих вакуум-аппаратах. В ней показаны функциональные связи между важнейшими параметрами процесса, такими, как скорость кристаллизации, доброкачественность, вязкость, степень пересыщения раствора, температура утфеля, содержание сухих веществ, масса кристаллов, расходы пара и сиропа, коэффициент теплопередачи, степень разложения сахарозы и др.

Структура математической модели представлена в виде блоков. Каждый блок описывает зависимость определенного параметра от ряда других физико-химических параметров процесса. Стрелками показаны взаимосвязи между блоками. Например, в блоке X определена  $V_{кр}$  в зависимости от  $t_v$ ,  $\pi$ ,  $\eta_M$  и  $ДВ_M[K_v=f(ДВ)]$ . Значение  $t_v$  определяется в блоке VI,  $\Pi$ -в в блоке II,  $\eta_M$  — в блоке VII,  $K_v$  — в блоке I.

Уравнения, входящие в математическую модель, структура которой показана на рис. 1, представлены ниже. В них вошли и уравнения, уточненные автором.

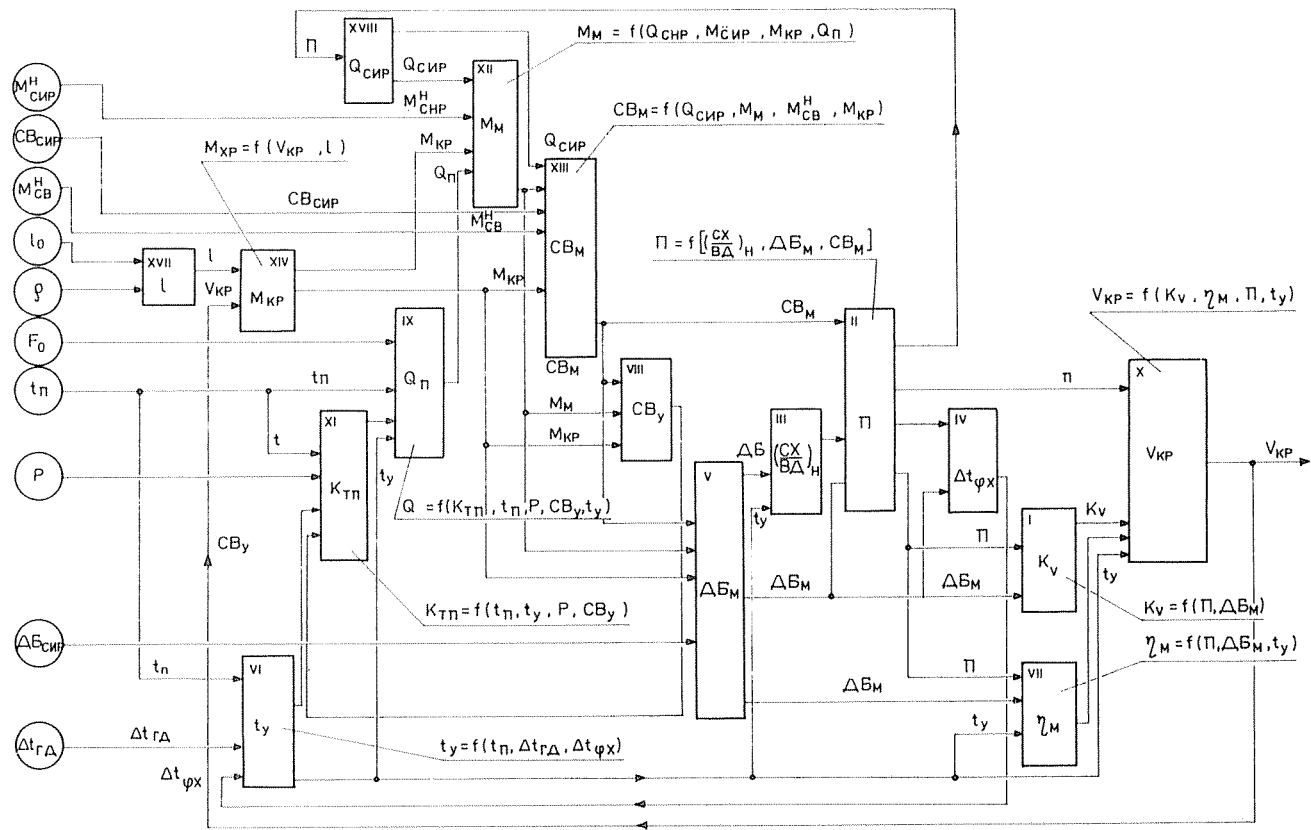


Рис. 1. Структурная схема математической модели процесса уваривания утфелей

Значение удельной скорости кристаллизации предлагается определить по уточненной нами зависимости, основанной на уравнении Фика:

$$V_{\text{кр}} = \frac{1}{F_{\text{кр}}} \cdot \frac{dM_{\text{кр}}}{d\tau} = K_v \frac{t_y(\Pi - 1)}{\eta_M}, \quad (1)$$

где  $K_v$  — коэффициент, зависящий от  $ДБ$  межкристалльного раствора [1]:

$$K = 550 + 10,5 ДБ_M - 190\,000 (\Pi - 1)^2 + 2450 ДБ_M (\Pi - 1)^2.$$

Зависимость степени пересыщения от содержания сухих веществ межкристалльного раствора  $СВ_M$ , доброкачественности раствора  $ДБ_M$  и концентрации насыщения раствора  $(СХ/ВД)_M$  описывается уравнением [8]:

$$\pi = \frac{СВ_M ДБ_M}{100(1 - СВ_M)(СХ/ВД)_M}, \quad (2)$$

где  $СВ_M$  измеряется в массовых долях, а концентрацию насыщения раствора  $(СХ/ВД)_M$  предлагается определять по формуле:

$$\left(\frac{СХ}{ВД}\right)_M = 3,33 + 0,18t_y - 0,14t_y ДБ_M \cdot 10^{-2} - \\ - 18,8 ДБ_M \cdot 10^{-2} + 16,75 ДБ_M^2 \cdot 10^{-4}. \quad (3)$$

Доброкачественность межкристалльного раствора сахарозы  $ДБ_M$  рассчитывается в зависимости от массы  $M_M$  и концентрации сухих веществ  $СВ_M$  межкристалльного раствора, массы кристаллов сахара  $M_{\text{кр}}$  и доброкачественности исходного сиропа  $ДБ_{\text{сир}}$  [4]:

$$ДБ_M = \frac{ДБ_{\text{сир}}(M_M СВ_M + M_{\text{кр}}) - 100M_{\text{кр}}}{M_M СВ_M}. \quad (4)$$

Температура увариваемой массы складывается из температуры кипения чистой воды  $t_B$ , физико-химической депрессии  $\Delta tr Д$ , гидродинамической депрессии  $\Delta tr Д$  [5]:

$$t_y = t_B + \Delta t \varphi x + \Delta tr Д. \quad (5)$$

Исследования зависимости  $\Delta t \varphi x$  от степени пересыщения, доброкачественности и давления (температуры кипения чистой воды) позволили получить следующее уравнение В. Тужилкина [8]:

$$\Delta t \varphi x = 15,268 + 3,0118\pi + 0,052t_B - 0,194 ДБ_M + \\ + 0,0732\pi t_B - 0,0312\pi \cdot ДБ_M - 0,000328t_B \cdot ДБ_M + \\ + 0,000445\pi \cdot ДБ_M \cdot t_B. \quad (6)$$

Гидродинамическая депрессия определяется по формуле В. Попова [5]:

$$\Delta tr D = \Delta tr c \cdot e^{-0,00005675 \cdot q}, \quad (7)$$

где  $\Delta tr c$  — повышение температуры кипения из-за гидростатического эффекта,  $q$  — плотность теплового потока. При исследовании скорости кристаллизации в лабораторных установках малого объема влиянием  $\Delta tr D$  можно пренебречь.

Зависимость вязкости межкристалльного раствора  $\eta_M$  от вязкости насыщенного раствора  $\eta_{MO}$ ,  $\pi$  и  $ДБ_M$  определяем на основании уравнения В. Мауранди [10]:

$$\eta_M = \eta_{MO} \cdot A^{10(\pi-1)}, \quad (8)$$

где

$$A = 0,525 \frac{100 - ДБ_M}{ДБ_M} + 1,65, \quad (9)$$

а  $\eta_{MO}$  определяем по формуле, полученной автором:

$$\begin{aligned} \eta_{MO} = & (130,122 - 2,496 ДБ_M + 0,012 ДБ_M^2) + \\ & + (-272,737 + 5,058 ДБ_M - 0,023 ДБ_M^2) \cdot 10^{-2} t_Y + \\ & + (18,590 - 0,331 ДБ_M + 0,0015 ДБ_M^2) \cdot 10^{-3} t_Y^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Вязкость утфеля  $\eta_Y$  зависит от  $\eta_M$ , размера кристаллов  $l$  и объемной доли кристаллов  $\varphi$  и определяется по формуле Ю. Фурсова [7]:

$$\eta_Y = \eta_M / (1 - 3,4 \cdot \varphi \cdot l^{-0,0525} + 3,01 \varphi^2 l^{-0,0965}), \quad (11)$$

$$\varphi = \frac{M_{KP} / \rho_C}{M_{KP} / \rho_C + M_M / \rho_M}, \quad (12)$$

где  $\rho_C$  — плотность кристаллов сахара ( $1,59 \text{ г/см}^3$ );  $\rho_M$  — плотность межкристалльного раствора (по данным З. Бубника [3];  $\rho_{MCP} = 1,378 \text{ г/см}^3$ ).

Массу кристаллического сахара рассчитывают, исходя из значений скорости кристаллизации  $V_{KP}$  и поверхности кристаллов  $F_{KP}$ :

$$M_{KP} = \int_0^{\tau} F_{KP} V_{KP} d\tau. \quad (13)$$

Поверхность кристаллов определяют, исходя из линейного размера кристалла сахара  $l$ , средневзвешенного числа кристаллов  $N$  и функции плотности распределения линейных размеров кристаллов  $f(l)$ . Предполагается, что с ростом кристаллов во времени закон распределения остается нормальным с постоянной дисперсией:

$$F_{KP} = 2,1N \int_{-\infty}^{+\infty} l^2 f(l) \cdot dl, \quad (14)$$

где

$$f(l) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(l-l_k)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (15)$$

где  $l$  — значение линейного размера в данный момент времени;  $l_k$  — математическое ожидание линейного размера кристалла в данный момент времени;  $\sigma^2$  — дисперсия, принимаемая равной 0,12 на основании данных П. Силина [3].

После выяснения значения интеграла в формуле (14) получаем выражение для площади поверхности кристаллов:

$$F_{\text{кр}}(\tau) = 2,1N(l_k^2 + \sigma^2). \quad (16)$$

Значения  $l_k$  и  $\sigma$  можно рассчитать по известным формулам математической статистики, усредняющим данные выборки [9]. В качестве расчетной формулы для вычисления математического ожидания линейного размера кристалла в каждый момент времени может быть предложена:

$$l_k = l_0 + 2 \int_0^{\tau} (V_{\text{кр}}/\rho_c) \cdot d\tau, \quad (17)$$

где  $l_0$  — начальный средневзвешенный размер кристаллов в данный момент времени.

Растворение кристаллов в результате процесса рекристаллизации, согласно данным Д. Шлипхаке [11], происходит в основном в первые 4–5 минут после заводки и касается лишь кристаллов с размером порядка 5–10. Дальнейшее наращивание кристаллов происходит в метастабильной зоне ( $\pi = 1, 1 - 1, 12$ ) в течении 98% всей длительности процесса, что ведет к минимизации вероятности появления вторичных зародышей. Учитывая вышесказанное, число кристаллов в модели принимается равным  $N$  и оно не меняется в течение процесса. Предполагается, что  $N$  соответствует средневзвешенному числу кристаллов, установившемуся через несколько минут после заводки, когда основная масса кристаллов растворилась, а остальные кристаллы выросли до такого размера (0,03–0,05 мм), что их дальнейшее полное растворение практически невозможно.

Число кристаллов  $N$  может быть рассчитано, исходя из конечной массы кристаллов сахара и среднего конечного размера кристалла [10].

Зависимость массы межкристалльного раствора  $M_M$  складывается из массы первоначально набранного сиропа, массы сиропа, поступившего в аппарат за время  $\tau$ , за вычетом массы воды, испарившейся из раствора, и выкристаллизовавшегося сахара  $M_{\text{кр}}$ :

$$M_M = M_M^H + \int_0^{\tau} Q_{\text{сир}} \cdot d\tau - \int_0^{\tau} Q_{\text{исп}} d\tau - M_{\text{кр}}, \quad (18)$$

где  $Q_{\text{сир}}$  — расход подаваемого сиропа;  $Q_{\text{исп}}$  — скорость испарения воды ( $Q_{\text{исп}} \approx Q_{\pi}$ ).

Содержание сухих веществ в межкристальном растворе  $CB_M$  зависит от массы сухих веществ первоначально набранного сиропа  $M_{\text{СВ}}^H$ , массы выкристаллизовавшегося сахара и массы межкристального раствора:

$$CB_M = \frac{M_{\text{СВ}}^H + \int_0^{\tau} Q_{\text{сир}} CB_{\text{сир}} dt - M_{\text{КР}}}{M_M} \quad (19)$$

где  $CB_M$  измеряется в массовых долях.

Зависимость расхода греющего пара  $Q_{\pi}$ , полностью идущего на испарение воды, от площади поверхности греющей камеры  $F$ , коэффициента теплопередачи  $K_{\text{ТП}}$  и градиента температур греющего пара  $t_{\pi}$  и утфеля определяют по уравнению В. Попова [5]:

$$Q_{\pi} = \frac{K_{\text{ТП}} F (t_{\pi} + t_{\gamma})}{I_1 - I_2} \quad (20)$$

где  $I_1$  — энтальпия пара;  $I_2$  — энтальпия конденсата.

Зависимость коэффициента теплопередачи от содержания сухих веществ утфеля  $CB_{\gamma}$ , градиента температур находят по В. Попову [5]:

$$K_{\text{ТП}} = 219 \left( \frac{1 - CB_{\gamma}}{1,18 - CB_{\gamma}} \right)^2 \left( \frac{760 - P}{736} \right)^{0,84} (t_{\pi} - t_{\gamma}), \quad (21)$$

где

$$CB_{\gamma} = \frac{CB_M \cdot M_M + M_{\text{КР}}}{M_M + M_{\text{КР}}}, \quad (22)$$

$CB_{\gamma}$  — измеряется в массовых долях;  $P$  — разрежение в вакуум-аппарате.

Конечные значения цветности белого сахара  $ЦB_{\text{СХI}}$  могут быть рассчитаны по формуле К. Вагнеровского [12]:

$$ЦB_{\text{СХI}} = \frac{HC_{\text{сир}} \cdot ЦB_{\text{НСсир}} + HC_{\text{СХII}} ЦB_{\text{НСII}} \cdot 2 + HC_{\text{СХIII}} ЦB_{\text{НСIII}} \cdot 3}{M_{\text{СВсир}} + M_{\text{СХII}} + M_{\text{СХIII}}}, \quad (23)$$

где  $HC_{\text{сир}}$ ,  $HC_{\text{СХII}}$ ,  $HC_{\text{СХIII}}$  — количество несахаров в сиропе, сахаре утфеля II кристаллизации и сахаре утфеля III кристаллизации, в % к массе свеклы,  $ЦB_{\text{НСсир}}$ ,  $ЦB_{\text{НСсирII}}$ ,  $ЦB_{\text{НСIII}}$  — цветности несахаров сиропа, несахара утфеля II кристаллизации, несахара утфеля III кристаллизации (по средним данным В. Попова [5] их значения равны соответственно 233,6; 750; 400° шт.  $M_{\text{СВсир}}$ ,  $M_{\text{СВ}}$ ,  $M_{\text{СХIII}}$  — масса сухих веществ в сиропе, сахара II, сахара III в % к массе переработанной свеклы.

Значения параметров, входящих в уравнение (23), рассчитывают на основании исходных параметров сиропа и параметров мелассы по методике К. Вагнеровского [12].

Количество теплоты, выделяемое в процессе кристаллизации сахарозы, определяются по уравнению М. Боррото [13]:

$$\frac{dQ_{\text{КР}}}{d\tau} = \chi_{\text{КР}} \cdot \frac{dM_{\text{КР}}}{d\tau}, \quad (24)$$

где

$$\chi_{\text{КР}} = 3,81 + 0,261 \cdot t_{\text{М}}. \quad (25)$$

Количество термохимически разложившейся сахарозы  $M_{\text{раз}}$  по зависимости от  $pH$  сиропа, температуры утфеля и времени уваривания утфеля  $\tau$ , определяют по А. Сапронову [2]:

$$M_{\text{раз}} = 100(e^{-K_1\tau}), \quad (26)$$

где

$$K_1 = 10^{16,81} - \frac{5666,7}{t_{\text{Y}} + 273} - pH + \\ + 10^{20,17} - \frac{9064,7}{t_{\text{Y}} + 273} - 0,017053t_{\text{Y}} + 0,57pH. \quad (27)$$

Конечную массу кристаллического сахара определяют по уравнению:

$$M_{\text{КР}}^{\text{K}} = M_{\text{КР}} - M_{\text{раз}}. \quad (28)$$

Скорость циркуляции утфеля рассчитывают по В. Попову [5]:

$$w_0 = \frac{f_{\text{оп}}}{f_{\text{под}}} \cdot \frac{\bar{w}}{w_{\text{max}}} \cdot \frac{\Delta t}{CB_{\text{Y}}^{\text{II}}} \cdot \exp \left[ -b \left( \frac{K_{\text{P}}}{100 - K_{\text{P}}} \right)^2 \right], \quad (29)$$

где  $\frac{f_{\text{оп}}}{f_{\text{под}}}$  — отношение площадей сечений опускных и подъемных каналов;

$\frac{\bar{w}}{w_{\text{max}}}$  — отношение средней скорости в канале и максимальной на его оси, определяемое по В. Попову [5];  $\Delta t$  — температурный напор, °С;

$b = f(cB_{\text{Y}}, K_{\text{P}})$  — коэффициент [6];  $n = f(\Delta t)$ ,  $\frac{f_{\text{под}}}{f_{\text{оп}}}$  — показатель степени [6].

Вспомогательные величины, такие, как процентное содержание кристаллов  $K_{\text{P}}$ , расстояние между кристаллами  $d$ , отношение массы раствора к площади поверхности кристаллов  $M_{\text{M}}/\Phi_{\text{КР}}$ , массовая скорость кристаллизации  $G_{\text{КР}}$ , рассчитываются по следующим формулам:

$$K_p = \frac{M_{\text{КР}}}{M_{\text{КР}} + M_{\text{М}}} \cdot 100, \quad (30)$$

$$d = \frac{M_{\text{М}}}{2,1l^2 N}. \quad (31)$$

Площадь поверхности кристаллов определяется по следующей формуле:

$$F_{\text{КР}} = 2,1l^2 \cdot N, \quad (32)$$

$$\frac{M_{\text{М}}}{F_{\text{КР}}} = \frac{M_{\text{М}}}{2,1l^2 \cdot N}, \quad (33)$$

$$G_{\text{КР}} = V_{\text{КР}} \cdot F_{\text{КР}} = 2,1l^2 \cdot N \cdot V_{\text{КР}}. \quad (34)$$

Массу утфеля определяют как:

$$M_{\text{У}} = M_{\text{КР}}^{\text{К}} + M_{\text{М}}. \quad (35)$$

Предлагаемое математическое описание процесса кристаллизации сахарозы в вакуум-аппарате учитывает многообразие связей между технологическими параметрами процесса, учитывает все основные факторы, влияющие на ход процесса и может быть использовано для моделирования процесса уваривания сахарных утфелей на ЭВМ, для выполнения практических количественных и качественных расчетов кристаллизации сахарозы.

### Заключение

Представлена математическая модель процесса кристаллизации сахарозы в вакуум-аппаратах, созданная в МТИПП на основе анализа мировых достижений в области кристаллизации сахарозы, а также на базе ряда экспериментальных данных. Представлена структура математической модели. Описаны математические зависимости, входящие в модель, отражающие взаимосвязь основных параметров процесса уваривания сахарного утфеля в вакуум-аппарате. Предложенная математическая модель может быть использована для моделирования процесса уваривания на ЭВМ, для выполнения практических количественных и качественных расчетов процесса.



## Литература

1. КАРАГОДИН, М. А.: Совершенствование процесса уваривания сахарных утфелей в периодически действующих вакуум-аппаратах. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 1983.
2. САПРОНОВ, А. Р.: Скорость разложения инвертного сахара в зависимости от температуры. Сахарная промышленность (10) 10, 1968.
3. СИЛИН, П. М.: Технология сахара. Пищевая промышленность, Москва, 1967, р. 450.
4. КОТ, Ю. Д.: Моделирование процессов промышленной кристаллизации утфеля. Труды ВНИИСП, Вып. XXI. 15—36. (1974).
5. ПОПОВ, В. Д.: Основы теории тепло- и массообмена при кристаллизации сахарозы. Москва, Пищевая промышленность 320. 1973.
6. ТРОЙЛО, В. П.: Определяющая температура в утфельных вакуум-аппаратах. Научно-ва думка. Вып. I., 230—242, (1971).
7. ГРОМКОВСКИЙ, А. И.—ФУРСОВ, В. М.: Вязкость утфеля. Пищевая технология (4), 158—161. 1977.
8. ТУЖИЛКИН, В. И.—КАРАГОДИН, М. А.—СОРОКИН, А. И.: К вопросу о разработке математической модели процесса кристаллизации сахара. Известия вузов СССР, Пищевая технология. (6) 109—111. (1982).
9. ХАРТМАН, С. К.—ЛЕЦКИЙ, А.—ШЕФЕР, В.: Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. Москва, МИР, р. 552. (1977).
10. MAURANDI, V.: Teoria e pratica della cottura de sughi. Industria Saccaribera Italiana. 64. 116—124. (1972).
11. SHLIEPHAKE, D.—PETERSEN, H.—SCHNEIDER, F.: Einfluss der Strömungsverhältnisse auf die Kristallisationsgeschwindigkeit der Saccharose. Zucker 27. 113—121. (1974).
12. WAGNEROWSKI, K.: The optimal system of masseenit quality. Gazeta Cukrownicza, 233—238. (1975).
13. BORRETO, M. R.—POLONIK, V.: Investigacion de la sensibilidad de los parametros del proceso de cristallisation de la sacaroza en regimen discontinuo. Centro Azucar Enero-Abril 1978. pp. 39—53.

МИХАИЛ А. КАРАГОДИН. Московский технологический институт  
пищевой промышленности МОСКВА,  
Волокаламское шоссе 11. СССР