ÜBER EIN FUNKTIONENFOLGEN-TRIPEL FÜR DIE GEEIGNETE BESCHREIBUNG VERSCHIEDENER PHYSIKALISCHER VORGÄNGE

Von

K. Tettamanti und R. Stomfai*

Lehrstuhl für Chemische Verfahrenstechnik, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 2. Februar, 1972

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] wurde bewiesen, daß im Wertebereich $-1 \leq x \leq \infty$ der Funktion $\ln(1+x)$ zwei Schrankenfunktionen:

$$\left|\frac{2x}{2+x}\right| \leq \left|\ln(1+x)\right| \leq \left|\frac{x}{(1+x)^{1/2}}\right| \tag{1}$$

oder

$$|S_1(x)| \leq |L(x)| \leq |S_2(x)| \tag{1a}$$

zugeordnet werden können.

Auch wurde nachgewiesen, daß die intermediäre Funktion $\ln(1+x)$ durch die beiden Schrankenfunktionen im Bereich $-0{,}5 < x < +1{,}0$ mit einer Genauigkeit ± 4 bzw. $\pm 2\%$ angenähert wird. Eine Folge davon war die approximative Berechenbarkeit von Integralen mit Hilfe jeder der Schrankenfunktionen in allen Fällen, wo der Integrand die Funktion $\ln(1+x)$ in einer Form enthält, die dafür nicht geeignet ist, das Integral in geschlossener Form zu gewinnen.

Aus (1) kann man durch die Substitution $b = a(1+x)$ die Ungleichungen der arithmetischen, geometrischen und logarithmischen Mittel

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{b-a}{\ln\dfrac{b}{a}} \geq (a.\,b)^{1/2} \tag{2}$$

$$M_{\mathrm{ar}} \geq M_{\log} \geq M_{\mathrm{geom}} \tag{2a}$$

ableiten.

* Geophysikalisches Institut »Loránd Eötvös«, Budapest

Bemerkung:

1. Die Wichtigkeit der Ungleichungen (1) in der Physik kann auch durch das folgende Beispiel belegt werden [2]: Für die axiale Rückvermischung ist die Beziehung bekannt:

$$Pé = N \cdot \ln \frac{1+\alpha}{\alpha}.$$

Auch eine annähernde Formel von MIYAUCHI und VERMEULEN ist bekannt [3]:

$$Pé \simeq \frac{2}{1+2\alpha} \cdot N.$$

Dabei bedeuten:

$\alpha = \frac{w_{\text{rec}}}{w_0}$ das Verhältnis des Rezirkulationsstromes zum eingespeisten Strom

$N =$ die Stufenzahl.

Durch die Einführung der Bezeichung $x = \frac{1}{\alpha}$ sowie auf Grund der Beziehungen (1) erhält man direkt die obige Annäherungsformel. Es ist noch hervorzuheben, daß auch die Genauigkeit der Annäherung abgeschätzt werden kann. Dabei läßt sich in Kenntnis der Ungleichung (1) die obere Schranke der *Pé*-Zahl auch in der Form $(\alpha + \alpha^2)^{-0,5}$ aufschreiben.

2. Die Ungleichung (1) wurde von Verfasser und Mitarbeitern für angenäherte Integrationen bei der Berechnung der theoretischen Bodenzahl mit Erfolg angewandt [4].

Da sich die Beziehung zwischen den drei Funktionen sehr wertvoll erwiesen hatte, wurde untersucht, ob diese Ungleichung nicht etwa verallgemeinert und auch auf andere Funktionen ausgedehnt werden könnte.

2. Die Verallgemeinerung der Schrankenfunktionen

Es ergab sich, daß die Schrankenfunktionen $S_1(x)$ und $S_2(x)$ Spezielfälle einer größeren *Funktionenfamilie* sind:

$$S_{mn}(x) = \frac{mx}{(m+x)^{1/n}} \tag{3}$$

$$-1 \leq x \leq +\infty$$

m und n sollen vorläufig die Folge der natürlichen (positiven ganzen) Zahlen bedeuten.

Die Funktionenfamilie (3) kann durch folgende Matrix symbolisiert werden:

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & \dots & m & \dots\infty \\
\hline
1 & \frac{x}{1+x} & \frac{2x}{2+x} & \frac{3x}{3+x} & \dots & \frac{mx}{m+x} & \dots x \\
2 & \frac{x}{(1+x)^{1/2}} & \frac{2x}{(2+x)^{1/2}} & \frac{3x}{(3+x)^{1/2}} & \dots & \frac{mx}{(m+x)^{1/2}} & \dots\infty \\
3 & \frac{x}{(1+x)^{1/3}} & \frac{2x}{(2+x)^{1/3}} & \frac{3x}{(3+x)^{1/3}} & \dots & \frac{mx}{(m+x)^{1/3}} & \dots\infty \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\
n & \frac{x}{(1+x)^{1/n}} & \frac{2x}{(2+x)^{1/n}} & \frac{3x}{(3+x)^{1/n}} & \dots & \frac{mx}{(m+x)^{1/n}} & \dots\infty \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots,\dots \\
\infty & x & 2x & 3x & \dots & mx & \dots\infty
\end{array}
\tag{4}
$$

Bemerkung. Von der Matrizendarstellung abweichend können die Parameter m und n jeden beliebigen positiven reellen Zahlenwert auch annehmen.

Vorläufig sollen sich die Untersuchungen auf die Zeile $n = 1(S_{m1})$ und auf die Spalte $m = 1(S_{1n})$ der Matrix beschränken.

Auf diese Weise erhält man folgende zwei Funktionenfolgen: die sogenannte *arithmetische* Schrankenfunktionenfolge:

$$S_{m1} = \frac{mx}{m+x} \qquad 1 \leq m \leq +\infty \tag{5a}$$

und die sogenannte *geometrische* Schrankenfunktionenfolge:

$$S_{1n} = \frac{x}{(1+x)^{1/n}} \qquad 1 \leq n \leq +\infty\,. \tag{5b}$$

Die Schrankenfunktionen S_1 und S_2 in der Ungleichung (1) sind mit durch $m = n = 2$ gekennzeichnete, sogenannte »korrespondierende« Glieder dieser beiden Funktionenfolgen:

$$S_1 = S_{21} = \frac{2x}{2+x} \tag{6a}$$

$$S_2 = S_{12} = \frac{x}{(1+x)^{1/2}}\,. \tag{6b}$$

Im allgemeinen werden von den beiden Funktionenfolgen jene Funktionenpaare *korrespondierende Funktionenpaare* genannt, für die die Identität

$$m = n = k \tag{7}$$

besteht. Die korrespondierenden Funktionenpaare sind also:

$$\begin{aligned} m = k\,, \quad n = 1 \ldots S_{k1} &= \frac{kx}{k+x} \qquad \text{und} \\ m = 1\,, \quad n = k \ldots S_{1k} &= \frac{x}{(1+x)^{1/k}}\,, \end{aligned} \tag{8}$$

wo $1 \leq k \leq +\infty$.

Es ist zu bemerken, daß in den Fällen $k = 1$ und $k = +\infty$ die korrespondierenden Funktionen eine Identität bedeuten:

$$k = 1 \ldots S_{11} = \frac{x}{1+x} \tag{9a}$$

$$k = +\infty \ldots S_{\infty 1} = S_{1\infty} = x\,. \tag{9b}$$

Die zwei Funktionenfolgen können also für integere Parameterwerte von k wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{array}{llllllll} S_{k1}(x)\colon & \frac{x}{1+x} \longrightarrow & \frac{2x}{2+x} \longrightarrow & \frac{3x}{3+x} \longrightarrow & \cdots & \frac{kx}{k+x} \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & x \\ S_{1k}(x)\colon & \frac{x}{1+x} \longrightarrow & \frac{x}{(1+x)^{1/2}} \longrightarrow & \frac{x}{(1+x)^{1/3}} \longrightarrow & \cdots & \frac{x}{(1+x)^{1/k}} \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & x \\ k\colon & 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots \longrightarrow & \infty \end{array} \tag{10}$$

Die Zeichen S in der arithmetischen und in der geometrischen Schrankenfunktionenfolge (S_{k1} und S_{1k}) sollen darauf aufmerksam machen, daß wenigstens für kleine x-Werte beide Schrankenfunktionen als die Summen je einer unendlichen geometrischen Reihe aufgefaßt werden können:

$$S_{m1} = \sum_{p=0}^{\infty} x \cdot \left(-\frac{x}{m}\right)^p = \frac{x}{1+\frac{x}{m}} = \frac{mx}{m+x} \tag{5ba}$$

falls

$$\frac{x}{m} < 1$$

und

$$S_{1n} = \left[\sum_{p=0}^{\infty} x^n \cdot (-x)^p\right]^{1/n} = \left[\frac{x^n}{1+x}\right]^{1/n} = \frac{x}{(1+x)^{1/n}} \tag{5bb}$$

falls

$$x < 1 .$$

Der Definitionsbereich der Summenfunktion selbst kann natürlich auf alle Werte $-1 \leq x \leq +\infty$ ausgedehnt werden.

3. Einführung des Begriffs der sogenannten Logarithmoid-Funktionen

Da die dem Zahlenwert $k = 2$ entsprechenden korrespondierenden Glieder der obigen zwei Funktionenfolgen zugleich Schrankenfunktionen für die Funktion $\ln(1 + x)$ waren, taucht die berechtigte Frage auf, ob ein einem beliebigen k-Wert entsprechendes, korrespondierendes Funktionenpaar der vorigen zwei Funktionenfolgen nicht etwa ein Schrankenfunktionenpaar für eine schon bekannte Funktion darstellt, und wenn dem so wäre, welche diese sogenannte *intermediere Funktion ist.*

Vorläufig sind nur 3 Glieder dieser intermediären Funktionenfolge bekannt: für die Parameterwerte $k = 1$ und $k = +\infty$ stimmen diese gesuchten intermediären Funktionen mit den einander gleich werdenden Schrankenfunktionen per definitionem überein (siehe die Formeln 9a und 9b) und weiterhin liefern sie im Fall $k = 2$ die Funktion $\ln(1 + x)$.

Schreiben wir den Differenzialquotienten dieser drei bekannten Glieder der intermediären Funktionenfolge an:

$$\begin{array}{lll}
k = 1\colon\ L_{k=1} = \dfrac{x}{1+x} & \cdots \dfrac{dL_{k=1}}{dx} = \dfrac{1}{(1+x)^2} \\[2ex]
k = 2\colon\ L_{k=2} = \ln(1+x) & \cdots \dfrac{dL_{k=2}}{dx} = \dfrac{1}{1+x} \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\
k = \infty\colon\ L_{k=\infty} = x & \cdots \dfrac{dL_{k=\infty}}{dx} = 1 .
\end{array}$$

Die Gesetzmäßigkeit in den Derivierten der intermediären Funktionenfolge ist gleich zu erkennen:

$$\frac{dL_k}{dx} = \frac{1}{(1+x)^{2/k}} .$$

Die gesuchte intermediäre Funktionenfolge wird durch Integrieren zwischen den Grenzen O und x definiert:

$$L_k = \frac{k}{k-2}\left[(1+x)^{\frac{k-2}{k}} - 1\right]. \tag{11}$$

Dieser Ausdruck geht im Grenzfall $k = 2$ in die Funktion $\ln(1 + x)$ über:

$$\lim_{k \to 2} L_k = \ln(1+x). \tag{12}$$

Die so gewonnene neue Funktionenfolge ist für die unabhängige Veränderliche $-1 \leq x \leq +\infty$ mit den Parameterwerten $1 \leq k \leq +\infty$ definiert. Diese neue Funktionenfolge $L_k(x)$ wird im folgenden als »Logarithmoid-Folge« bezeichnet, ihre einzelnen Funktionen werden »Logarithmoid-Funktionen« (oder »logarithmogen Funktionen«) genannt. Wie wir gesehen haben (12), erhält man nämlich für den Parameterwert $k = 2$ die logarithmische Funktion selbst.

Die Logarithmoid-Funktionen $L_k(x)$ werden also durch die Funktion $\ln(1 + x)$ in zwei Gruppen unterteilt:

Die Funktionen des Parameterwertbereichs $2 < k < +\infty$ sind die *»hyperlogarithmischen« Funktionen*; die Funktionen im Parameterintervall $1 < k < 2$ werden *»hypologarithmische« Funktionen* genannt.

Bemerkung. Manchmal ist es zweckmäßiger, die Logarithmoid-Funktionen mit der Bezeichnung $q = \frac{k-2}{k}$ in einfacherer Form auszudrücken:

$$L_q(x) = \frac{(1+x)^q - 1}{q} \tag{11a}$$

für

$$0 < |q| \leq +1$$

$$\lim_{q \to 0} L_q(x) = \ln(1+x).$$

Die so definierten Logarithmoid-Funktionen werden in Abb. 1 veranschaulicht.

Bemerkung. Wie wir es später sehen werden, wird sich auch die Anwendung der Parameter

$$N = \frac{1}{q} = \frac{k}{k-2}$$

und

$$n = \frac{k}{2} = \frac{1}{1-q}$$

bei der physikalischen Deutung der Logarithmoid-Funktionen für die Beschreibung gewisser physikalischer Vorgänge als zweckmäßig erweisen (siehe Abb. 4).

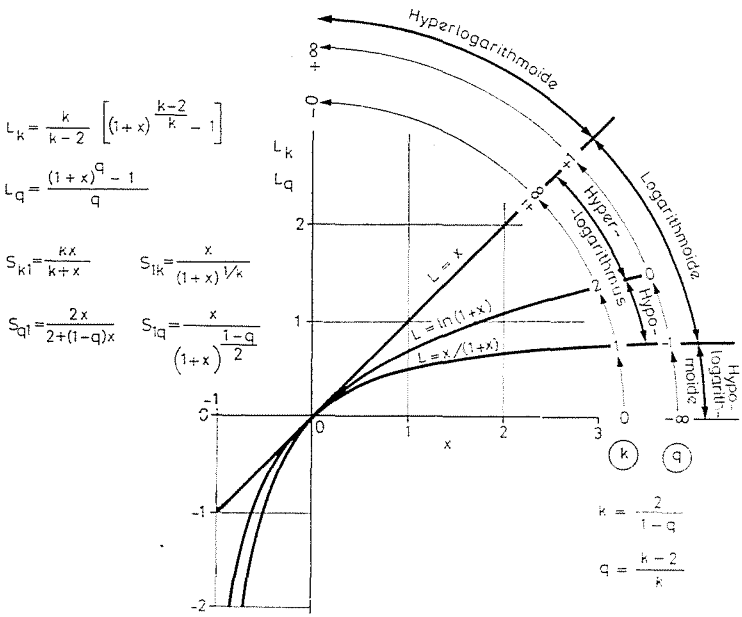


Abb. 1. Logarithmoid-Funktionen

4. Die verallgemeinerte dreifache Funktionenfolge

Die Beziehungen der drei Funktionenfolgen lassen sich für den Fall $k =$ integer mit Hilfe des folgenden Schemas kennzeichnen:

$$\begin{array}{l}
\nearrow \frac{2x}{2+x} \rightarrow \frac{3x}{3+x} \rightarrow \frac{4x}{4+x} \cdots \frac{kx}{k+x} \cdots\cdots \searrow \\
\frac{x}{1+x} \rightarrow \ln(1+x) \rightarrow 3[(1+x)^{1/3}-1] \rightarrow 2[(1+x)^{1/2}-1] \cdots \frac{k}{k-2}\left[(1+x)^{\frac{k-2}{k}}-1\right] \cdots \rightarrow x \\
\searrow \frac{x}{(1+x)^{1/2}} \rightarrow \frac{x}{(1+x)^{1/3}} \rightarrow \frac{x}{(1+x)^{1/4}} \cdots \frac{x}{(1+x)^{1/k}} \cdots\cdots \nearrow
\end{array} \tag{13}$$

Es besteht weiterhin für diese korrespondierenden Funktionen die Ungleichung:

$$| S_{k1}(x) | \leq | L_k(x) | \leq S_{1k}(x) | . \tag{14}$$

(Das Gleichheitszeichen gilt nur für $x = 0$), d. h.

$$\left|\frac{kx}{k+x}\right| \leq \left|\frac{k}{k-2}\left[(1+x)^{\frac{k-2}{k}}-1\right]\right| \leq \left|\frac{x}{(1+x)^{1/k}}\right|, \tag{14a}$$

wo $1 \leq k \leq +\infty$ oder mit dem Parameter q ausgedrückt:

$$\left|\frac{2x}{2+(1-q)\,x}\right| \leq \left|\frac{1}{q}\left[(1+x)^{q}-1\right]\right| \leq \left|\frac{x}{(1+x)^{\frac{1-q}{2}}}\right|, \tag{14b}$$

wo $-1 \leq q \leq +1$.

Zwischen den Parametern k und q bestehen die Beziehungen:

$$k = \frac{2}{1-q} \tag{15a}$$

$$q = \frac{k-2}{k}\,. \tag{15b}$$

(Auch für die Parameter N und n können natürlich die Ungleichungen (14) aufgeschrieben werden.)

Einige korrespondierende Glieder der drei Funktionenfolgen sind (für $k = 1, 2, 3, 5$ und $+\infty$) in Abb. 2 dargestellt.

5. Die Untersuchung der Eigenschaften des eingeführten Funktionenfolgen-Tripels

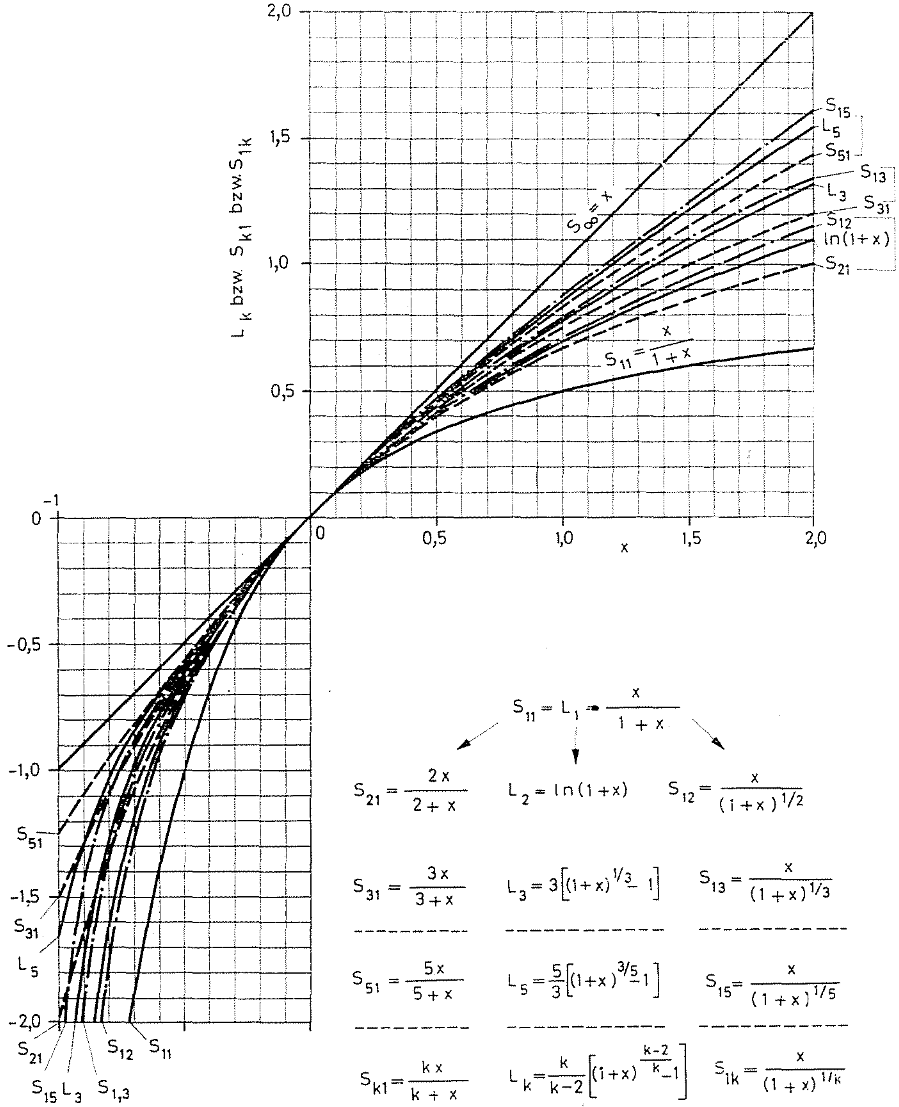
Die korrespondierenden Funktionen der miteinander durch die Ungleichung (14) verbundenen drei Funktionenfolgen (S_{k1}, L_k und S_{1k}) haben neben der Ungleichung (14) zahlreiche gemeinsame Eigenschaften. Diese weiteren Eigenschaften sind:

1. Die Anfangsglieder der drei Funktionenfolgen ($k = 1$) sind miteinander identisch:

$$S_{k=1,1} = L_1 = S_{1,k=1} = \frac{x}{1+x}\,.$$

2. Auch die Grenzfunktionen ($k = +\infty$) aller drei Funktionenfolgen sind identisch:

$$S_{\infty 1} = L_\infty = S_{1\infty} = x$$



$$S_{11} = L_1 = \frac{x}{1+x}$$

$$S_{21} = \frac{2x}{2+x} \qquad L_2 = \ln(1+x) \qquad S_{12} = \frac{x}{(1+x)^{1/2}}$$

$$S_{31} = \frac{3x}{3+x} \qquad L_3 = 3\left[(1+x)^{1/3} - 1\right] \qquad S_{13} = \frac{x}{(1+x)^{1/3}}$$

$$S_{51} = \frac{5x}{5+x} \qquad L_5 = \frac{5}{3}\left[(1+x)^{3/5} - 1\right] \qquad S_{15} = \frac{x}{(1+x)^{1/5}}$$

$$S_{k1} = \frac{kx}{k+x} \qquad L_k = \frac{k}{k-2}\left[(1+x)^{\frac{k-2}{k}} - 1\right] \qquad S_{1k} = \frac{x}{(1+x)^{1/k}}$$

$$S_{\infty 1} = S_{1\infty} = L_\infty = x$$

Abb. 2. Korrespondierende Funktionenfolgen

3. $$S_{k1}(0) = L_k(0) = S_{1k}(0),$$

d. h. die korrespondierenden Funktionen schneiden einander im Punkt $x = 0$, mit anderen Worten gelten die Ungleichungen:

$$S_{k1}(x) < L_k(x) < S_{1k}(x) \qquad \text{für } x > 0\,,$$

bzw.

$$S_{k1}(x) > L_k(x) > S_{1k}(x) \qquad \text{für } x < 0\,.$$

4. $$S'_{k1}(0) = L'_k(0) = S'_{1k}(0) = 1.$$

5. $$S''_{k1}(0) = L''_k(0) = S''_{1k}(0) = -\frac{2}{k},$$

d. h. die zweiten Derivierten sind zwar an der Stelle $x = 0$ bei jedem korrespondierenden Funktionentripel verschieden, sie sind aber innerhalb eines und desselben zusammengehörigen Funktionentripels identisch.

6. Das Krümmungsmaß hängt an der Stelle $x = 0$ vom Parameter k ab, ist aber bei den korrespondierenden Funktionen gleich:

$$G(S_{k1})_0 = G(L_k)_0 = G(S_{1k})_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot k}\,.$$

7. Es ist von Interesse, das Verhalten der drei Funktionen in den Randpunkten des Definitionsbereichs $-1 \leq x \leq +\infty$, das heißt in den Punkten $x = -1$ und $x = +\infty$ zu prüfen (siehe: Tabelle 1).

Tabelle 1

Die Zahlenwerte des Funktionenfolgen-Tripels am Rande des Definitionsbereiches in den Punkten $x = -1$ und $x = +\infty$

		$S_{k1}(-1)$	$L_k(-1)$	$S_{1k}(-1)$	$S_{k1}(\infty)$	$L_k(\infty)$	$S_{1k}(\infty)$
$k = +\infty$	$q = +1$	-1	-1	-1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$2 < k < +\infty$	$0 < q < +1$	$-\frac{k}{k-1}$ $-\frac{2}{1-q}$	$-\frac{k}{k-2}$ $-\frac{1}{q}$	$-\infty$	k $\frac{2}{1-q}$	$+\infty$	$+\infty$
$k = 2$	$q = 0$	-2	$-\infty$	$-\infty$	$+2$	$+\infty$	$+\infty$
$1 < k < 2$	$-1 < q < 0$	$-\frac{k}{k-1}$ $-\frac{2}{1+q}$	$-\infty$	$-\infty$	k $\frac{2}{1-q}$	$-\frac{k}{k-2}$ $-\frac{1}{q}$	$+\infty$
$k = 1$	$q = -1$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+1$	$+1$	$+1$

8. Bei der praktischen Anwendung der Ungleichung (14) ist es wichtig zu wissen, mit welcher Genauigkeit die L_k-Funktionen durch die Schrankenfunktionen angenähert werden. Die exakte Fehlerabschätzung wurde im Fall $k = 2$ für die Funktion $\ln(1 + x)$ durchgeführt [1]. Bei den verallgemeinerten L_k-Funktionen wurde diese ziemlich komplizierte Aufgabe nicht gelöst; wir hielten es für besser, die prozentualen Fehler der Annäherungen in graphischer Form anzugeben (siehe Abb. 3).

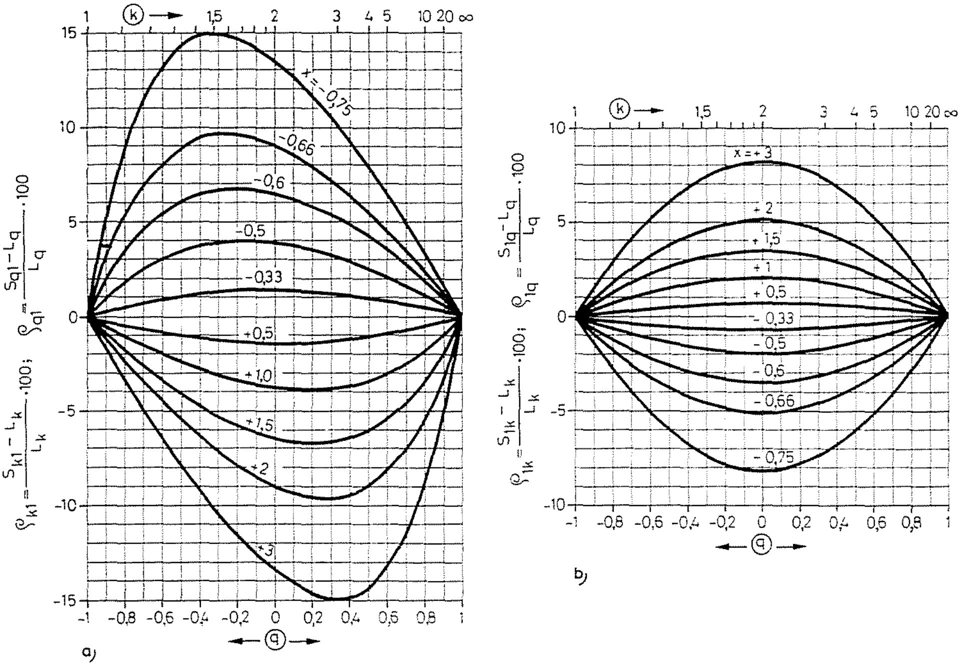


Abb. 3. Abweichungen der Logarithmoid-Funktionen und ihrer Schrankenfunktionen voneinander

Im Zusammenhang mit den relativen Fehlern der arithmetischen Schranke

$$\varrho_{k1} = \frac{S_{k1} - L_k}{L_k}$$

bzw. der geometrischen Schranke:

$$\varrho_{1k} = \frac{S_{1k} - L_k}{L_k}$$

verdient es bemerkt zu werden, daß im Fall $k = 2$ $(q = 0)$ das Kriterium eines identischen Fehlers für die beiden Schrankenfunktionen in den Punkten $x_1 < 0 < x_2$ die folgende Beziehung ist [1]:

$$x_1 = -\frac{x_2}{1 + x_2}\,.$$

Ist aber $k \neq 2$ (d. h. $k \gtrless 2$), so besteht diese Symmetrie nur für die Fehler ϱ_{1k} der geometrischen Schranke. In letzterem Falle gilt jedoch auch noch eine andere Symmetrie: an jeder Stelle x ist der Fehler der geometrischen Schrankenfunktion S_{1k} bei den symmetrischen Funktionenpaaren identisch, die zu den symmetrischen Parametern

$$q_1 = -q_2 \qquad (\text{wenn } q_1 < 0 < q_2)\,,$$

d. h.

$$k_1 = \frac{k_2}{k_2 - 1} \qquad (\text{wenn } k_1 < 2 < k_2)$$

gehören (siehe Abb. 3b).

Die Fehler der arithmetischen Schrankenfunktion S_{k1} sind sowohl für die x-Werte wie auch für die Parameter q bzw. k asymmetrisch (siehe Abb. 3a).

6. Beweis der Ungleichung $|S_{k1}| \leq |L_k| \leq |S_{1k}|$

Die Ungleichung (14)

$$\left|\frac{k \cdot x}{k + x}\right| \leq \left|\frac{k}{k-2} \cdot \left[(1 + x)^{\frac{k-2}{k}} - 1\right]\right| \leq \left|\frac{x}{(1 + x)^{1/k}}\right|$$

ist für die x-Werte $-1 \leq x \leq +\infty$ und für die positiven ganzen Zahlen $k = 1, 2, 3, \ldots$ definiert.

Zum Beweis der Ungleichung genügt es einzusehen, daß zwischen den Derivierten der drei Funktionen die folgende Beziehung gilt:

$$\left(\frac{k}{k + x}\right)^2 \leq (1 + x)^{-2/k} \leq \frac{1 - \frac{1}{k}\frac{1}{1 + x}}{(1 + x)^{1/k}}\,. \tag{16}$$

(Das Gleichheitszeichen gilt nach wie vor nur für die Stelle $x = 0$.) Ist nämlich die Ungleichung (16) bewiesen, so gelten auch die Ungleichungen (14) für die ursprüngliche Funktionen auf Grund »des monotonen Anwachsens«.

Zuerst soll von den Ungleichungen (16) das erste Paar untersucht werden:

$$0 < \left(\frac{k}{k+x}\right)^2 \leq (1+x)^{-2/k} \tag{17}$$

oder nach Umordnung:

$$(1+x) \cdot k^k \leq (k+x)^k. \tag{18}$$

Die Binomialreihe von $(k+x)^k$ lautet:

$$(k+x)^k + \binom{k}{0} k^k + \binom{k}{1} k^{(k-1)} \cdot x + \binom{k}{2} k^{(k-2)} \cdot x^2 + \cdots + \binom{k}{p} k^{(k-p)} \cdot x^p + \\ + \binom{k}{p+1} \cdot k^{(k-p-1)} \cdot x^{(p+1)} + \cdots \tag{19}$$

wo $p \leq k$ eine der vorkommenden geraden Zahlen bedeutet.

$$(k+x)^k = (1+x)\, k^k + \left[\binom{k}{2} k^{(k-2)} \cdot x^2 + \cdots + \binom{k}{p} k^{(k-p)} \cdot x^p + \right. \\ \left. + \binom{k}{p+1} k^{(k-p-1)} \cdot x^{(p+1)} + \cdots\right]. \tag{20}$$

Nun ist nur nachzuweisen, daß die Summe der Glieder in den eckigen Klammern größer als Null ist.

Wir wollen die Glieder in den Klammern *paarweise* untersuchen:

$$\binom{k}{p} \cdot k^{(k-p)} \cdot x^p + \binom{p}{p+1} \cdot k^{(k-p-1)} \cdot x^{(p+1)} = \\ = \binom{k}{p} \cdot k^{(k-p)} \cdot x^p \left\{1 + \frac{\binom{k}{p+1}}{\binom{k}{p}} \cdot \frac{x}{k}\right\}. \tag{21}$$

Da p eine gerade Zahl ist, ist der Teil des Ausdrucks (21) außerhalb der Klammern sicher positiv.

Der Teil in den Klammern kann folgendermaßen entwickelt werden:

$$1 + \frac{k-p}{p+1} \cdot \frac{x}{k} \tag{22}$$

da $(k-p)<k$ und $(p+1)>1$, haben wir im Definitionsbereich $-1<x<+\infty$

$$\frac{k-p}{p+1}\cdot\frac{x}{k}>-1\,,$$

also ist auch der Ausdruck (22) sicher positiv.

Bei der obigen Beweisführung wurde vorausgesetzt, daß die Anzahl der Glieder in den Klammern gerade sei. Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist auch der Exponent von x im letzten Glied gerade und liefert deshalb einen positiven Zuwachs zur rechten Seite von (20).

Die Ungleichung des zweiten Paars von (16) kann wie folgt bewiesen werden:

$$0\leq(1+x)^{-\frac{2}{k}}\leq\frac{1-\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}}{(1+x)^{1/k}} \tag{23}$$

oder

$$\frac{1}{1+x}\leq\left(1-\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}\right)^{k}. \tag{24}$$

Wird die rechte Seite zu einer Binomialreihe entwickelt:

$$\left(1-\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}\right)^{k}=\binom{k}{0}-\binom{k}{1}\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}+\binom{k}{2}\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2}-\cdots$$
$$\cdots+\binom{n}{p}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{p+1}\right)^{p}-\binom{n}{p+1}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}\right)^{p+1}+\cdots, \tag{25}$$

wo p eine gerade Zahl ist!

$$=\frac{1}{1+x}+\left[\binom{k}{2}\frac{1}{k^2}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\binom{n}{p}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}\right)^{p}-\binom{n}{p+1}\cdot\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{x}{1+x}\right)^{p+1}+\cdots\right]. \tag{26}$$

Nun ist nur noch zu beweisen, daß die Summe der Glieder in den Klammern positiv ist. Das kann analog zu dem vorigen durchgeführt werden. Der Beweis wurde für positive ganzzahlige k-Werte geführt. Der Definitionsbereich von k umfaßt aber alle positiven Zahlen. Die Behauptung, daß die Ungleichung auch dann gültig sei, wenn k eine Bruchzahl ist, bedürfte eines besonderen Beweises, von dem hier abgesehen wird.

7. Weitere Verallgemeinerung der Logarithmoid-Funktionen

Die Logarithmoid-Funktionen wurden durch (11) für alle x-Werte $-1 \leq x \leq +\infty$ sowie für die Parameterwerte $1 \leq k \leq +\infty$ definiert. Alle bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf diese k- und x-Werte.

Wird von der Ableitung der Logarithmoid-Funktionen aus der Ungleichung (14) abgesehen, läßt sich der Ausdruck (11) auch auf die sogenannten *Extralogarithmoid-Bereiche* ausdehnen, die durch die Parameterwerte $k < 1$ (oder $|q| > 1$) gekennzeichnet werden. Dieser Extralogarithmoid-Bereich besteht aus zwei Teilen:

1. aus dem Bereich unter der Hyperbel:

$$+0 < k < 1$$
$$(-\infty < q < -1).$$

diese Funktionen sollen »*Hypologarithmoid-Funktionen*« genannt werden;

2. aus dem Bereich über der Geraden:

$$-\infty < k < -0$$
$$(+1 < q < +\infty);$$

diese Funktionen sollen im folgenden »*Hyperlogarithmoid-Funktionen*« genannt werden.

Bemerkung:

1. für $k = \pm\infty$ erhält man die Gerade;
2. im Fall $k = +0$ sind $L_k \equiv 0$ für $0 < x$, und $L_k \equiv -\infty$ für $-1 < x < 0$;
3. im Fall $k = -0$ sind $L_k \equiv +\infty$ für $0 < x$, und $L_k \equiv 0$ für $-1 < x < 0$.

Diese Ausdehnung der ursprünglichen Logarithmoid-Funktionen auf die Bereiche unter der Hyperbel und über der Geraden ist rein formal und auch die Ungleichung (14) gilt für sie nicht.

Es ist jedoch nützlich, sich auch mit diesen beiden, den Logarithmoid-Funktionen angeschlossenen Funktionenfamilien zu beschäftigen, da, wie es im nächsten Kapitel zu erkennen sein wird, gewisse physikalische Erscheinungen mit diesen Extralogarithmoid-Funktionen beschrieben werden können. Es ist nur der Umstand vor Augen zu halten, daß der Zusammenhang zwischen den auf diese Bereiche $k < 1$ oder $|q| > 1$ ausgedehnten Schrankenfunktionen und den Extralogarithmoid-Funktionen nicht mehr durch die Ungleichung (14) ausgedrückt wird!

8. Die Rolle der Logarithmoid-Funktionen in der Physik

1. Für die logarithmoiden Funktionenfolgefamilien L_k, die zu den Parameterwerten $2 < k < +\infty$ gehören (und von denen wir sagten, daß sie hyperlogarithmische Form haben), ist auch die Bezeichnung »*Kaskadenfunktionen*« geeignet. In der Form

$$L_N = N\,[z^{1/N} - 1] \tag{11b}$$

beschreiben sie nämlich die aus der Verfahrenstechnik wohlbekannten Querstrom-Kaskadenprozesse, wo N die Anzahl der Kaskaden oder Stufen bedeutet. $N = \dfrac{k}{k-2} = \dfrac{1}{q}$ und L_N ist die Gleichgewichtskonstante, z bedeutet das Verhältnis der eingespeisten zu den unverändert austretenden Stoffströmen (oder in anderer Schreibweise $z = 1 + x$, wo x das Verhältnis des umgewandelten Stoffstroms zum eingespeisten Stoffstrom bedeutet. Wegen $N = \dfrac{k}{k-2}$ hat die Kaskadenfunktion im Intervall $1 \leq N < +\infty$ $(\infty \geq k > 2)$ nur für ganze N, d. h. nur im hyperlogarithmischen Bereich, einen physikalischen Sinn. Solche Kaskadenfunktionen beschreiben den Betrieb von Mehrkörperverdampfern (multiple-effect-evaporator), Rührkesselkaskaden (reactor-cascad) und die Mehrstufen-Querstrom-Extraktion (simple multiple or cross-flow extraction).

Die Formel geht im Grenzfall $N = \infty$ in den für kontinuierliche Verfahren kennzeichnenden logarithmischen Ausdruck über: Kontinuierliche Dünnschichtverdampfer (continuous thin layer evaporator), Strömungsrohr-Reaktoren (pluge-flow-reactor) und Perforation (perforation).

Der Zusammenhang zwischen den die Gegenstromkaskadverfahren (Gegenstrom-Extraktion, Rektifikation, usw.) beschreibenden Funktionen und der obigen Funktionenfamilie L_N ist gesondert zu untersuchen.

2. Die von der üblichen abweichende Definition des Logarithmus unter (12) erinnert an die Einführung der Funktion e^x mittels der Folge $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. In der Physik und der Chemie ist dieser Ausdruck selbstverständlich, da diese Funktionenfolgen einerseits die stufenartigen Vorgänge und deren Übergang in kontinuierliche Verfahren in ein und derselben Form darstellen.

Der analytische Ausdruck für das Verhältnis der ein- und austretenden Stoffströme sieht im Fall von N-Stufen wie folgt aus:

$$z = \left(1 + \frac{L_N}{N}\right)^N \xrightarrow[\text{falls } N \to \infty]{} e^{L_N} .$$

3. Es ist von Interesse, daß in der physikalischen Chemie bei der adiabatischen Kompression die sog. nützliche (oder technische) Arbeit wiederum durch eine Logarithmoid-Funktion dargestellt wird:

$$L_\varkappa = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[(1 + x)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right],$$

wo

$$L_\varkappa = L_{\mathrm{ad}}/RT_1 \quad \text{und} \quad x = \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \quad \text{ist.}$$

Die technische Arbeit bei einer mit Wärmeaustausch verbundenen Kompression wird durch die Formel

$$L_n = \frac{n}{n - 1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] \tag{11c}$$

angegeben, wo $L_n = L_{\mathrm{polyt}}/RT_1$, und $c_n = c_v + p\dfrac{dV}{dT}$ bzw.: $n = \dfrac{c_p - c_n}{c_v - c_n}$.

Im Fall $n = 1$ erhält man natürlich als Grenzwert die Formel der isothermen Arbeit: $L_{\mathrm{is}} = RT_1 \cdot \ln p_2/p_1$.

Der Zusammenhang zwischen den Parametern n in (11c) und k in der ursprünglichen Formel (11) ist der Folgende: $n = \dfrac{k}{2}$.

Die Beziehung der mit dem Wärmeaustausch verbundenen Kompressionsarbeit und der Logarithmoid-Funktionen wird in Tabelle 2 veranschaulicht.

Die graphische Darstellung von Kaskadenprozessen und Kompressionsarbeit wird in Abb. 4 gezeigt.

4. Im Vorigen wurde die Bedeutung der Logarithmoid-Funktionen an einem verfahrenstechnischen (Kaskadenvorgänge) und einem mechanischen Beispiel (adiabatische Arbeit) gezeigt. In beiden Fällen drückte die Logarithmoid-Funktion strenge kausale Zusammenhänge aus.

Tabelle 2

Beziehung der mit dem Wärmeaustausch verbundenen Kompressionsarbeit und der Logarithmoid-Funktionen

($1 < \varkappa \leq 1,667$)

Charakter des Prozesses	n	k	Bereich der die Arbeit beschreibenden Logarithmoid-Funktion
Hypertherm	$>\varkappa$	$>2\varkappa$	Bereich der Hyperlogarithmen, bis zur Geraden $k = \infty$
Adiabatisch	$\varkappa$	$2\varkappa$	Spezielle Hyperlogarithmen mit dem Parameter $k = 2\varkappa$, in der Nähe des Logarithmus ($k = 2$)
Polytrop	$1 < n < \varkappa$	$2 < k < 2\varkappa$	Bereich zwischen dem Hyperlogarithmus mit dem Parameter $k = 2\varkappa$ und dem Logarithmus
Isotherm	1	2	$\ln (1 + x)$
Hypotherm	<1	<2	Bereich der hypologarithmischen Kurven

Bemerkung

1. Bei einfacheren Molekülen ist $\varkappa = 1,3 - 1,66$, aber bei einer größeren Kohlenstoffatomzahl ist $\varkappa = 1,1$ oder noch kleiner (annähernd von Wert Eins) wobei sich in diesem Falle die adiabatische Arbeit von der isothermen kaum unterscheidet.
2. Bei hypothermer Kompression kann im Prinzip auch $n < 0,5$ sein, in diesem Fall liegt die Arbeitsformel in sogenannten Hypologarithmoid-Bereich unter der Hyperbel.

Es stellt sich die Frage, ob die L_k-Funktionen auch zur Beschreibung phänomenologischer Zusammenhänge geeignet sind. Es handelt sich um Fälle, wo die kausale Beziehung zwischen zwei Größen zwar nicht bezweifelt wird, jedoch — zumindest vorläufig — mangels eines geeigneten physikalischen Modells nur durch eine empirische Formel ausgedrückt werden kann.

Mangels mathematischer Modelle, die den kausalen Zusammenhang wiedergeben, stehen für die Verarbeitung empirischer Daten in Form expliziter Funktionen heute nur sehr wenige Methoden zur Verfügung. Die einfachste — nur für Interpolationszwecke geeignete — Methode besteht darin, die Meßwerte der Größen durch ein *Polynom* anzunähern (Methode des XIX. Jahrhunderts).

In unseren Tagen findet immer mehr die sogenannte *Linearisierungsmethode* Anwendung. Diese besteht darin, daß die verwickelt scheinende Beziehung zwischen zwei Meßwerten (y_i und x_i) durch eine geeignete Koordinatentransformation in eine lineare Beziehung umgewandelt wird, wodurch die funktionenförmige Verarbeitung der Meßwerte nach der Methode der kleinsten Quadrate (Regression) ermöglicht wird und außerdem die Konstanten der Funktion, die die Meßwerte am besten annähert, berechnet werden können. Leider kommt es bei diesen zur Linearisierung führenden Koordinatentrans-

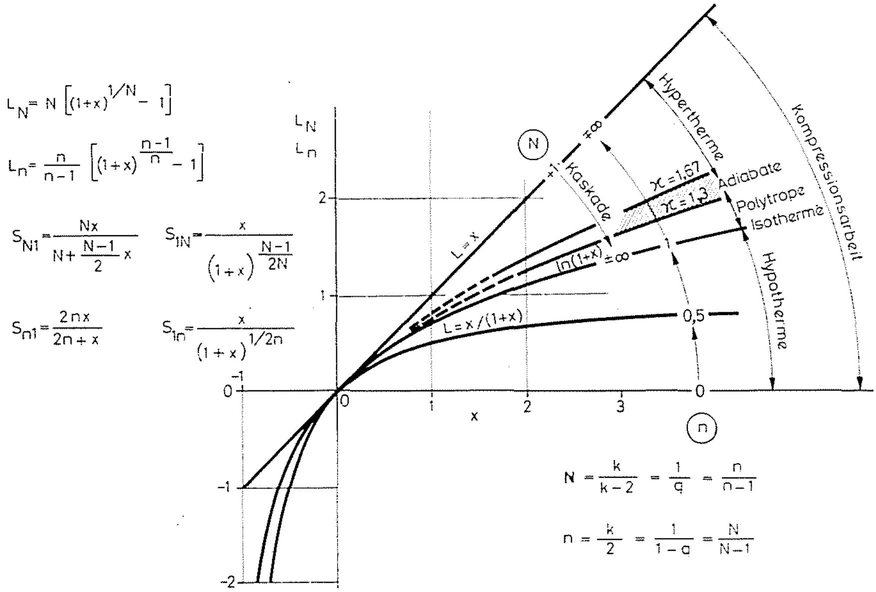


Abb. 4. Graphische Darstellung der Gleichungen zur Beschreibung der Kaskadenvorgänge sowie der Kompressionsarbeit

formationen meistens auf die individuelle Invention an, deshalb sind in der Praxis nur einige Schablonen verbreitet, wie der Gebrauch *der reziproken Skala* (Hyperbel), *das semilogarithmische Papier* (logarithmische oder Exponentialfunktion), *das zweifach logarithmische Papier* (Potenzialfunktion). Daher kommen heute die meisten empirischen Formeln aus einer dieser vier Funktionenfamilien.

Meistens findet man jedoch, daß bei der Darstellung in diesen Koordinaten die Beziehung nur annähernd linear ist, d. h. der verborgene kausale Zusammenhang wird durch die Hyperbel-, Logarithmus- usw. -Funktionen nur mit einer angenäherten Genauigkeit ausgedrückt. Manchmal gelingt es, die Genauigkeit der urpsrünglichen, durch Linearisierung gewonnenen Funktion mit einem nachträglichen Korrektionsglied zu erhöhen. Zum Beispiel ist die Temperaturabhängigkeit des Dampfdruckes von Flüssigkeiten an der $\log p$ vs. $1/T$ Skala nur annähernd linear, es gilt also näherungsweise: $\log p = A - \frac{B}{T}$.

Dieser angenäherte Zusammenhang erhält durch die Korrektion $T_{\text{corr}} = T - C$ eine hohe Genauigkeit:

$$\log p = A - \frac{B}{T - C} .$$

Das ist die berühmte *Antoine-Gleichung* (1888).

Van der Waals (1899) versuchte die Dampfdrucksgleichung in der Koordinate $\log p_{\text{red}}$ vs. $\frac{1}{T_{\text{red}}}$ mit Hilfe der reduzierten Parametern zu linearisieren, so erhielt er eine angenäherte Beziehung

$$\log p_{\text{red}} = 3\left[1 - \frac{1}{T_{\text{red}}}\right].$$

Dieser Ausdruck ist sehr ungenau: in dieser Koordinate weichen die meisten Stoffe von der Geraden nach unten oder nach oben ab (s. Abb. 5). Prüft man das Diagramm L_q vs. $\log(1 + x)$ (s. Abb. 6), so ist zu erkennen, daß die semilogarithmische Darstellung der Logarithmoid-Funktionen ähnliche Abweichung von der Geraden aufweist, wie die Dampfdruckkurven in der Van der Waalsschen Darstellung. Durch eine gründliche Nachprüfung der Analogie beider Darstellungen ließ sich feststellen, daß die Dampfdruck-Temperaturabhängigkeit der Flüssigkeiten zwischen dem Schmelzpunkt und der kritischen Temperatur durch eine einzige Formel mit befriedigender Genauigkeit ausgedrückt werden kann [5]:

$$1 - \frac{1}{T_{\text{red}}} = \frac{D}{q}\left[p_{\text{red}}^{q} - 1\right]$$

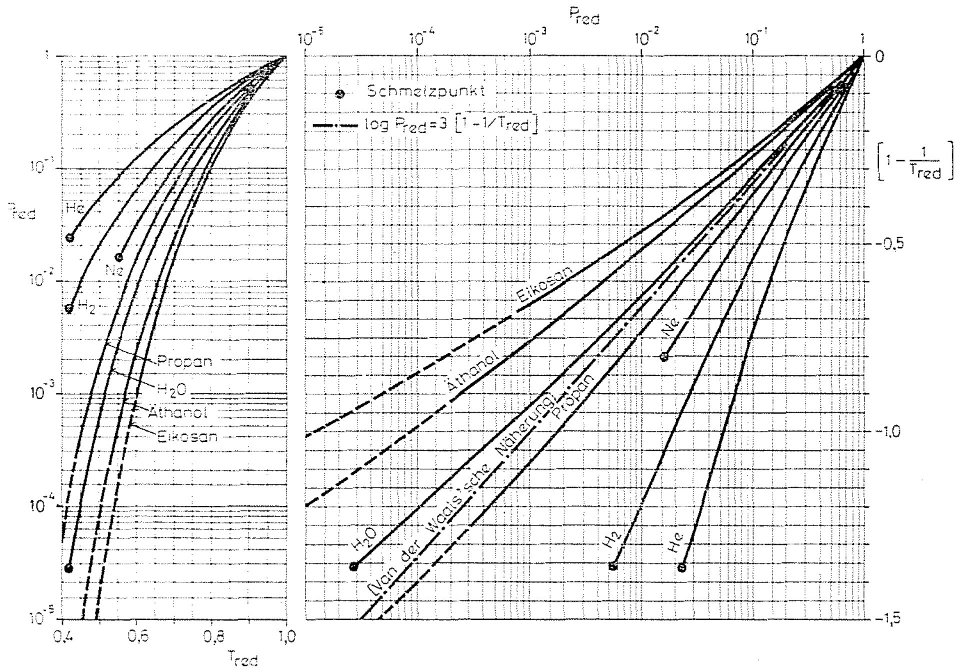


Abb. 5. p_{red}—T_{red}-Diagramm

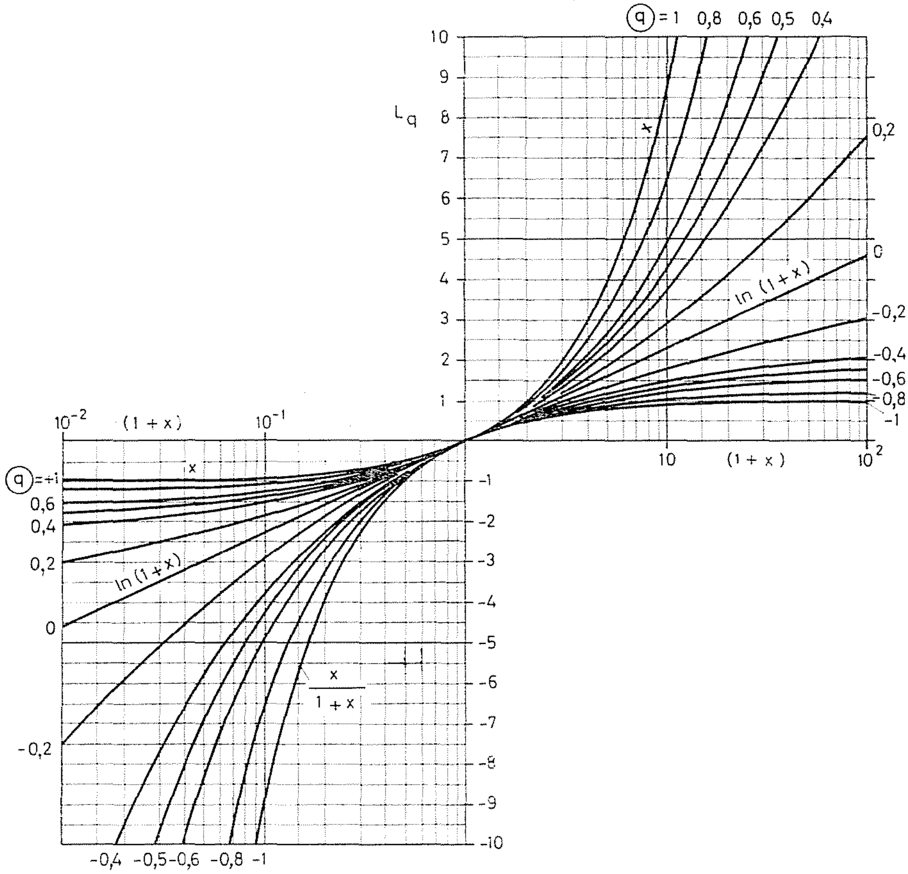


Abb. 6. Die semilogarithmische Darstellung von Logarithmoid-Funktionen

oder

$$p = p_{\text{krit}} \left[1 + \frac{q}{D} - \frac{q}{D} \cdot \frac{T_{\text{krit}}}{T} \right]^{1/q}$$

bzw.

$$T = \frac{T_{\text{krit}}}{1 + \frac{D}{q} \left[p_{\text{red}}^{q} - 1 \right]} .$$

5. Die Logarithmoid-Funktionen scheinen also in vielen Fällen die Zusammenhänge zwischen verschiedenen physikalischen Parametern sehr gut wiederzugeben. Aus dem guten Zusammenhang folgt natürlich noch nicht, daß die Logarithmoid-Funktionsbeziehung zugleich eine kausale Beziehung mit dem Anspruch eines physikalischen Modells zwischen den zwei Parametern

bedeute. Es ist jedoch auffallend, daß auch unsere sehr genauen Messungen in Bezug auf die Konzentrationsabhängigkeit der Diffusionskonstante von Benzoldämpfen mit Hilfe einer Logarithmoid-Funktion (Hypologarithmus $q < 0$) zu beschreiben waren [6]*.

6. Bedeutung und Rolle der Logarithmoid-Funktionen in der Physik könnten vielleicht folgendermaßen formuliert werden: Es wird versucht, die in den Erscheinungen und den Prozessen qualitativ erkannte Kausalität quantitativ durch ein mathematisches Modell anzunähern. Dieses Modell ist meistens linear oder logarithmisch (exponentiell) oder hyperbolisch. Die Natur ist aber verwickelter als diese einfachen mathematischen Modelle. Die genannten drei Modelle stellen nur Grenzfälle dar, die Erscheinungen sind in der Wirklichkeit meistens »Mischungen« zweier Modelle.

Die hyperlogarithmischen (Kaskaden-) Funktionen sind »Mischungen« des linearen Modells und des logarithmischen Modells in verschiedenem Verhältnis, während die hypologarithmischen Funktionen »Mischungen« des logarithmischen und des hyperbolischen Gesetzes in verschiedenem Verhältnis darstellen.

7. Aus dem Vorstehenden folgt die praktische Anweisung, daß falls der Zusammenhang zwischen zwei Größen in semilogarithmischer Darstellung statt einer Geraden eine konkave oder eine konvexe Kurve ergibt, es lohnt sich, eine genauere Beziehung zwischen den beiden Größen mit Hilfe der Logarithmoid-Funktion auszudrücken.

Die empfohlene Annäherung ist:

$$I_q = D \cdot \frac{z^q - 1}{q} \quad \text{oder} \quad = E\,[z^q - 1]\,. \tag{27}$$

In dieser Formel bedeuten I_q die auf der linearen Skala des semilogarithmischen Papiers dargestellte Größe, z die logarithmisierte Größe. D ist eine für die physikalische Erscheinung kennzeichnende Konstante (bei Kaskadenvorgängen ist $D = 1$; für Kompressionsarbeit: $D = RT_1$). In einzelnen Fällen bedeuten I_q und z die direkten Meßwerte (bei Kaskadenvorgängen bedeuten $I_q = L_q$ die Gleichgewichtskonstante, z das Verhältnis der eingespeisten Stoffströme zu den unverändert austretenden Stoffströmen; bei der Kompressionsarbeit ist $I_q = RT_1L_q$ die technische Arbeit und $z = p_2/p_1$). In anderen Fällen bedeuten I_q und z zweckmäßig (durch Probieren!) transformierte Formen der direkten Meßwerte. Z. B. ist bei der Dampfdruckformel $I_q = 1 - \dfrac{T}{T_{\text{red}}}$; (dagegen ist $z = p_{\text{red}}$ ein direkter Meßwert).

*Die seit der Fertigstellung des Manuskriptes durchgeführten Berechnungen bewiesen, daß die Logarithmoid-Funktionen auch in der Strömungslehre sehr brauchbar sind (z. B. für die Beschreibung des Geschwindigkeitsprofils und des Reibungswiderstandskoeffizienten bei turbulenter Rohrströmung).

9. Ergänzende Bemerkungen

1. Die im vorigen definierten engen Schranken der Funktion $\ln(1+x)$ waren bisher in der Literatur nicht bekannt. Auch die sorgfältige Sammlung von MITRINOVIĆ erwähnt nur eine einzige Ungleichung in Verbindung mit der logarithmischen Funktion [7].

$$\frac{|z|}{1+|x|} \leq |\ln(1+z)| \leq |z| \cdot \frac{1+|z|}{|1+z|}, \tag{A}$$

wo z eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$ ist.

Die obige Ungleichung kann auch für die reellen x-Werte und auf das Intervall $-1 < x < +\infty$ ausgedehnt aufgeschrieben werden (siehe Abb. 7a)

$$\frac{|x|}{1+|x|} \leq |\ln(1+x)| \leq |x| \cdot \frac{1+|x|}{|1+x|} \tag{a}$$

oder in leicht modifizierter Form (Abb. 7b)

$$\left|\frac{x}{1+|x|}\right| \leq |\ln(1+x)| \leq \left|x \frac{1+|x|}{1+x}\right| . \tag{b}$$

Die so definierten beiden Schrankenfunktionen von $\ln(1+x)$ stellen eine sehr lockere Einschränkung der intermediären Funktion dar, eine viel lockerere, als wenn das Anfangsglied $S_{11} = \frac{x}{1+x}$ und das Limesglied $S_\infty = x$ des Funktionenfolgentripels als Schranken gewählt würden (siehe Abb. 7c). Es soll noch erwähnt werden, daß es in letzterem Falle überflüssig ist, mit Absolutwerten zu rechnen:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x . \tag{c}$$

Die bisher bekannte engste Schranke wird durch die von Verfassern erarbeiteten Ungleichungen gewonnen (Abb. 7d).

$$|S_{21}| \leq |\ln(1+x)| \leq |S_{12}|$$

oder

$$\left|\frac{2x}{2+x}\right| \leq |\ln(1+x)| \leq \left|\frac{x}{(1+x)^{1/2}}\right| . \tag{d}$$

2. Die dargelegten Ungleichungen sind in der angewandten Mathematik beim Aufschreiben in geschlossener Form von Meßwerten physikalischer Erscheinungen von Bedeutung.

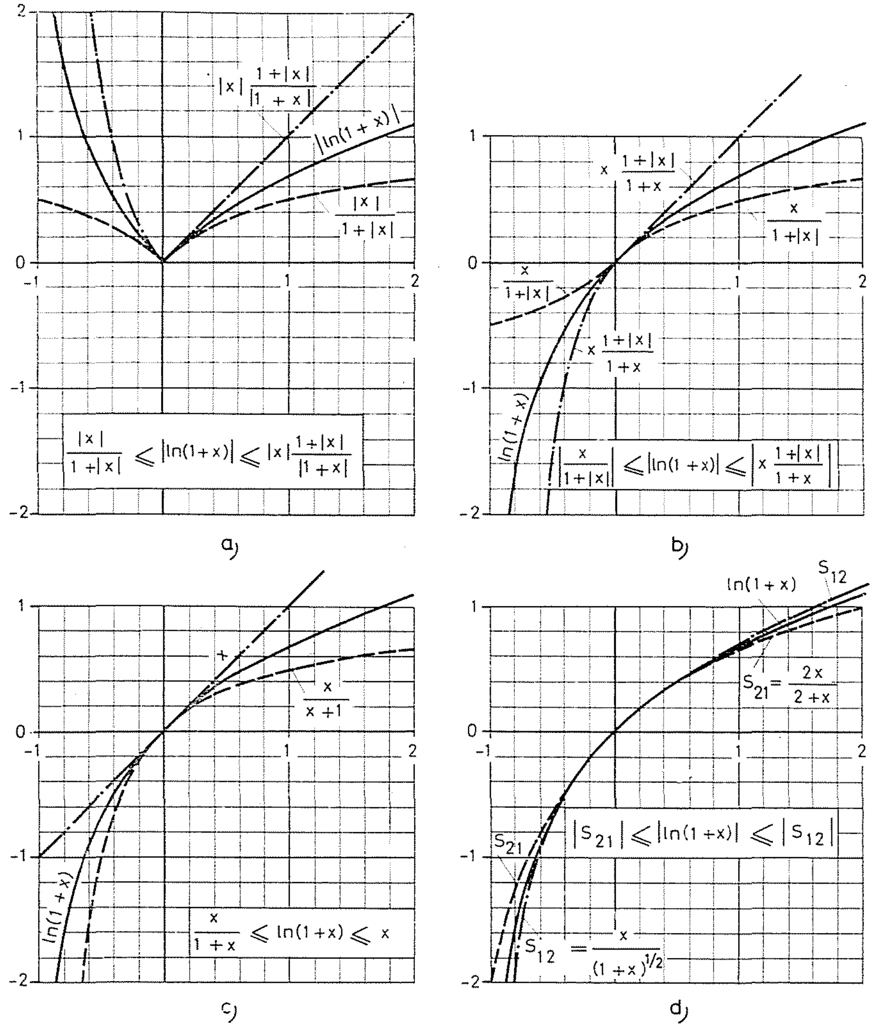


Abb. 7. Die Schrankenfunktionen von $\ln(1+x)$

a) Die Ungleichung (1) mit dem Parameter $k = 2$ $(q = 0)$ ermöglicht die angenäherte Integration von Integranden in geschlossener Form, die die Funktion $\ln(1+x)$ enthalten [1, 4].

b) Bei der verallgemeinerten Ungleichung (14) kann man allem Anschein nach nicht von der Ungleichung selbst, sondern vielmehr von der Tatsache Gebrauch machen, daß sich die Funktion $\ln(1+x)$ als der Grenzwert einer Potenzfunktion herstellen läßt:

$$\lim_{k=2} L_k(x) = \ln(1+x)\,.$$

Der Verlauf dieser »logarithmoiden« (oder »logarithmogenen« = »den Logarithmus erzeugenden«) Funktionenfamilie L_k ist dem des Logarithmus ähnlich, die Kurven nehmen jedoch alle Krümmungen zwischen der Hyperbel und der Geraden an. Andererseits ist ihr Verlauf oft dem der Parabeln mit einem Exponenten $n < 1$ ähnlich. So werden diese Kurven mit anscheinend »logarithmischem Verlauf« weder in der log—log-, noch in der semilog-Darstellung linear.

3. Herr J. D. KEČKIĆ (Beograd), der diesen Artikel noch in der Manuskriptform las, hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß sich mit der Substituirung $x = \dfrac{b}{a} - 1$ $(b > a)$ in der Ungleichung (14a) folgende Ungleichung aufstellen läßt:

$$\frac{b + (k-1)\,a}{k} \geq \frac{k-2}{k} \cdot \frac{b-a}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{k-2}{k}} - 1} \geq \sqrt[k]{b \cdot a^{(k-1)}}.$$

Wenn $k \to 2$, dann erhalten wir als spezieller Fall die schon bekannte Ungleichung (2). Die Bemerkung von KEČKIĆ ist beachtenswert, weil es anzunehmen ist, daß die obige Ungleichung beim Lösen von verwickelten Mittelwertproblemen als Ausgangspunkt dienen kann.

*

Abschließend möchten die Verfasser nicht versäumen, Herrn Dr. D. S. MITRINOVIĆ, Professor der Mathematik an der Universität Beograd, für die Anregung zur Durchführung dieser Untersuchungen unseren aufrichtigen Dank auszusprechen. Ohne seine Anregung wären diese Ergebnisse, die — unserer Meinung nach — besonders von Chemikern verwertet werden können, nicht entstanden.

Zusammenfassung

1. Im Beitrag wird festgestellt, daß sich die Funktion $\ln(1+x)$ als ein Glied einer allgemeineren Funktionenfolge auffassen läßt. Die verallgemeinerten Formen mit dem Parameter k der Logarithmus-Funktion wurden »*Logarithmoid-Funktionen*« genannt:

$$L_k(x) = \frac{k}{k-2}\left[(1+x)^{\frac{k-2}{k}} - 1\right]$$

mit

$$\lim_{k \to 2} L_k(x) = \ln(1+x)\ .$$

2. Es wird festgestellt, daß jedem Parameterwert k zwei Funktionen zugeordnet werden können, die zugleich Schranken der entsprechenden Logarithmoid-Funktion $L_k(x)$ sind.

Die *arithmetische* Schrankenfunktion lautet: $S_{k1}(x) = \dfrac{k, x}{k+x}$,

die *geometrische* Schrankenfunktion lautet: $S_{1k}(x) = \dfrac{x}{(1+x)^{1/k}}$,

und für die Parameterwerte $1 \leq k \leq +\infty$ sowie im Bereich der unabhängigen Veränderlichen $-1 \leq x \leq +\infty$ gelten die Ungleichungen:

$$|\,S_{k1}(x)\,| \leq |\,L_k(x)\,| \leq |\,S_{1k}(x)\,|\,.$$

3. Schließlich wird festgestellt, daß die Logarithmoid-Funktionen bei der kausalen Beschreibung zahlreicher *physikalischer Vorgänge* von Belang sein können (wie z. B. Kaskadenvorgänge, Kompressionsarbeit).

Ihre Bedeutung besteht jedoch hauptsächlich darin, daß sie die gesuchte funktionale Beziehung der Meßwerte physikalischer Parameter mangels eines mathematischen Modells oft genauer beschreiben als die bisher im allgemeinen angewandten Funktionen (z. B. die Dampfdruckformel, die Konzentrationsabhängigkeit der Diffusivität).

Literatur

1. TETTAMANTI, K., SÁRKÁNY, GY., KRÁLIK, D., STOMFAI, R.: Über die Annäherung logarithmischer Funktionen durch algebraische Funktionen. Period. Polytechn. Ser. Chem. Eng. **14**, 99 (1970)
2. SAWINSKY, J.: Nicht veröffentlicht (Privatmitteilung)
3. MIYAUCHI, T., VERMEULEN, T.: Ind. Eng. Chem. Fund. **2**, 304 (1963)
4. SÁRKÁNY, GY., RÓZSA, P., TETTAMANTI, K.: The analytical calculation of the number of theoretical plates. Period. Polytechn. Ser. Chem. Eng. **14**, 321 (1970)
5. TETTAMANTI, K., RADNAI, GY.: Nicht veröffentlicht.
6. TETTAMANTI, K., TÖRÖK, J.: Nicht veröffentlicht.
7. MITRINOVIĆ, D. S.: Analytic Inequalities. Die Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst. Bd **165**, Springer, 1970. (Satz: 3.8.31)

Prof. Dr. Károly TETTAMANTI, 1502 Budapest Postfach 91., Ungarn
Robert STOMFAI, 1440 Budapest Postfach 35, Ungarn