ÜBER EINIGE VERALLGEMEINERUNGSMÖGLICHKEITEN DES LOGARITHMISCHEN MITTELS ZWEIER POSITIVER ZAHLEN*

Von

D. KRÁLIK

Lehrstuhl für Mathematik, Fakultät für Chemie

Eingegangen am 12. Januar, 1972

Professor K. TETTAMANTI sowie seine Mitarbeiter haben bei der mathemathischen Behandlung gewisser verfahrenstechnischer Probleme den Begriff des logarithmischen Mittels zweier positiver Zahlen a, b

$$l(a, b) \overset{\mathbf{def}}{=} \frac{b-a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{1}$$

mit Erfolg angewandt[1] ($\ln A$ bedeutet den natürlichen Logarithmus von A). In ihren Untersuchungen kamen die für den Fall $-1 < x < +\infty$ gültigen Ungleichungen

$$\left|\frac{2x}{2+x}\right| \leqq |\ln(1+x)| \leqq \left|\frac{x}{\sqrt{1+x}}\right| \tag{2}$$

vor, die unter anderem zur angenäherten Berechnung solcher Integrale geeignet sind, bei welchen der Integrand eine rationale Funktion von $\ln(1+x)$ ist; der Integrand kann also durch rationale Funktionen von x (oder von $\sqrt{1+x}$ und x) ersetzt werden. Im Fall $x \geqq 0$ geht (2) in

$$\frac{2x}{2+x} \leqq \ln(1+x) \leqq \frac{x}{\sqrt{1+x}} \tag{2a}$$

über, und sind $0 < a < b$ beliebige Zahlen, so ergeben sich durch

$$1 + x = \frac{b}{a}$$

die Ungleichungen

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{b-a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \leqq \frac{a+b}{2}. \tag{3}$$

* Herrn Prof. D. L. Telegdy Kováts zum 70. Geburtstag gewidmet.

[1] K. TETTAMANTI—G. SÁRKÁNY—D. KRÁLIK—R. STOMFAI: Über die Annäherung logaritmischer Funktionen durch algebraische Funktionen, *Periodica Polytechnica Chemical Engineering*, VOL. **14**, No. 2. (1970) 99—111.

Das Gleichheitszeichen gilt nur im Fall $a = b$, wo unter $l(a, b)$ der Grenzwert

$$\lim_{b \to a} \frac{b-a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = a = b$$

zu verstehen ist.

Der Mittelwert $l(a, b)$ besitzt augenscheinlich die bekannten gewöhnlichen Eigenschaften der Mittelwerte:

$$l(a, b) = l(b, a)$$

bzw.

$$\min(a, b) \leqq l(a, b) \leqq \max(a, b).$$

Ganz naturgemäß erhebt sich die Frage der Verallgemeinerung des Begriffes $l(a, b)$ für den Fall mehrerer positiver Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Bei einer solchen Verallgemeinerung sind die bekannten, an die Mittelwerte gestellten Forderungen vor Auge zu halten.

Die Funktion $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißt (irgendein) Mittelwert der reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Bei einer jeden Permutation $i_1, i_2, \ldots, i_n$ der Indexe $1, 2, \ldots, n$ gilt

$$M(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) = M(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

II. Es besteht immer:

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq M(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Aus II. folgt insbesondere, daß im Fall $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ der Mittelwert $M(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$ ist.

Es ist üblich, dem Mittelwert außer den Bedingungen I und II noch eine dritte aufzuerlegen:

III. Bildet man den Mittelwert $M(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ von den ersten k Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k (k < n)$ und ersetzt man in

$$M(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ durch $M(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, d. h. nimmt man den Mittelwert

$$M\big(M(a_1, \ldots, a_k), \ldots, M(a_1, \ldots, a_k), a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n\big),$$

so gilt:

$$M\big(M(a_1, \ldots, a_k), \ldots, M(a_1, \ldots, a_k), a_{k+1}, \ldots, a_n\big) = \\ = M(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Die Mittelwerte, die auch die Forderung III erfüllen, werden assoziative Mittelwerte (kurz assoziativ) genannt. Die meisten bekannten Mittelwerte (die arithmetischen, geometrischen, harmonischen, usw.) sind assoziativ.

Im folgenden sollen einige mögliche Definitionen des logarithmischen Mittels von n beliebigen positiven Zahlen angegeben werden; die so definierten Mittel befriedigen die Bedingungen I und II, nicht aber die Bedingung III. Die logarithmischen Mittel von n Zahlen ($n > 2$) scheinen also nicht-assoziativ zu sein.

Es seien nun $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige positive Zahlen, und bilden wir *alle* Mittelwerte

$$\underset{i \neq k}{l}(a_i, a_k) = \frac{a_i - a_k}{\ln\left(\dfrac{a_i}{a_k}\right)}$$

(ihre Anzahl ist $\binom{n}{2}$). Definition: unter dem logarithmischen Mittel

$$l(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

der positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist der Ausdruck

$$l(a_1, a_2, \ldots, a_n) \overset{\text{def}}{=} \left\{\prod_{i \neq k} l(a_i, a_k)\right\}^{\frac{1}{\binom{n}{2}}} = \tag{4}$$

$$= \left\{\frac{a_1 - a_2}{\ln\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)} \cdots \frac{a_i - a_k}{\ln\left(\dfrac{a_i}{a_k}\right)} \cdots \frac{a_{n-1} - a_n}{\ln\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)}\right\}^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}$$

d. h. das geometrische Mittel der Zahlen $l(a_i, a_k)$ zu verstehen.

Da für alle Indexpaare $i \neq k$ die Ungleichungen

$$\sqrt{a_i a_k} \leqq l(a_i, a_k) \leqq \frac{a_i + a_k}{2}$$

bestehen und alle vorkommende Zahlen positiv sind, gilt für das soeben eingeführte Mittel:

$$\left(\prod_{i \neq k} \sqrt{a_i, a_k}\right)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}} \leqq l(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq \frac{\sum_{i \neq k} l(a_i, a_k)}{\binom{n}{2}} \leqq \frac{\sum_{i \neq k} \dfrac{a_i + a_k}{2}}{\binom{n}{2}},$$

bzw.

$$\left(\prod_{i \neq k} a_i a_k\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \leqq l(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq \frac{\sum_{i \neq k} (a_i + a_k)}{n(n-1)}.$$

Jede Zahl a_i kommt in den $\binom{n}{2}$ Paaren (a_i, a_k) $(n-1)$ -mal vor, darum erhält man aus den letzten Ungleichungen:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \leqq l\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq \frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n\,(n-1)},$$

d. h.

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} \leqq l\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}; \tag{5}$$

die Eigenschaft (3) bleibt also bei der Verallgemeinerung erhalten. Aus den Bisherigen geht hervor, daß das Gleichheitszeichen in (5) nur im Fall $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ gilt, wo die betreffenden Mittel dem gemeinsamen Wert a gleich sind. Weiterhin ist es ersichtlich, daß unser logarithmisches Mittel $l(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Bedingungen I und II, nicht aber der Bedingung III genügt.

Handelt es sich nur um zwei Zahlen $a_1 > 0$ und $a_2 > 0$, so ist $l(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit dem ursprünglichen $l(a_1, a_2)$ identisch.

Eine andere mögliche Definition erhält man, wenn das arithmetische Mittel aller Zahlen $l(a_i, a_k)$ $(i \neq k)$ gebildet wird:

$$L\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \overset{\textbf{def}}{=} \frac{\sum\limits_{i \neq k} l\,(a_i, a_k)}{\binom{n}{2}}. \tag{6}$$

Aus den Definitionen sind die folgenden Ungleichungen ersichtlich:

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} \leqq l\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq L\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}. \tag{7}$$

Es ist klar, daß auch durch das Mittel $L\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ I und II erfüllt, nicht aber III befriedigt werden, also ist auch $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ein nicht-assoziatives Mittel.

Wir könnten nun durch weitere geometrische bzw. arithmetische Mittelbildungen zu neueren logarithmischen Mittelwertsbegriffen gelangen, es scheint aber auch naheliegend, als logarithmisches Mittel der positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ das logarithmische Mittel von $l(a_1, \ldots, a_n)$ und $L(a_1, \ldots, a_n)$, d. h. den Ausdruck

$$\lambda\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \overset{\textbf{def}}{=} \frac{L\,(a_1, \ldots, a_n) - l\,(a_1, \ldots, a_n)}{\ln\left[\dfrac{L\,(a_1, \ldots, a_n)}{l\,(a_1, \ldots, a_n)}\right]} \tag{8}$$

zu betrachten. Es gilt augenscheinlich:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqq l(a_1, a_2, \dots, a_n) \leqq \sqrt{l(a_1, \dots, a_n) L(a_1, \dots, a_n)} \leqq \lambda(a_1, \dots, a_n) \leqq$$

$$\leqq \frac{l(a_1, \dots, a_n) + L(a_1, \dots, a_n)}{2} \leqq L(a_1, \dots, a_n) \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Durch die Einführung des Mittelwertes $\lambda(a_1, \dots, a_n)$ bleibt also die Relation (3) (in verallgemeinerter Form) gültig, die Forderungen I und II werden erfüllt, nicht aber III, so daß auch $\lambda(a_1, \dots, a_n)$ nicht-assoziativ ist.

Weitere Verallgemeinerungen werden z. B. durch Zuhilfenahme der allgemeinen Mittelwertformel gewonnen[2]

$$M_n^{(r)}(\bar{a}; \bar{p}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^r}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^{1/r}; \quad \left(\begin{array}{l} \bar{a} = [a_1, a_2 \dots, a_n] \\ \bar{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n] \end{array} \right) \tag{9}$$

dabei sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ positive Zahlen, deren mit den Gewichten $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ gebildetes Mittel $M_n^{(r)}(\bar{a}; p)$ ist. Der reelle Exponent r variiert von $-\infty$ bis $+\infty$ und es kann nachgewiesen werden, daß (bei festen Werten von a_i und p_i) der Mittelwert (9) mit r monoton wächst: für $-\infty < r_1 < r_2 < +\infty$ gilt:

$$M_n^{(r_1)}(\bar{a}; \bar{p}) \leqq M_n^{(r_2)}(\bar{a}; \bar{p}).$$

Für $r \to -\infty$ konvergiert $M_n^{(r)}(\bar{a}; \bar{p})$ gegen $\min(a_1, a_2, \dots, a_n)$, und für $r \to +\infty$ konvergiert $M_n^{(r)}(\bar{a}; \bar{p})$ gegen $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Für $r = -1$, 0 bzw. 1 ist $M_n^{(r)}(\bar{a}; \bar{p})$ mit dem gewichteten harmonischen, geometrischen bzw. arithmetischen Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ identisch; sind alle Gewichte $p_i = 1$, so erhalten wir die gewöhnlichen Mittelwerte.[3]

Setzen wir alle $p_i = 1$ an und bilden aus den positiven Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ für alle Paare a_i, a_k $(i \neq k)$ die logarithmischen Mittelwerte

$$l(a_i, a_k) = \frac{a_i - a_k}{\ln\left(\frac{a_i}{a_k}\right)},$$

[2] Siehe z. b. D. MITRINOVIČ: Analytic Inequalities, (1970), Berlin—New York, Springer-Verlag.
[3] Vgl. diesbezüglich das angeführte Buch von MITRINOVIČ.

so ergibt sich durch die Formel

$$\Lambda_n^{(r)}(\overline{a}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\sum\limits_{i \neq k} l^r(a_i, a_k)}{\binom{n}{2}} \right)^{1/r} \tag{10}$$

ein neuer, noch allgemeinerer logarithmischer Mittelwertsbegriff.

Aus der Definition ist die Eigenschaft I sofort ersichtlich. Auch das Bestehen der Eigenschaft II ist leicht einzusehen. Da

$$\min_{i \neq k} \{l(a_i, a_k)\} \leqq \Lambda_n^{(r)}(\overline{a}) \leqq \max_{i \neq k} \{l(a_i, a_k)\}$$

ist und für gewisse Indexpaare i_1, k_1 bzw. i_2, k_2

$$\max_{i \neq k} \{l(a_i, a_k)\} = l(a_{i_1}, a_{k_1}),$$

bzw.

$$\min_{i \neq k} \{l(a_i, a_k)\} = l(a_{i_2}, a_{k_2})$$

gelten, da weiterhin auf Grund der Eigenschaften von $l(a_i, a_k)$ die Ungleichungen

$$l(a_{i_1}, a_{k_1}) \leqq \max(a_{i_1}, a_{k_1}) \leqq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

bzw.

$$l(a_{i_2}, a_{k_2}) \geqq \min(a_{i_2}, a_{k_2}) \geqq \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

bestehen, ist das Bestehen der Eigenschaft II für das Mittel $\Lambda_n^{(r)}(\overline{a})$ nachgewiesen.

Ist $r = 1$, so stimmt $\Lambda_n^{(1)}(\overline{a})$ mit $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ überein, und für $r = 0$ ergibt sich der Mittelwert

$$l(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Lambda_n^{(0)}(\overline{a}).$$

Für $0 \leqq r \leqq 1$ haben wir wegen der erwähnten Monotonität von $\Lambda_n^{(r)}(\overline{a})$ als Funktion von r mit Sicherheit die Relationen:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq l(a_1, \ldots, a_n) = \Lambda_n^{(0)}(\overline{a}) \leqq \Lambda_n^{(r)}(\overline{a}) \leqq \Lambda_n^{(1)}(\overline{a}) =$$

$$= L(a_1, \ldots, a_n) \leqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n},$$

für andere Wertbereiche von r scheinen aber diese Relationen sehr fraglich zu sein.

Diese Ausführungen zeigen jedenfalls, wie gedankenerregend gewisse technische Probleme für die reine Mathematik sein können.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden einige mögliche Definitionen für das logarithmische Mittel mehrerer positiver Zahlen gegeben. Es wird bewiesen, daß die so erhaltenen Mittelwerte zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der betreffenden positiven Zahlen liegen.

Prof. Dr. Dezső KRÁLIK, Budapest XI., Stoczek u. 2—4. Ungarn