ÜBER DIE ANNÄHERUNG LOGARITHMISCHER FUNKTIONEN DURCH ALGEBRAISCHE FUNKTIONEN*

Von

K. Tettamanti, G. Sárkány, D. Králik und R. Stomfai**

Lehrstuhl für Chemische Verfahrenstechnik und III. Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 22. Oktober 1969)

1. Einleitung: die Problemstellung

Die Vorgänge, die in den physikalischen Wissenschaften, so besonders auf dem Gebiete der chemischen Verfahrenstechnik vorkommen, werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Bei der Lösung der Differentialgleichungen werden die geometrischen bzw. zeitlichen Bedingungen, unter denen sich der untersuchte Vorgang abspielt, festgehalten. Da sich auch die Werte der in den Differentialgleichungen vorkommenden Parameter innerhalb der Integrationsgrenzen ändern, verfährt man zur Vereinfachung der Lösung gewöhnlich so, daß man die Änderung dieser Parameter annäherungsweise außer acht läßt und *mit dem arithmetischen Mittel* $M_{\mathrm{ar}} = \dfrac{a+b}{2}$ der beiden Werte a und b rechnet, die den Integrationsgrenzen der Parameter entsprechen; dabei wird während der Rechnung das Mittel M_{ar} auf dem ganzen Integrationsgebiet als konstant angesehen. (Die Anwendung des arithmetischen Mittels bedeutet nämlich, daß die Änderung des Parameters im Integrationsintervall durch eine Gerade approximiert wurde, d. h. es wurde ein Trapez-Flächeninhalt bestimmt.) Die exakte Behandlung der Erscheinungen, d. h. die genaue Lösung der Differentialgleichungen, würde erfordern, im untersuchten Intervall mit dem Integral-Mittel der Funktionen zu rechnen, die die betreffenden Parameter enthält. In vielen Fällen ist die Funktion, das die zeitliche oder räumliche Änderung des Parameters beschreibt, so beschaffen, daß in der exakten Lösung der Differentialgleichung als Integral-Mittel des Parameters das sogenannte *logarithmische Mittel* $M_{\log} = \dfrac{b-a}{\ln(b/a)}$ vorkommt.

Ein Beispiel: Die allgemeine Differentialgleichung der stationären Wärmeleitung lautet in Polarkoordinaten:

$$q = -\lambda A \frac{dt}{dr}. \tag{1}$$

* Prof. L. Erdey zum 60. Geburtstag gewidmet.
** »Loránd Eötvös« Geophysikalisches Institut, Budapest

Bei einer sogenannten zweidimensionalen, in einer zylindrischen Röhrenwand vor sich gehenden Wärmeleitung ist die Zylinderfläche $A = CL = 2r\pi L$ selbst Funktion von r, wenn aber die Integrationsgrenzen r_1 und r_2 einander benachbart sind (d. h. die Röhrenwand dünn ist: $r_1 \approx r_2$), so kann in der obigen Differentialgleichung der veränderliche Umfang C durch das arithmetische Mittel $C = (r_1 + r_2)\pi$ der Integrationsgrenzen r_1 und r_2 als durch einen konstanten Wert ersetzt werden, und so wird die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung formal zu einer eindimensionalen Gleichung, die deshalb einfacher integriert werden kann:

$$q = \frac{\lambda\,[r_1 + r_2]\,\pi \cdot L \cdot [t_1 - t_2]}{r_2 - r_1}, \tag{2}$$

mit $r_1 < r_2$ und $t_1 > t_2$.

Nach entsprechender Umformung $\quad r_{\mathrm{ar}} = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$

und mit der Bezeichnung $S = r_2 - r_1$ ergibt sich:

$$q = \frac{\lambda \cdot 2\, r_{\mathrm{ar}}\, \pi \cdot L}{S}\,(t_1 - t_2)\,. \tag{3}$$

Andererseits wird die exakte Lösung der in Wirklichkeit zweidimensionalen Differentialgleichung der Wärmeleitung durch eine veränderliche Zylinderfläche $A = 2r \cdot \pi \cdot L$ durch folgende Formel dargestellt:

$$q = \frac{2\lambda \cdot \pi \cdot L}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}\,(t_1 - t_2), \tag{4}$$

oder nach entsprechender Umformung:

$$q = \frac{\lambda \cdot 2\,\dfrac{S}{\ln(r_2/r_1)} \cdot \pi \cdot L}{S}\,(t_1 - t_2). \tag{5}$$

Nach der exakten Lösung der Differentialgleichung kommt also in der Formel des Wärmestroms im Fall einer dickwandigen Röhre ($r_2 \gg r_1$) das sogenannte

logarithmische Mittel des Radius $\quad r_{\log} = \dfrac{r_2 - r_1}{\ln (r_2/r_1)}$

vor.

Durch die Einführung des logarithmischen Mittels $r_{\log}$ kann aber die exakte Lösung der in der Röhrenwand vor sich gehenden *zweidimensionalen* Wärmeleitung, mindestens *formell*, durch den folgenden Ausdruck beschrieben werden:

$$q = \frac{\lambda 2 r_{\log} \pi L}{S} \cdot (t_1 - t_2), \tag{6}$$

welcher der Formel der eindimensionalen Wärmeleitung analog ist.

Durch diese formelle Umschreibung kann im exakten Integral (6) — ähnlich der Annäherungsformel (3) — der Ausdruck eines fiktiven Zylindermantels $A = 2r \cdot \pi \cdot L$ wohl erkannt werden, mit dem Unterschied, daß im Fall (6) mit dem der exakten Lösung entsprechenden Integrationsmittel (d. h. jetzt mit dem logarithmischen Mittel $r_{\log}$) gerechnet wird, während in der angenäherten Lösung (3) das einfachere arithmetische Mittel r_{ar} in Betracht kommt. In der Praxis bedient man sich nur des einfacheren arithmetischen Mittels, wenn die Differenz von r_1 und r_2 klein ist (wenn z. B. $r_2/r_1 < 2$ gilt, ist der begangene Fehler unter 4%).

Das oben bei der approximativen Lösung (3) verwendete Verfahren, bei dem schon in der Differentialgleichung eine Vernachlässigung vorkam, kann wohl bestritten werden, da sich in komplizierteren Fällen der Fehler nicht voraussehen läßt, der durch die Vernachlässigung in der Endformel hervorgerufen wird. Viel angebrachter und übersichtlicher ist das Verfahren, bei dem das Integral (4), das sich durch die *exakte* Lösung der Differentialgleichung ergab, durch eine solche einfachere Funktion approximiert wird, deren Fehler gut abgeschätzt werden kann.

Es war leider bisher für den obigen sowohl didaktisch, wie auch aus dem Gesichtspunkt des Ingenieurs wichtigen Fall kein Rechenverfahren bekannt, nach dem die Abweichung des logarithmischen Mittels von dem arithmetischen gut abschätzbar wäre.

Schon das obige Beispiel wirft also die Frage auf, wie man die Funktion $\ln(1 + z)$ durch algebraische Funktionen so approximieren kann, daß zugleich der Fehler der Approximation abschätzbar sei.

Bei der Beschreibung von Vorgängen kommen oft Integrale der Form: $\int \frac{dz}{\ln(1+z)}$ vor. Dieses Integral kann in geschlossener Form nicht dargestellt werden. In der Praxis erhebt sich jedoch der Anspruch einer leicht zu handhabenden, geschlossenen Formel, und in diesem Fall genügte auch ein Annäherungsintegral, wenn nur der begangene Fehler gut abgeschätzt werden kann.

Da die Funktion $\ln(1 + z)$ ziemlich schwierig zu behandeln ist, soll nach einfacheren algebraischen Funktionen gesucht werden, die in den gegebenen Intervallen $\ln(1 + z)$ in dem erforderten Maß approximieren, und mit deren Hilfe sich alle Rechnungen mit entsprechender Genauigkeit ausführen lassen.

2. Untersuchung der Schrankenfunktionen von ln(1 + z)

Die Untersuchungen, die hier ausführlich nicht dargelegt werden sollen, führten zu der Vermutung, daß es zwei einfache algebraische Funktionen gibt:

$$S_1(z) = \frac{2z}{2+z} \tag{7}$$

und

$$S_2(z) = \frac{z}{(1+z)^{1/2}}, \tag{8}$$

die für alle Werte $z > -1$ Schrankenfunktionen von $\ln(1+z) = L(z)$ sind:

$$|S_1(z)| \leqq |L(z)| \leqq |S_2(z)|, \tag{9}$$

oder ausführlicher:

$$\left|\frac{2z}{2+z}\right| \leqq |\ln(1+z)| \leqq \left|\frac{z}{(1+z)^{1/2}}\right|. \tag{9a}$$

Es soll bemerkt werden, daß diese Schrankenfunktionen als Summen zweier unendlicher geometrischer Reihen erhalten wurden:

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z\cdot\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2z}{2+z} \tag{9b}$$

$$S_2(z) = \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-z)^n\right]^{1/2} = \frac{z}{(1+z)^{1/2}}. \tag{9c}$$

Die Ungleichungen (9) gehen für $z = 0$ in Gleichungen über:

$$S_1(0) = L(0) = S_2(0) = 0; \tag{10a}$$

in diesem Falle stimmen sowohl ihre ersten wie auch ihre zweiten Derivierten miteinander überein und infolgedessen sind auch ihre Krümmungsmaße gleich:

$$S'_1(0) = L'(0) = S'_2(0) = 1, \tag{10b}$$

$$S''_1(0) = L''(0) = S''_2(0) = -1, \tag{10c}$$

$$G_{S_1}(0) = G_L(0) = G_{S_2}(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4} = -0{,}3535\,,$$

wo

$$G_{S_1} = \frac{S_1''}{(1 + S_1'^2)^{3/2}} \qquad \text{u.s.w.}$$

Durch einfache Rechnung erhalten wir die Differenzialquotienten:

$$S_1'(z) = \frac{4}{(2+z)^2}\,; \quad L'(z) = \frac{1}{1+z}\,; \quad S_2'(z) = \frac{2+z}{2(1+z)^{3/2}}\,. \tag{10}$$

Diese Differentialquotienten sind für $z > -1$ alle positiv, die Funktionen selbst sind also für $z > -1$ monoton wachsend. Zum Beweis der Ungleichungen (9) sollen die Differenzen $r_1 = S_1 - L$ bzw. $r_2 = S_2 - L$ (die sog. »Fehlerfunktionen«) untersucht werden:

$$\frac{d}{dz}(S_1 - L) \leqq 0, \qquad \text{d. h.} \qquad r_1 = S_1 - L \tag{11a}$$

nimmt monoton, ab,

$$\frac{d}{dz}(S_2 - L) \geqq 0, \qquad \text{d. h.} \qquad r_2 = S_2 - L \tag{11b}$$

nimmt monoton zu für die Werte $z > -1$.

Da weiterhin an der Stelle $z = 0$ alle drei Funktionen den Wert Null haben, gelten die Ungleichungen:

$$S_1(z) \geqq L(z) \geqq S_2(z) \quad \text{für} \quad -1 < z \leqq 0 \tag{12a}$$

bzw.

$$S_1(z) \leqq L(z) \leqq S_2(z) \;\text{ für } \; z \geqq 0\,. \tag{12b}$$

Diese beiden Beziehungen können wie folgt zusammengefaßt werden:

$$|\,S_1(z)\,| \leqq |\,L(z)\,| \leqq |\,S_2(z)\,| \tag{12)=(9}$$

für alle Werte $z > -1$.

Damit ist die Vermutung unter (9) und (9a) bewiesen, wir haben also zwei Schrankenfunktionen für $\ln(1+z)$ gefunden, so daß die Absolutwerte der letzten Funktion im ganzen Definitionsbereich $z > -1$ zwischen den Absolutwerten von $S_1(z)$ und $S_2(z)$ liegen (siehe Abb. 1).

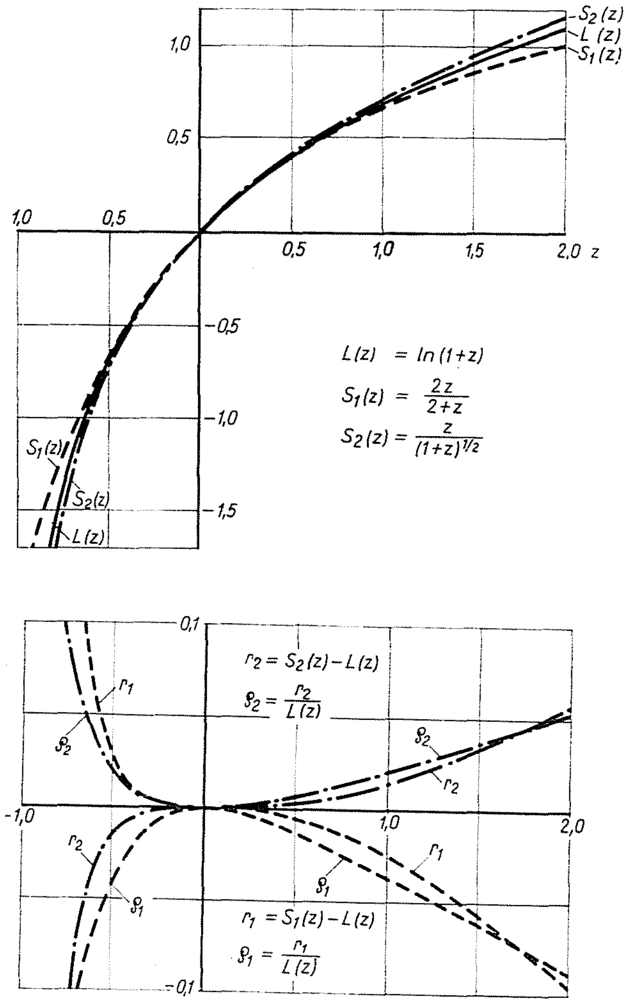

Abb. 1—2. Die Annäherungsfunktionen von ln $(1+z)$ und der Fehler der Annäherung

3. Die Abschätzung der Abweichungen der Schrankenfunktionen von ln (1 + z)

Im folgenden soll gezeigt werden, daß durch die Werte der Schrankenfunktionen die Funktionswerte von $\ln(1+z)$ gut ersetzt werden können, d. h. für genügend kleine z-Werte auch die Werte der Differenzen $r_1 = S_1 - L$ bzw. $r_2 = S_2 - L$ genügend klein bleiben.

Wir haben schon gesehen, daß die Differenz $r_1 = S_1 - L$ monoton abnimmt und $r_2 = S_2 - L$ monoton zunimmt. Beide sind bei $z = 0$ gleich

Null. Die Fehlerfunktionen r_1 und r_2 nehmen ihren Maximalwert also am Rand $z^* \gtreqless 0$ des betreffenden Intervalls $(0, z^*)$ an, innerhalb des Intervalls gilt weiterhin $|r_k(z)| < |r_k(z^*)|$ $(k = 1$ bzw. $2)$.

Ferner ist es leicht ersichtlich, daß in den Punkten z_1 sowie z_2 im Falle eines Intervalls (z_1, z_2) mit $z_1 < 0 < z_2$ genau dann der gleiche Fehler begangen wird (einerlei, ob die Funktion $\ln(1 + z)$ durch $S_1(z)$ oder durch $S_2(z)$ ersetzt wird), wenn

$$z_1 = -\frac{z_2}{1 + z_2}$$

ist. (Für die Zahlenwerte der Fehlerfunktionen siehe Abbildung 2 sowie die Daten in Tabelle I.)

Die Fehlerfunktion $r_1 = S_1 - L$ kann zahlenmäßig wie folgt abgeschätzt werden:

Tabelle I

	$\ln(1+z)$	$r_1(z)$	$\frac{r_1(z)}{\ln(1+z)}$ %	$r_2(z)$	$\frac{r_2(z)}{\ln(1+z)}$ %
−0.8	−1,60944	+0,27611	+17,2	−0,17946	−11,2
−0,75	−1,38629	+0,18629	+13,35	−0,11371	− 8,2
−0,7	−1,20397	0,12705	+10,55	−0,07406	− 6,15
−0,6	−0,91629	0,05915	+ 6,44	−0,03240	− 3,5
−0,5	−0,69315	0,02648	+ 3,82	−0,01396	− 2,0
−0,4	−0,51083	0,01083	+ 2,12	−0,00556	− 1,1
−0,3	−0,35667	0,00373	+ 1,05	−0,00188	− 0,53
−0,25	−0,28768	0,00196	+ 0,68	−0,00080	− 0,27
−0,2	−0,22314	0,00092	+ 0,41	−0,00047	− 0,21
−0,1	−0,10536	0,00010	+ 0,09	−0,00005	− 0,05
0,0	0,0000	0	0	0	0
+0,1	0,09531	−0,00006	− 0,06	+0,00002	+ 0,02
+0,2	0,18232	−0,00050	− 0,27	+0,00033	+ 0,18
+0,3	0,26236	−0,00150	− 0,57	+0,0008	+ 0,3
+0,4	0,33647	−0,00314	− 0,93	+0,0017	+ 0,5
+0,5	0,40547	−0,00547	− 1,35	+0,0027	+ 0,667
+0,75	0,55962	−0,01417	− 2,53	+0,0073	+ 1,3
+1	0,69315	−0,02648	− 3,82	+0,0139	+ 2,0
+2	1,09861	−0,0986	− 9,0	+0,0561	+ 5,11
+3	1,38629	−0,1863	−13,4	+0,1137	+ 8,2
+4	1,60944	−0,2761	−17,2	+0,1795	+11,2

Außer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n}$ haben wir eine andere, viel rascher konvergierende Reihenentwicklung von $\ln(1+z)$:

$$\begin{aligned}\ln(1+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \left(\frac{z}{2+z}\right)^{2n+1} = \\ &= 2\left\{\frac{2z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \ldots\right\} = \\ &= 2\frac{z}{2+z}\left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^4 + \ldots\right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Auf Grund dieser Entwicklung lautet r_1 folgenderweise:

$$\begin{aligned} r_1(z) = S_1(z) - L(z) &= \frac{2z}{2+z} - \ln(1+z) = \\ &- \left\{\frac{2}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \ldots\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Der Absolutwert $|r_1(z)|$ wird für die Werte $z > 0$ durch die folgende Reihe majorisiert:

$$\begin{aligned}|r_1(z)| < m_1(z) &= \frac{2}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3\left\{1 + \left(\frac{z}{2+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{2+z}\right)^4 + \ldots\right\} = \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 \frac{1}{1-\left(\frac{z}{2+z}\right)^2} \quad (z > 0).\end{aligned} \tag{15}$$

Da die Funktion $m_1(z)$ für $z > 0$ monoton zunimmt, erreicht auch $r_1(z)$ den Höchstwert in einem Intervall $(0, z^*)$ im Grenzpunkt z^*. Dasselbe gilt auch im Fall $(z^*, 0)$ mit $-1 < z < 0$, wie es leicht nachgerechnet werden kann.

Beim Gebrauch der Funktion $S_1(z)$ erhält man z. B. für $z = 1$ die Abschätzung $|r_1(1)| < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{36} = 0{,}0278$, während der Zahlenwert $r_1(1) = -0{,}0265$ der Tabelle I entnommen wird. Die Fehlerfunktion $r_2(z) = S_2(z) - L(z)$ läßt sich folgenderweise abschätzen: Nach der Formel (13) haben wir:

$$\ln(1+z) = \frac{2z}{2+z} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \ldots$$

$$\frac{2z}{2+z} - L(z) = -\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{z}{2+z}\right)^7 + \ldots\right\}. \tag{a}$$

Es wird ein Faktor f definiert:

$$f = \frac{2+z}{2(1+z)^{1/2}}, \tag{b}$$

der für $z > -1$ nicht kleiner als 1 ist. Zuerst soll der Fall $z \geqq 0$ behandelt werden. Wird zu den beiden Seiten von (a) der Ausdruck:

$$(f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} \tag{c}$$

addiert, erhält man:

$$f\cdot\frac{2z}{2+z} - L(z) = (f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \ldots\right\}. \tag{d}$$

Das erste Glied der linken Seite der Gleichung ist der Ausdruck:

$$f\cdot\frac{2z}{2+z} = \frac{z}{(1+z)^{1/2}} = S_2(z)\,. \tag{e}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n+1}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^{2n+1}$$

auf der rechten Seite der Gleichung (d) ersetzen wir durch die minorierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^{2n+1}.$$

Es ergibt sich dadurch die folgende Ungleichung:

$$r_2(z) = S_2(z) - L(z) <$$

$$< (f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^7 + \ldots\right\}. \tag{f}$$

Die Summation der unendlichen Reihe ergibt die Relation:

$$r_2(z) < (f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^2}\,. \tag{g}$$

Bei einer Fehlerabschätzung geringerer Genauigkeit kann folgenderweise gerechnet werden:

aus der unendlichen Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (d) wird nur das erste Glied in Betracht gezogen:

$$r_2(z) = S_2(z) - L(z) < (f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^3. \tag{g2}$$

Es ergeben sich zum Beispiel für $z = 1$ auf Grund von (g):

$$r_2(1) < \left(\frac{3}{2\cdot 2^{1/2}} - 1\right)\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{9}},$$

$$r_2(1) < 0{,}0404 - 0{,}0264 = 0{,}0140,$$

bzw. auf Grund von (g2) : $r_2(1) < 0{,}0404 - 0{,}0247 = 0{,}0157$.

Den genauen Wert des Fehlers erhält man nach der Logarithmentafel: $r_2(1) = 0{,}01396$.

Ähnlich kann der Wert von $r_2(z)$ auch für den Fall $z \leqq 0$ abgeschätzt werden; in diesem Falle lautet der Ausdruck (d) wie folgt:

$$\left|f\cdot\frac{2z}{2+z} - L(z)\right| = \left|(f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n+1}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^{2n+1}\right|. \tag{dd}$$

Nach dem Ausdruck (g):

$$|r_2(z)| < \left|(f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{z}{1+z}\right)^2}\right|. \tag{gg}$$

Oder nach (g2) (mit einer geringeren Genauigkeit):

$$|r_2(z)| < \left|(f-1)\cdot\frac{2z}{2+z} - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{z}{2+z}\right)^3\right|. \tag{gg2}$$

4. Das logarithmische Mittel

Die Beziehungen zwischen den Funktionen $\ln(1+z)$, $S_1(z)$ und $S_2(z)$ nach (9a) erlauben es, die Verhältnisse der drei Mittelwerte M_{ar}, M_{log} und M_{geom} zueinander festzustellen.

Es seien a und b zwei positive Zahlen mit $b > a$ und $b = a(1+z)$, d. h. $z = \frac{b-a}{a}$; diesen Ausdruck von z in die doppelte Ungleichung (9) eingesetzt:

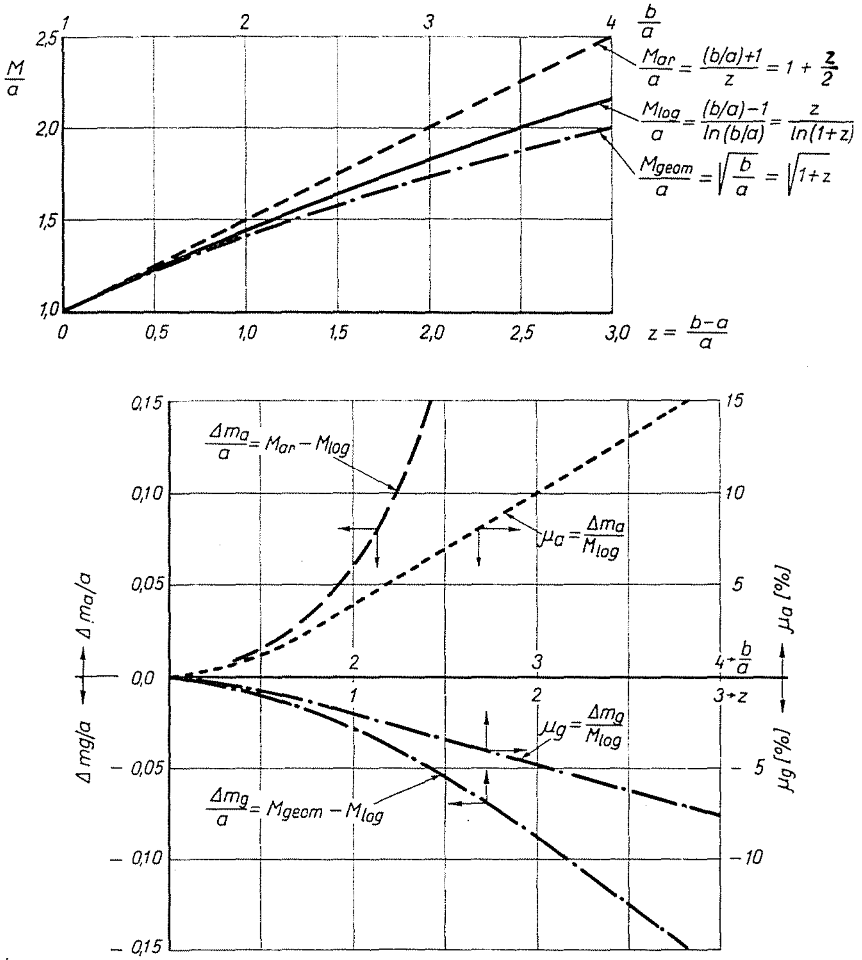

Abb. 3—4. Vergleich der Mittel: M_{ar} — $M_{\log}$ — M_{geom}

$$\frac{2\,\dfrac{b-a}{a}}{2+\dfrac{b-a}{a}} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-d}{a\sqrt{\dfrac{b}{a}}},$$

oder

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}},$$

und endlich

$$\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} > \sqrt{ab}, \tag{16}$$

d. h.

$$M_{\mathrm{ar}} > M_{\log} > M_{\mathrm{geom}}. \tag{16a}$$

Bemerkung: Auf Grund von (16) sind wir nunmehr in der Lage, das in der Einleitung aufgeworfene Problem zu lösen: der genaue Ausdruck (6) kann durch die Formel (3) approximiert und der Fehler der Approximation mit dem arithmetischen Mittel mit Hilfe der Abbildungen 3 und 4 bzw. der Tabelle II gut abgeschätzt werden.

Tabelle II

Die Abweichung der Mittel M_{ar} und M_{geom} der positiven Zahlen a und $b = a(1+z)$ vom logarithmischen Mittel $M_{\log}$ $(b > a > 0)$

z	$M_{\log}$	$\Delta m_a = M_{\mathrm{ar}} - M_{\log}$	$\mu_a = \frac{\Delta m_a}{M_{\log}}$ (%)	$\Delta m_g = M_{\mathrm{geom}} - M_{\log}$	$\mu_g = \frac{\Delta m_g}{M_{\log}}$ (%)
0,0	$1{,}00 \cdot a$	0,00	0,0	0,0	0,0
0,5	$1{,}235 \cdot a$	$+0{,}015 \cdot a$	$+\ 1{,}21$	$-0{,}010 \cdot a$	$-\ 0{,}81$
1,0	$1{,}4426 \cdot a$	$+0{,}0574 \cdot a$	$+\ 3{,}98$	$-0{,}028 \cdot a$	$-\ 2{,}0$
2	$1{,}8205 \cdot a$	$+0{,}1795 \cdot a$	$+\ 9{,}86$	$-0{,}088 \cdot a$	$-\ 4{,}85$
3	$2{,}164 \cdot a$	$+0{,}345 \cdot a$	$+16{,}0$	$-0{,}164 \cdot a$	$-\ 7{,}58$
4	$2{,}487 \cdot a$	$+0{,}513 \cdot a$	$+20{,}6$	$-0{,}251 \cdot a$	$-10{,}1$

5. Die Methode der Integration durch Substitution

Da die Abweichung von $L(z) = \ln(1+z)$ von den Schrankenfunktionen $S_1(z)$ und $S_2(z)$ gering ist, darf bei den Integrationen $L(z)$ durch $S_1(z)$ bzw. $S_2(z)$ ersetzt werden. Diese Substitution ist besonders wertvoll in Fällen, wo die Integrale, in denen $L(z) = \ln(1+z)$ vorkommt, mit Hilfe der elementaren Funktionen in geschlossener Form nicht berechnet werden können. Das ist z. B. der Fall bei dem Integral

$$I = \int \frac{dz}{\ln(1+z)} .$$

Hier rechnen wir mit dem Annäherungsintegral

$$I(z) \approx H_1(z) = \int \frac{dz}{S_1(z)} = \int \frac{2+z}{2z} \cdot dz ,$$

oder mit

$$I(z) \approx H_2(z) = \int \frac{dz}{S_2(z)} = \int \frac{(1+z)^{1/2}}{z} \cdot dz\,.$$

Mit Hilfe der Funktionen

$$r_1(z) = S_1(z) - L(z) \quad \text{und} \quad r_2(z) = S_2(z) - L(z)$$

lassen sich auch die Fehler der Annäherungsintegrale abschätzen. Über die Integration von Ausdrücken, welche $L(z)$ enthalten, weiterhin über die betreffenden Fehlerabschätzungen sowie über die Anwendungen der obigen in der chemischen Industrie soll in einer folgenden Arbeit berichtet werden.

Abschließend sprechen wir Prof. *P. Rózsa* für seine wertvollen Ratschläge unseren besten Dank aus. Die Sätze und Feststellungen der vorliegenden Arbeit dienten als Hilfsmittel zu den früheren, noch nicht publizierten Untersuchungen, die wir gemeinsam mit Prof. *P. Rózsa* ausführten, dessen ständige Mitwirkung und Unterstützung für uns unentbehrlich war.

Zusammenfassung

1. Es wurde festgestellt, daß die Funktion ln $(1 + z)$ durch folgende zwei Funktionen

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z \cdot \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2z}{2+z}$$

bzw.

$$S_2(z) = \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-z)^n\right]^{1/2} = \frac{z}{(1+z)^{1/2}}$$

eingeschränkt wird. Diese Schrankenfunktionen sind zu einer guten approximativen numerischen Berechnung der Werte von ln $(1 + z)$ in einem genügend großen Bereich des Punktes $z = 0$ geeignet.

2. Mit Hilfe dieser Schrankenfunktionen können die Ungleichungen zwischen den arithmetischen, geometrischen und logarithmischen Mitteln

$$\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln(b/a)} > \sqrt{ab}$$

für den Fall $b > a > 0$ abgeleitet werden.

3. Bei der Integration von Ausdrücken, die ln $(1 + z)$ enthalten, kann die primitive Funktion in vielen Fällen in geschlossener Form nicht angegeben werden. Wird in diesen Ausdrücken an Stelle von ln $(1 + z)$ eine der obigen Schrankenfunktionen geschrieben, so wird dadurch der Ausdruck »integrierbar« und auch der Fehler des annähernden Integrals läßt sich abschätzen.

Prof. Dr. Károly TETTAMANTI,
Dr. György SÁRKÁNY,
Prof. Dr. Dezső KRÁLIK
Budapest XI., Műegyetem rkp. 3—9. Ungarn

Robert STOMFAI
Loránd Eötvös Geophysikalisches Institut Budapest, XIV., Népstadion u. 99. Ungarn