ÜBER GEWISSE VEKTORFOLGEN DES HILBERTSCHEN RAUMES

Von

K. KONCZ

III. Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 28. September, 1965)

Vorgelegt von Prof. Dr. G. ALEXITS

TEIL I

1. Einführung

In dieser Arbeit sollen die Vektoren des reellen Hilbertschen Koordinatenraumes besprochen werden. Diese Vektoren werden allgemein mit $v\ (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ bezeichnet, wobei x_i reell und die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i^2$ selbstverständlich stets konvergent ist.

Im weiteren wird oft von der Vektorfolge des reellen Hilbertschen Koordinatenraumes die Rede sein, die mit $\{v_n\ (x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ oder mit $\{v_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ bezeichnet wird. Ferner soll eine Vektorfolge des reellen Hilbertschen Koordinatenraumes mit A, B usw. bezeichnet werden. Somit bedeutet $A = \{v_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$. $\|v\|$ die Norm des Vektors v, d. h. $\|v_n\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_{ni}^2$ und (v_n, v_m) bedeutet das innere Produkt zweier Vektoren, d. h. es wird

$$(v_n, v_m) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{ni}\, x_{mi} \tag{1}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n \neq m).$$

Es sei nun

$$\alpha_{mn} = \|v_m - v_n\| - \sqrt{2}\,, \tag{2}$$

$$\beta_{mn} = -(v_m, v_n) \tag{3}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \ m \neq n);$$

die Größen α_{mm} und β_{mm} $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ werden demnach zumeist außer acht gelassen werden. In bestimmten Fällen werden wir jedoch die Definition von β_{mm} benötigen. Es sei also v_m ein Einheitsvektor, und

$$\beta_{mm} = (v_m, v_m) = \sum_{i=0}^{\infty} x_{mi}^2 = 1\,.$$

Eine wichtige Rolle werden in den Betrachtungen die Größen

$$\left.\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_{mn}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_{mn}^2 \\ \text{bzw.} \qquad & \\ t_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \beta_{mn}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^2 \end{aligned}\right\} (m = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

spielen.

Um nicht zwei Summenzeichen schreiben zu müssen, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_{mn}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_{mn}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 \\ &\qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \\ t_m &= \sum_{n=0}^{m-1} \beta_{mn}^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 \\ &\qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Im Satz 4 von [1] haben wir bewiesen, daß die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2$$

für die Folgen, die in dieser Arbeit eine Rolle spielen, konvergent sind.

Definition 1. *Eine Einheitsvektorfolge $\{v_n\}$ des reellen Hilbertschen Koordinatenraumes heißt g-Folge, wenn für die in* (2) *definierten Größen $\alpha_{mn} \geq 0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots; n = 0, 1, 2, \ldots; m \neq n)$ und wenn für mindestens ein Indexpaar m und n $\alpha_{mn} = 0$ ist. Die Familie der g-Folgen bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$.*

Definition 2. *Eine Einheitsvektorfolge $\{v_n\}$ des reellen Hilbertschen Koordinatenraumes heißt u-Folge, wenn für die in* (3) *definierten Größen $\alpha_{mn} > 0$ $(m = 0, 1, 2, \ldots; n = 0, 1, 2, \ldots; m \neq n)$ gilt. Die Familie der u-Folgen bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}$.*

In diesem ersten Teil unserer Arbeit soll zunächst die Frage untersucht werden, ob es zu einer beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine zur Familie $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{G}$ behörige Vektorfolge $A = \{v_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, in der für jedes m

$$s_m > \frac{1}{2} - \varepsilon .$$

Auf diese Frage können wir keine erschöpfende Antwort geben, doch werden wir *neue Gesichtspunkte* aufdecken, bzw. in der Lage sein, gewisse in [1] berührte Zusammenhänge *ausführlicher* zu analysieren.

2. Sätze über die Vektorfamilie $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{G}$

Satz 1. *Auf der Einheitskugel des reellen Hilbertschen Vektorraumes gibt es keine Punktfolge, deren Punkte paarweise einen größeren Abstand haben als* $\sqrt{2}+\varepsilon$, *wenn* $\varepsilon > 0$.

Beweis. Fixiert man die Zahl m beliebig, dann gilt, da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)}\, \alpha_{mn}^2$$

konvergent ist, nach dem Satze 4 von [1]

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{mn} = 0\,, \tag{6}$$

folglich ist $\alpha_{mn} < \varepsilon$, wenn $n > N(\varepsilon)$. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

In der Beziehung (14) des Hilfssatzes 5 von [1] haben wir für die u- oder g-Folgen die Ungleichung

$$\alpha_{mn} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\, \beta_{mn} \tag{7}$$

bewiesen. Daher gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)}\, \alpha_{mn}^2 \leqq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)}\, \beta_{mn}^2\,. \tag{8}$$

Satz 2. *Für g-Folgen gilt in der Beziehung* (8) *die Gleicheit dann und nur dann, wenn der Vektor v_m auf alle andere Vektoren v_n orthogonal ist.*

Beweis. Es ist trivial, daß diese Bedingung hinreichend ist. — Umgekehrt setzen wir voraus, daß in (8) die Gleichheit

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)}\, \alpha_{mn}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)}\, \beta_{mn}^2 \tag{9}$$

gilt. Auf Grund von (9) der Arbeit [1] ist

$$\beta_{mn} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{mn}^2 + 2\sqrt{2}\,\alpha_{mn}\right). \tag{10}$$

Wenn wir in (10) beide Seiten zum Quadrat erheben und für alle $n \neq m$ summieren, folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)}\, \beta_{mn}^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \left(\alpha_{mn}^4 + 4\sqrt{2}\,\alpha_{mn}^3 + 8\,\alpha_{mn}^2\right). \tag{11}$$

Da für g-Folgen nach der Definition 1 $\alpha_{mn} \geqq 0$ ist, ferner für die Einheitsvektoren v_m und v_n $\|v_m - v_n\| \leqq 2$ gilt, ist

$$0 \leqq \alpha_{mn} \leqq 2 - \sqrt{2} < 1. \tag{12}$$

Aus den Ungleichungen

$$0 \leqq \alpha_{mn}^4 \leqq \alpha_{mn}^3 \leqq \alpha_{mn}^2$$

folgt also, daß sich aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2$$

die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^3 \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^4$$

ergibt. Entsprechend hat man aus (11)

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^3 + \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 . \tag{13}$$

Wegen (9) geht daher (13) in die Gestalt

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^3$$

über. Hieraus folgt wegen (12)

$$\alpha_{mn} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots ; \quad m \neq n). \tag{14}$$

In (14) ist jedoch m fixiert, mithin steht der Vektor v_m auf die anderen Vektoren orthogonal. Damit ist der Beweis für den Satz 2 erbracht.

Satz 3. *Für jede u- oder g-Folge ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 < \frac{1}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Beweis. Nach der Formel (12) von [1] gilt für jede g- oder u-Folge

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 \leqq 1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Wenn aber in (15)

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 < 1 \tag{16}$$

gilt, dann gilt wegen (8)

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 < \frac{1}{2}\,.$$

Ist in (15)

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 = 1, \tag{17}$$

so gilt in (8) die Gleichheit gewiß nicht, also folgt im Sinne von (8)

$$\sum_{m=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 < \frac{1}{2}\,.$$

Aus dem Satz 3 folgt, daß für jede u- oder g-Folge

$$\frac{1}{2} - s_m > 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

gilt. Offen ist die Frage, ob es eine u- oder g-Folge mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - s_m\right)^2 < \infty$$

gibt, doch läßt sich leicht nachweisen, daß man zu jedem reellen $l > 0$ eine g-Vektorfolge finden kann, für die

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - s_m\right)^l$$

divergiert.

Satz 4. *Für jede u-Folge und für jedes m gilt*

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 < 1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Beweis. In (13) der Arbeit [1] haben wir für beliebige u- oder g-Folgen gezeigt, daß

$$\left(\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n \beta_{mn}\right)^2 \leq \sum_{p=0}^{k}{}^{(m)} \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n \mu_p (v_n\,,\ v_p) \tag{19}$$

gilt, wo $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ nichtnegative Zahlen sind. Wählen wir die Zahlen μ_n so, daß $\mu_n = \beta_{mn}$ wird, dann nimmt (19) die Form

$$\left(\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2\right)^2 \leq \sum_{p=0}^{k}{}^{(m)} \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn} \beta_{mp} (v_n, v_p) \tag{20}$$

an, bzw. gilt wegen $(v_n, v_n) = 1$ und $(v_n, v_p) = -\beta_{np}$

$$\left(\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2\right)^2 \leq \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 - 2 \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \sum_{p=0}^{n-1}{}^{(m)} \beta_{mn} \beta_{mp} \beta_{np} . \tag{21}$$

Führen wir in (21) die Bezeichnung

$$c_{mk} = 2 \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \sum_{p=0}^{n-1}{}^{(m)} \beta_{mn} \beta_{mp} \beta_{np} \tag{22}$$

ein, dann läßt sich (21) in der Form

$$\left(\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2\right)^2 \leq \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 - c_{mk} \tag{23}$$

schreiben. Da für u-Folgen $\beta_{mn} > 0$ und wegen (22)

$$0 < c_{mk} < c_{m,k+1}$$

gilt, folgt aus (23) für $k \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 < \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 < 1 .$$

Damit ist der Beweis des Satzes 4 erbracht.

Satz 5. *Für jede beliebig gegebene Zahl $\varepsilon > 0$ läßt sich eine u-Folge derart konstruieren, daß unendlich viele Glieder der zugehörigen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ — Folge $1 - \varepsilon$ übersteigen, wobei die Zahlen t_m die in (4) eingeführten Größen bedeuten.*

Beweis. Es sei

$$0 < \varepsilon < 1 \tag{24}$$

und zu diesem ε ein $\delta > 0$ gewählt, welches der Ungleichung

$$0 < \varepsilon < 1 - \sqrt{1 - \varepsilon} \tag{25}$$

genügt. Sodann wählen wir eine positive Zahlenfolge $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ so, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = 1 - \delta , \tag{26}$$

$$x_h = \frac{\sqrt{\delta}}{h+1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots), \tag{27}$$

$$y_h = \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{h^2+h+1}}{h+1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots) \tag{28}$$

sei. Um den Satz 5 beweisen zu können, werden wir eine u-Folge $r_0, r_1, r_2, \ldots$ konstruieren, die den Bedingungen des Satzes 5 genügt. Es sei

$$B = \{r_{2o} : o = 0, 1, 2, \ldots\}\, U$$
$$U\{r_{2t+1} : t = 0, 1, 2, \ldots\}$$

und hierin

$$r_{2o} = r_{2o}(x_{o0}, x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{oi}, \ldots)$$
$$(o = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$r_{2t+1} = r_{2t+1}(y_{t0}, y_{t1}, y_{t2}, \ldots, y_{tj}, \ldots)$$
$$(t = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Koordinaten der Vektoren definieren wir wie folgt:

$$\left.\begin{array}{lll} x_{oi} = c_k , & \text{wenn} & i = 2^{o+2} k + 2^{o+1} - 2 \,(k = 0, 1, 2, \ldots), \\ x_{oi} = -x_{2o+1} , & \text{wenn} & i = 1, 3, \ldots, 4o + 1 , \\ x_{oi} = y_{2o+1} , & \text{wenn} & i = 4_o + 3 \\ x_{oi} = 0 , & \text{wenn} & i \neq 1, 3, \ldots, 4o + 3 \\ \text{und} & & i \neq 2^{o+2} k + 2^{o+1} - 2 \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \end{array}\right\} \tag{29}$$

ferner

$$\left.\begin{array}{lll} y_{tj} = -\sqrt{1-\delta} , & \text{wenn} & j = 2t , \\ y_{tj} = y_{2t+2} , & \text{wenn} & j = 4t + 5 , \\ y_{tj} = 0 , & \text{wenn} & j \neq 2t \text{ und } j \neq 1, 3, \ldots, 4t + 5 , \\ y_{tj} = -x_{2t+2} , & \text{wenn} & j = 1, 3, \ldots, 4t + 3 . \end{array}\right\} \tag{30}$$

Zunächst werden wir zeigen, daß $\|r_{2o}\|^2 = 1$, $o = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Tatsächlich ist gemäß (27) und (28)

$$h x_h^2 + y_h^2 = \frac{\delta(2h + h^2 + 1)}{(h+1)^2} = \delta ,$$

so daß für $o = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|r_{2o}\|^2 = 1 - \delta + (2\,o + 1)\,x_{2o+1}^2 + y_{2o+1}^2 = 1$$

gilt. Ähnlich gilt, wenn $t = 0, 1, 2, \ldots$ ist,

$$\|r_{2t+1}\|^2 = 1 - \delta + (2\,t + 2)\,x_{2t+2}^2 + y_{2t+2}^2 \quad = 1\,.$$

Sind r_m und r_n zwei Vektoren der Folge B, so gilt, wie im weiteren gezeigt werden soll,

$$(r_m\,,\ r_n) < 0, (m = 0, 1, \ldots\,;\ (n = 0, 1, \ldots\,;\ m \neq n)\,. \tag{31}$$

Zum Beweis können wir zunächst festhalten, daß für die in (27) und (28) definierte Zahlen

$$y_h - hx_h > 0 \quad (h = 0, 2, \ldots) \tag{32}$$

ist, da

$$y_h - hx_h = \frac{\sqrt{\delta}\,\sqrt{h^2 + h + 1}}{h + 1} - \frac{h\sqrt{\delta}}{h + 1} = \frac{\sqrt{\delta}}{h + 1}\,(\sqrt{h^2 + h + 1} - h) > 0\,.$$

Um (31) zu beweisen, sei $q > o$. Im Sinne von (32) ist

$$(r_{2o}\,,\ r_{2q}) = -\,x_{2q+1}\,(y_{2o+1} - [2\,o + 1]\,x_{2o+1}) < 0\,.$$

Ferner gilt für $p < t$ gleichfalls gemäß (32) auch

$$(r_{2p+1}\,,\ r_{2t+1}) = -\,x_{2t+2}\,(y_{2p+2} - [2\,p + 2]\,x_{2p+2}) < 0\,.$$

Nun sei aber o fixiert und

$$2\,t + 1 = 2^{o+2}\,k + 2^{o+1} - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,; \tag{33}$$

in diesem Fall hat man

$$4o + 3 < 4\,t + 5 \tag{34}$$

wegen

$$2_o < 2^{o+1} - 1 \leqq 2\,t + 1\,.$$

Im Sinne von (32) gilt somit

$$(r_{2o}\,,\ r_{2t+1}) = -\,x_{2t+2}\,(y_{2o+1} - [2o + 1]\,x_{2o+1}) - c_k\sqrt{1 - \delta} < 0\,. \tag{35}$$

Ist o fix und gilt

$$2\,t + 1 \neq 2^{o+2}\,k + 2^{o+1} - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

$$4o + 3 > 4t + 5,$$

dann folgt aus (32), daß

$$(r_{2o},\ r_{2t+1}) = -x_{2o+1}\left(y_{2t+2} - [2t+2]\,x_{2t+2}\right) < 0\,.$$

Ist dagegen $4o + 3 < 4t + 5$, dann gilt gemäß (32)

$$(r_{2o},\ r_{2t+1}) = -x_{2t+2}\left(y_{2o+1} - [2o+1]\,x_{2o+1}\right) < 0\,.$$

Da also (31) für die vorliegende Folge B bewiesen ist, ist B eine u-Folge.

Nun soll nachgewiesen werden, daß für die im Satze 5 genannten Größen t_m in der vorliegenden Folge B — sofern $m = 2o$ —

$$t_{2o} > 1 - \varepsilon \qquad (o = 0, 1, 2, \ldots)$$

gilt. Zunächst ist leicht einzusehen, daß

$$t_{2o} = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(2o)}\, \beta_{2o,n}^2 \geqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta_{2o,2t+1}^2 = \sum_{t=0}^{\infty} (r_{2o},\ r_{2t+1})^2 \tag{37}$$

ist. Es sei nun

$$n_k = 2^{o+1}k + 2^o - 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Offenbar ist dann

$$t_{2o} \geqq \sum_{t=0}^{\infty} (r_{2o},\ r_{2t+1})^2 \geqq \sum_{k=0}^{\infty} (r_{2o},\ r_{2n_k+1})^2\,.$$

Aus (35) folgt

$$t_{2o} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} (r_{2o},\ r_{2n_k+1})^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{x_{2n_k+2}\left(y_{2o+1} - [2o+1]\,x_{2o+1}\right) + c_k\sqrt{1-\delta}\right\}. \tag{38}$$

Hier besteht gemäß (32) die Ungleichung

$$x_{2n_k+2}\left(y_{2o+1} - [2o+1]\,x_{2o+1}\right) > 0\,,$$

also auch die Abschätzung

$$t_{2o} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\,(1-\delta) = (1-\delta)^2\,.$$

Mit (26) und (25) erhält man

$$t_{2o} > 1 - \varepsilon \quad (o = 0, 1, 2, \ldots).$$

Bemerkung 1. A. Rényi hat in der Arbeit [2] eine Maßzahl angegeben, die zu entscheiden gestattet, wie hoch die Abstände in einer u- oder g-Folge in ihrer Gesamtheit $\sqrt{2}$ übersteigen. Die Folge

$$E = \begin{cases} w_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, \ldots\right) \\ w_1 = \left(0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots\right) \\ w_2 = \left(0, \quad 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

erreicht nach der Rényischen Maßzahl die mögliche obere Schranke, die in (4) definierte $\{t_m\}$-Folge von E erreicht jedoch den maximalen Wert 1 keineswegs. Es ist nämlich

$$t_0 = \beta_{10}^2 + 0^2 + 0^2 + \ldots = \beta_{01}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

und

$$t_m = \frac{1}{2} \quad (m = 1, 2, 3, 4, \ldots) .$$

TEIL II

3. Bezeichnungen und Definitionen

Zu den weiteren Untersuchungen benötigen wir folgende Definitionen:

Definition 3. *Die Matrix $\beta_{mn} = -(v_m, v_n)$ einer g- oder u-Folge nennen wir innerhalb der Zeilen von der Diagonale an monoton abnehmend, wenn*

$$\beta_{mn} \geqq \beta_{m,n+1} \, (m = 0, 1, 2, \ldots; \; n = m+1, m+2, \ldots)$$

gilt. Die Familie dieser Folgen bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_0$ bzw. $\mathfrak{U}_0$.

Definition 4. *Die Matrix $\{\beta_{mn}\}$ einer g- oder u-Folge nennen wir innerhalb der Zeilen monoton abnehmend, wenn*

$$\beta_{m0} \geqq \beta_{m1} \geqq \ldots \geqq \beta_{m,m-1} \geqq \beta_{m,m+1} \geqq \beta_{m,m+2}, \ldots \; (m = 0, 1, 2, \ldots) . \quad (39)$$

Die Familie dieser Folgen bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_1$.

Definition 5. *Die Matrix $\{\beta_{mn}\}$ einer g- oder u-Folge nennen wir längs der Nebendiagonale monoton abnehmend, wenn bei*

$$o + p = m + n = q$$

aus $o > m$ *die Ungleichung*

$$\beta_{op} \leqq \beta_{mn} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt. Die Familie dieser Folgen bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}_2$ *bzw.* $\mathfrak{G}_2$.

Der II. Teil unserer Arbeit ist hauptsächlich der Untersuchung der Frage gewidmet, ob man zu einer gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine u- oder g-Folge konstruieren kann, bei welcher für jedes m

$$s_m > \frac{1}{2} - \varepsilon \,. \tag{40}$$

Die Formel (8) kann mit den in (5) eingeführten Bezeichnungen in der Form

$$2\, s_m \leqq t_m \tag{41}$$

geschrieben werden. Aus (41) folgt, daß auch t_m nahe an 1 heranreicht, wenn s_m nahe bei 1/2 liegt. Es genügt also statt (4) die Frage zu untersuchen, ob für eine u- bzw. g-Folge t_m beliebig nahe an 1 herankommen kann.

Wir werden zeigen, daß es in $\mathfrak{G}_0$ eine Folge gibt, für die $t_m = 1$ für jedes m gilt, wogegen es in $\mathfrak{U}_0$ keine solche Folge gibt. Ferner wird nachgewiesen werden, daß es in der Familie $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_1$ keine Folge gibt, bei der für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ jedes $t_m > 1 - \varepsilon$ ist, und schließlich, daß sich für kein $0 < \varepsilon < 1$ eine Vektorfolge in der Familie $\mathfrak{U}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ findet, für die

$$t_m > 1 - \varepsilon \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{42}$$

gilt.

4. Der Satz über die Familien $\mathfrak{U}_0$ bzw. $\mathfrak{G}_0$

Satz 6. Wenn für eine dem $\mathfrak{G}_0$ zugehörige Folge $t_m = 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *ist, so gilt*

$$\beta_{mn} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } m = 2l \;\; (l = 0, 1, \ldots),\; n = m + 1 \\ 0, \text{ wenn } m = 2l \;\; (l = 0, 1, \ldots),\; n \neq m + 1,\; (n = 0, 1, \ldots) \\ 1, \text{ wenn } m = 2l + 1 \;\; (l = 0, 1, \ldots),\; n = m - 1 \\ 0, \text{ wenn } m = 2l + 1 \;\; (l = 0, 1, \ldots),\; n \neq m - 1,\; (n = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

Beweis. Betrachtet man die Ungleichung (23) und setzt man

$$\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 = t_{mk}\,,$$

so hat man für $m = 0$

$$t_{0k}^2 \leqq t_{0k} - c_{0k},$$

d. h.

$$c_{0k} \leqq t_{0k} - t_{0k}^2 = t_{0k}(1 - t_{0k}) . \tag{43}$$

Im Sinne von (22) ist

$$c_{0k} = 2 \sum_{n=2}^{k} \sum_{p=1}^{n-1} \beta_{0n} \beta_{0p} \beta_{np} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots) . \tag{44}$$

Da $\beta_{mn} \geqq 0$, gilt

$$0 \leqq c_{0k} \leqq c_{0,k+1} . \tag{45}$$

Da aber aus dem Hilfssatz 4 von [1] die Ungleichungen

$$0 \leqq t_{mk} \leqq 1, \quad 0 \leqq t_m \leqq 1 \tag{46}$$

folgen, ist gemäß (43) $c_{0k} \leqq 1$. Daher ist c_{0k} eine monoton zunehmende, von oben beschränkte Folge, die somit einen Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} c_{0k} = c_0$$

hat. Aus (43) folgt bei $k \to \infty$:

$$0 \leqq c_0 \leqq t_0(1 - t_0) . \tag{47}$$

Nach der Voraussetzung des Satzes 6 ist aber $t_m = 1$ $(m = 0, 1, \ldots)$, also auch $t_0 = 1$ und gemäß (47) $c_0 = 0$ und schließlich wegen (45) auch $c_{0k} = 0$. Wegen $\beta_{mn} \geqq 0$ ist, somit auch

$$\beta_{0n} \beta_{0p} \beta_{np} = 0 \quad (p = 1, 2, \ldots; n = p + 1, p + 2, \ldots) .$$

Hieraus erhalten wir für $p = 1$

$$\beta_{01} \beta_{0n} \beta_{1n} = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{48}$$

woraus

$$\beta_{01} \neq 0, \tag{49}$$

da

$$\sum_{n-1}^{\infty} \beta_{0n}^2 = 1$$

und $\{\beta_{0n}\}$ monoton abnehmend ist. Aus (48) folgt also

$$\beta_{0n} \beta_{1n} = 0, \quad \text{wenn} \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{50}$$

Wegen der vorausgesetzten Monotonie der Folge β_{mn} sind jedoch nur die folgenden Fälle denkbar:

Fall 1. Vorausgesetzt, daß

$$\beta_{0n} \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{51}$$

folgt aus (50)

$$\beta_{1n} = 0, \; (n = 2, 3, \ldots)$$

d. h. wegen $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(1)} \beta_{1n}^2 = 1$ gilt

$$\beta_{10} = \beta_{01} = 1. \tag{52}$$

Gemäß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2 = 1$ und (52) ist

$$\beta_{0n} = 0, \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{53}$$

was jedoch der Beziehung (51) widerspricht. Der erste Fall ist also nicht möglich.

Fall 2. Setzen wir voraus, daß in (50)

$$\beta_{0n} \neq 0 \; (n = 1, 2, \ldots, l), \; \beta_{0n} = 0 \; (n = l+1, \; l+2, \ldots). \tag{54}$$

Für $l \geqq 2$ hat man dann

$$\beta_{1n} = 0 \; (n = 2, 3, \ldots, l), \; \beta_{1n} \geqq 0 \; (n = l+1, \; l+2, \ldots). \tag{55}$$

Wäre $\beta_{1n} > 0$ für $n = l+1, \; l+2, \; l+3, \ldots$, wäre $\{\beta_{1n}\}$ im Sinne von (55) innerhalb der Zeilen von der Diagonale an nicht monoton abnehmend. Folglich gilt in (55)

$$\beta_{1n}^2 = 0 \; (n = 2, \; 3, \ldots). \tag{56}$$

Aus $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(1)} \beta_{1n}^2 = 1$ folgt dann

$$\beta_{10} = \beta_{01} = 1, \tag{57}$$

d. h. nach (54)

$$\beta_{0n} = 0 \; (n = 2, \; 3, \ldots). \tag{58}$$

Mithin ist nur $l = 1$ möglich, und dann ergeben sich die Beziehungen (57), (58) und aus diesen (56).

Fall 3. Wäre in (50) die monotone Abnahme von der Diagonale an angenommen, wäre außer den schon betrachteten Fällen nur $\beta_{0n} = 0 \; (n = 1, 2, \ldots)$ möglich, dieser Fall ist *jedoch* wegen (49) *unmöglich.*

Da somit nur der Fall 2 möglich sein kann, bedeuten die Beziehungen (56), (57) und (58), daß der Satz 6 für das Vektorpaar v_0 und v_1 schon bewiesen ist. Wenn wir die Vektoren v_0 und v_1 aus der gegebenen g-Folge weglassen, so genügt auch die Teilfolge $v_2, v_3, v_4, \ldots$ den Voraussetzungen des Satzes 6, wie dies aus der Matrix

$$\left.\begin{matrix} \beta_{22}, & \beta_{23}, & \beta_{24}, & \ldots \\ \beta_{32}, & \beta_{33}, & \beta_{34}, & \ldots \\ \beta_{42}, & \beta_{43}, & \beta_{44}, & \ldots \end{matrix}\right\} \tag{59}$$

ersichtlich ist.

5. Sätze über die Familien $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_1$

Satz 7. *Ist* $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, *kann man keine Vektorfolge in der Familie* $\mathfrak{G}_1$ *bzw.* $\mathfrak{U}_1$ *konstruieren, bei welcher*

$$t_m > 1 - \varepsilon \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{60}$$

gilt.

Beweis. Es sei vorläufig $0 < \varepsilon < 1$, und überdies vorausgesetzt, daß es eine Vektorfolge in der Familie $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_1$ gibt, die (60) genügt. Nach der Voraussetzung gemäß (60) gilt

$$\left.\begin{matrix} \beta_{01}^2 + \beta_{02}^2 + \ldots & > 1 - \varepsilon \\ \beta_{10}^2 + \beta_{12}^2 + \ldots & > 1 - \varepsilon \\ \vdots & \\ \beta_{l-1,0}^2 + \beta_{l-1,1}^2 + \ldots & > 1 - \varepsilon \end{matrix}\right\}. \tag{61}$$

Wenn wir die entsprechenden Seiten in (61) addieren, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} l(1-\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2 + \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(1)} \beta_{1n}^2 + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(l-1)} \beta_{l-1,n}^2 = (\beta_{01}^2 + \beta_{10}^2 + \\ \ldots + \beta_{l-1,0}^2) + (\beta_{02}^2 + \beta_{12}^2 + \ldots + \beta_{l-1,2}^2) + \ldots + \\ + (\beta_{0n}^2 + \beta_{1n}^2 + \ldots \beta_{l-1,n}^2) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

weil bei Summierung endlich vieler Reihen in (62) nach dem bekannten Satz eine gliedweise Addition vorzunehmen ist. Da in (62) jedes Kammerglied dasselbe Vorzeichen hat, gilt (siehe FICHTENGOLZ: Differential- und Integralrechnung — 1948, russische Ausgabe, Band II. S. 363)

$$\begin{aligned} (\beta_{01}^2 + \ldots + \beta_{l-1,0}^2) + (\beta_{02}^2 + \ldots + \beta_{l-1,2}^2) + \ldots + (\beta_{0n}^2 + \ldots + \beta_{l-1,n}^2) = \\ = \beta_{01}^2 + \ldots + \beta_{l-1,0}^2 + \beta_{02}^0 + \beta_{12}^2 + \ldots + \beta_{l-1,n}^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{63}$$

Nun ist (63) eine absolut konvergente Reihe, weswegen ihre Summe der Summe der folgenden, endlich vielen Reihen gleich ist (siehe GREBENTSCHA—NOWOSELOW: Mathematische Analysis — 1952 ungarische Ausgabe, Bd. II, S. 248), die entstehen, wenn man in (61) erstens die erste Zeile und die erste Kolonne summiert, danach die übriggebliebene zweite Zeile und zweite Kolonne usw. Mithin ist (63) gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2 + \sum_{n=1}^{l-1} \beta_{n0}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{1n}^2 + \sum_{n=2}^{l-1} \beta_{n1}^2 + \dots +$$
$$+ \sum_{n=l-1}^{\infty} \beta_{l-2,n}^2 + \beta_{l-1,l-2}^2 + \sum_{n=l}^{\infty} \beta_{l-1,n}^2 \, .$$

Mit der Gleichung $\beta_{mn} = \beta_{nm}$ erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} l(1-\varepsilon) < \left(\sum_{n=1}^{l-1} \beta_{0n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2\right) + \left(\sum_{n=2}^{l-1} \beta_{1n}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{1n}^2\right) + \dots \\ + \left(\sum_{n=l-1}^{l-1} \beta_{l-2,n}^2 + \sum_{n=l-1}^{\infty} \beta_{l-2,n}^2\right) + \sum_{n=l}^{\infty} \beta_{l-1,n}^2 . \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Aus (56) folgt

$$0 \leqq \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 \leqq 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \, ,$$

weshalb sich aus (64):

$$l(1-\varepsilon) < 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{2n}^1 + \dots + \sum_{n=l}^{\infty} \beta_{l-1,n}^2\right)$$

ergibt. Somit gilt

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \beta_{1n}^2 + \dots + \sum\limits_{n=l}^{\infty} \beta_{l-1,n}^2}{l} \, . \tag{65}$$

Die Glieder im Zähler der rechten Seite von (65) bilden eine monoton abnehmende Folge. Es ist leicht einzusehen, daß

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^2 > \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \, . \tag{66}$$

Um (66) beweisen zu können, führen wir den folgenden Hilfssatz ein:

Wenn es eine positive, monoton abnehmende Folge a_n gibt und wenn es zutrifft daß

$$\frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{l-1}}{l} > c > 0, \quad (l = 1, 2, 3, \dots) \, , \tag{67}$$

dann gilt auch

$$a_{l-1} > c \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{68}$$

Um den Hilfssatz zu beweisen, sei indirekt angenommen, daß

$$a_{l-1} < c, \quad \text{wenn} \quad l - 1 > N. \tag{69}$$

Trifft dies zu, erhält man

$$\frac{(a_0 + a_1 + \ldots + a_N) + (a_{N+1} + \ldots + a_{l-1})}{l} < \frac{x + (l - N)\, a_{N+1}}{l} < c, \tag{70}$$

wo

$$\sum_{l=1}^{N+1} a_{l-1} = x\,. \tag{71}$$

Die zweite Ungleichung besteht in (70), wenn

$$x + (l - N)\, a_{N+1} < lc$$

$$x - N\, a_{N+1} < l\,(c - a_{N+1})\,.$$

Wegen (69) ist jedoch

$$\frac{x - N\, a_{N+1}}{c - a_{N+1}} < l.$$

Wenn man die linke Seite der Bezeichnung (71) benützt, erhält man

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_N - N a_{N+1}}{c - a_{N+1}} < l.$$

Dieser Bruch ist positiv, so daß, wie aus (70) hervorgeht, das arithmetische Mittel (67) für diese l kleiner wäre als c, was aber nicht der Fall sein kann.

Die Ungleichung (66) erhält man, wenn man in der Formel (65) den Hilfssatz der Seite 15 mit der Bezeichnung

$$c = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad a_{k-1} = \sum_{n=k}^{\infty} \beta^2_{k-1,n}\,,$$

wo $k = 1, 2, 3, \ldots, l$, anwendet.

Gemäß (46) und (47) ergibt sich aus $t_0 > 1 - \varepsilon$ für eine u- oder g-Folge $c_0 \leqq \varepsilon$. Nach (44) ist aber

$$c_0 = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \beta_{0p}\, \beta_{0n}\, \beta_{np} = 2 \Bigg(\beta_{01} \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{0n}\, \beta_{1n} + \beta_{02} \sum_{n=3}^{\infty} \beta_{0n}\, \beta_{n2} + \ldots +$$

$$+ \beta_{0p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \beta_{0n}\, \beta_{np} + \ldots\Bigg) \leqq \varepsilon\,.$$

Mit der Beziehung $\beta_{mn} = \beta_{nm}$ haben wir bei Beachtung von (39)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \geqq c_0 = 2 \Big(\beta_{01} \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{n0}\beta_{n1} + \beta_{02} \sum_{n=3}^{\infty} \beta_{n0}\beta_{n2} + \dots + \beta_{0p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \beta_{n0}\beta_{np} + \\ + \dots \Big) \geqq 2 \Big(\beta_{01} \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{n1}\beta_{n2} + \beta_{0p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \beta_{n0}\beta_{np} + \dots \Big). \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Somit nimmt (72) die Form

$$\varepsilon \geqq 2 \Big(\beta_{01} \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{n1}^2 + \beta_{02} \sum_{n=3}^{\infty} \beta_{n2}^2 + \dots + \beta_{0p} \sum_{n=p+1}^{\infty} \beta_{np}^2 + \dots \Big) \quad (73)$$

an. Führen wir in (73) statt der Größen in der Klammer kleinere ein, erhalten wir

$$\varepsilon \geqq 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) (\beta_{01} + \beta_{02} + \dots + \beta_{0p} + \dots) = (1-\varepsilon) \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{0p}. \quad (74)$$

Aus $0 \leqq \beta_{mn} \leqq 1$ folgt aber, daß

$$\varepsilon \geqq (1-\varepsilon) \sum_{p=1}^{\infty} \beta_{0p}^2,$$

gemäß (61) also

$$\varepsilon > (1-\varepsilon)^2. \quad (75)$$

Diese Ungleichung ist unmöglich, wenn

$$0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

ist.

Damit ist der Beweis für den Satz 7 erbracht.

Es sei eine u- oder g-Folge mit A bezeichnet und $\{t_m\}$ sei die der Vektorenfolge A zugehörige Zahlenfolge.

Korollarium 1. *Wenn die Vektorfolge* A *der Familie* $\mathfrak{U}_1$ *oder* $\mathfrak{G}_1$ *angehört, so gibt es unbedingt ein Glied* t_l *der entsprechenden Zahlenfolge* $\{t_m\}$, *für welches*

$$t_l \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

gilt.

Beweis. Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ergibt sich das Korollarium 1 sogleich.

Korollarium 2. *Wenn die Vektorfolge* A *der Familie* $\mathfrak{U}_1$ *oder* $\mathfrak{G}_1$ *angehört, so gibt es bestimmt ein Glied* s_k *der entsprechenden Zahlenfolge* $\{s_m\}$, *für welches*

$$s_k \leqq \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

gilt.

Beweis. Das Korollarium 2 folgt gemäß (41) aus dem Korollarium 1.

Korollarium 3. *Wenn* $\varepsilon > 0$ *eine beliebig kleine Zahl ist, findet sich keine Vektorfolge* A, *für die*

$$s_m > \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad (m = 0, 1, \dots)$$

wäre.

Korollarium 4. *Wenn eine Vektorfolge* A *der Familie* $\mathfrak{U}_1$ *oder* $\mathfrak{S}_1$ *angehört und die Ungleichung*

$$t_m > 1 - \varepsilon \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

für ein vorgegebenes $0 < \varepsilon < 1$ *gilt, sind schon die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \qquad (m = 0, 1, \dots)$$

konvergent.

Beweis. Aus (74) folgt, daß

$$\varepsilon \geqq (1 - \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}.$$

Wegen $0 < \varepsilon < 1$ ist

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}. \tag{76}$$

Ferner behaupten wir, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn} \geqq \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m+1)} \beta_{m+1,n} \qquad (m = 0, 1, \dots). \tag{77}$$

Tatsächlich gilt wegen der Definition 4 und der Beziehung

$$\beta_{mn} = \beta_{nm}:$$

$$\beta_{mn} \geqq \beta_{m+1,n}\, (n = 0, 1, \dots, m-1, m+2, m+3, \dots).$$

Ferner ist

$$\beta_{m,m+1} = \beta_{m+1,m}$$

woraus folgt, daß aus (76) und (77)

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n} \geqq \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn} \ (m = 1, 2, \dots).$$

Damit ist Beweis für das Korollarium 4 erbracht.

6. Ein Satz über die Familie $\mathfrak{U}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_2$

Satz 8. *Wenn die Vektorfolge* A *der Familie* $\mathfrak{U}_2$ *bzw.* $\mathfrak{G}_2$ *angehört, ist*

$$\lim_{m\to\infty} t_m = 0.$$

Beweis. Definitionsgemäß ist

$$t_m = \beta_{m0}^2 + \beta_{m1}^2 + \ldots + \beta_{m,m-1}^2 + \beta_{m,m+1}^2 + \ldots .$$

Diese Beziehung kann wegen der kommutativen Eigenschaft $\beta_{mn} = \beta_{nm}$ $(n \neq m)$ in der Form

$$t_m = \beta_{0m}^2 + \beta_{1m}^2 + \beta_{2m}^2 + \ldots + \beta_{m-1,m}^2 + \beta_{m+1,m}^2 + \ldots$$

geschrieben werden. Aus den Beziehungen

$$\beta_{nm} \leqq \beta_{0,n+m} ,$$

hat man jedoch die Ungleichung

$$t_m \leqq \beta_{0m}^2 + \beta_{0,m+1}^2 + \beta_{0,m+2}^2 + \ldots .$$

Wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{0n}^2$$

folgt offenbar

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \beta_{0n}^2 = 0 .$$

Damit ist der Beweis für den Satz 8 erbracht.

Bemerkung 2. Wir bemerken, daß

$$\lim_{m\to\infty} t_m = 0$$

nicht für jede u- oder g-Folge gilt. Betrachtet man nämlich die Vektorfolge

$$\left.\begin{array}{l} v_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, \ldots\right) \\ v_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots\right) \\ v_2\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots\right) \\ v_3\left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (78)$$

die offensichtlich eine g-Folge ist, so gilt für diese

$$t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (v_0, v_n)^2 = (v_0, v_1)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} (v_m, v_n)^2 = (v_m, v_{m-1})^2 + (v_m, v_{m+1})^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Es gilt also tatsächlich $\lim_{m\to\infty} t_m \neq 0$.

Zum Schluß möchte ich den Herren Prof. G. Alexits, Prof. Á. Császár und Prof. P. Erdős für ihre bereitwillige und freundliche Hilfe bei Fertigstellung dieser Arbeit meinen aufrichtigen Dank sagen.

Literatur

1. KONCZ, K.: Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes, MTA. Mat. Int. Közleményei V, A. 3. 255—264 (1960).
2. RÉNYI, A.: Bemerkung zur Arbeit »Über gewisse Elementenfolgen des Hilbertschen Raumes« von K. KONCZ, MTA. Mat. Int. Közleményei V, A. 3., 265—267 (1960).

Zusammenfassung

Es werden die Bezeichnungen von [1] aufgeschrieben und dazu wird die neue Bezeichnung $t_m = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ eingeführt. Sodann werden einige Vektorfolgen-Klassen definiert. Verfasser untersucht die Frage, ob zu einer beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Vektorfolge so angegeben werden kann, daß $s_m > \frac{1}{2} - \varepsilon$ $(m = 0, 1, \ldots)$ sei. Ferner analysiert er ausführlich gewisse, in [1] berührte Zusammenhänge Wenn s_m nahe an 1/2 heranreicht, liegt auch t_m nahe an 1. Im zweiten Teil der Arbeit wird die Approximation in den verschiedenen Klassen analysiert.

Károly KONCZ, Budapest XI., Sztoczek u. 2. Ungarn