ASYMPTOTISCHE UNTERSUCHUNG EINES RETARDIERTEN INTEGRALGLEICHUNGSSYSTEMS

Von

T. Frey

Lehrstuhl für Mathematik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. Februar 1960)

1. §. Einführung

In Zusammenhang mit der Zählung von Korpuskeln benötigt man das retardierte Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} Em_1(E) &= \int_0^E m_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_0^{E-E_d} m_1(\varepsilon)\, d\varepsilon \\ Em_2(E) &= \int_0^E m_2(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_0^{E-E_d} m_2(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_0^{E-E_d} m_1(E-E_d-\varepsilon)\, m_1(\varepsilon)\, d\varepsilon \\ Em_3(E) &= \int_0^E m_3(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_0^{E-E_d} m_3(\varepsilon)\, d\varepsilon + 2\int_0^{E-E_d} m_2(E-E_d-\varepsilon)\, m_1(\varepsilon)\, d\varepsilon \end{aligned} \tag{1.1}$$

und allgemein ($k = 1, 2, \ldots$)

$$Em_k(E) = \int_0^E m_k(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_0^{E-E_d} m_k(\varepsilon)\, d\varepsilon + (k-1)\int_0^{E-E_d} m_{k-1}(E-E_d-\varepsilon)\, m_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

mit den Anfangsbedingungen

$$m_k(E) \equiv \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad E < 0 \\ 1, & \text{falls} \quad 0 \leq E \leq E_d \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

Da man für die Momente $m_k(E)$ eine Lösung in geschlossener Form nicht erwarten kann, befriedigt uns eine asymptotische Entwicklung dieser Momente mit möglichts kleinem Fehlerglied.

Wir führen nun die »reduzierte Energie«

$$x = \frac{E}{E_d} \tag{1.3}$$

als neue unabhängige bzw. die Funktionen

$$y_k(x) = m_k(E_d\, x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

als neue abhängige Veränderliche ein und bezeichnen weiters den »Einheitssprung« mit I:

$$I(x) \equiv \begin{cases} 0\,, & \text{falls} \quad x < 0 \\ 1\,, & \text{falls} \quad x \geq 0\,, \end{cases} \tag{1.5}$$

die »Einheits-Verschiebung« nach »rechts« hingegen mit dem linksseitig unten stehenden Index δ:

$$u(x-a) = {}_{a\delta}u(x)\,, \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1,6}$$

und schließlich die Konvolutionsoperation mit :

$$w(x) = u(x) * v(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x-\tau)\, v(\tau)\, d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, v(x-\tau)\, d\tau\,. \tag{1.7}$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen kann man dem betrachteten System die Form

$$xy_k(x) = [I(x) + {}_{\delta}I(x)] * y_k(x) + (k-1)\, {}_{\delta}y_{k-1}(x) * y_1(x)\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

$$y_k(x) \equiv I(x)\,, \quad \text{falls} \quad x \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

geben.

2. §. Transformation des ursprünglichen Systems

Wir zeigen nun vor allem, daß das System (1.8)—(1.9) mit demselben, aber isoliert behandelbaren, homogenen

$$xy_k(x) = [I(x) + k \cdot {}_{\delta}I(x)] * y_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

$$y_k(x) \equiv I(x)\,, \quad \text{falls} \quad x \leq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

äquivalent ist.

Hierzu sei zunächst bemerkt, daß die Funktion $y_k(x)$ und ihre Laplacetransformierte, $\eta_k(p)$ einander ein-eindeutig zugeordnet sind, da $y_k(x)$ stetig und monoton in $x \geq 0$ ist, weiter da $y_k(x)$ durch die Funktion e^{kx} majorisiert wird [s. die Gleichungen (3.1)—(4.9)]. Es sei also

$$\mathscr{L}\{y_k(x)\} = \int_0^{\infty} y_k(x)\, e^{-px}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} y_k(x)\, e^{-px}\, dx = \eta_k(p)\,. \tag{2.3}$$

Gemäß (1.8)—(1.9) befriedigt die Funktion $\eta_1(p)$ die Gleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_1 = \frac{1+e^{-p}}{p}\eta_1, \tag{2.4}$$

man erhält somit für η_1

$$\eta_1(p) = C.\frac{1}{p}\exp\left\{-\int_1^p \frac{d\tau}{\tau} + \int_0^p \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau\right\}. \tag{2.5}$$

C läßt sich mit Hilfe der Abel-Tauberschen Sätze ermitteln; der Gleichung

$$\lim_{p\to\infty} p\eta_1(p) = \lim_{x\to 0+0} y_1(x) = 1 \tag{2.6}$$

gemäß gilt die Relation

$$C = \exp\left\{\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} - \int_0^\infty \frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau\right\} = e^{-\gamma}, \tag{2.7}$$

in der γ die sogenannte Eulersche Konstante ist.

Gemäß (1.8)—(1.9) befriedigt $\eta_2(p)$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_2 = \frac{1+e^{-p}}{p}\eta_2 + e^{-p}\eta_1\,\eta_1 = \frac{1+e^{-p}}{p}\eta_2 + e^{-p}\eta_1^2. \tag{2.8}$$

Für den homogenen Teil dieser Gleichung erhält man die Lösung

$$(\eta_2)_{\mathrm{I}} = C_1\cdot\eta_1(p), \tag{2.9}$$

die Lösung des inhomogenen Teiles sucht man also in der Form

$$(\eta_2)_{\mathrm{II}} = C_2(p).\eta_1(p). \tag{2.10}$$

Setzt man (2.10) in (2.8) ein, so hat man

$$-\eta_1\frac{d}{dp}C_2 = e^{-p}\cdot\eta_1^2,$$

d. h.

$$\frac{d}{dp}C_2 = -e^{-p}\cdot\eta_1, \tag{2.11}$$

gemäß (2.4) hingegen ist

$$-e^{-p}\cdot\eta_1=\eta_1+p\frac{d}{dp}\eta_1=\frac{d}{dp}(p\cdot\eta_1), \tag{2.12}$$

somit

$$C_2(p)=p.\eta_1,$$

also

$$\eta_2(p)=C_1\cdot\eta_1+p\cdot\eta_1^2.$$

Wendet man hier die Abel-Tauberschen Sätze wieder an, so folgt $C_1=0$, d. h. es wird

$$\eta_2(p)=p\cdot\eta_1^2. \tag{2.13}$$

Es sei noch bemerkt, daß

$$\mathscr{L}\{{}_\delta I*\eta_2\}=\frac{e^{-p}}{p}p\,\eta_1^2=e^{-p}\cdot\eta_1^2=a\{{}_\delta y_1*y_1\}, \tag{2.14}$$

d. h. daß

$${}_\delta y_1*y_1={}_\delta I*y_2 \tag{2.15}$$

gilt, daß also η_2 die Gleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_2=\frac{1+2e^{-p}}{p}\eta_2 \tag{2.16}$$

d. h. $y_2(x)$ die Gleichung

$$xy_2(x)=[I+2\,{}_\delta I]*y_2 \tag{2.17}$$

befriedigt. Betrachten wir nun die Gleichung für $\eta_3(p)$

$$-\frac{d}{dp}\eta_3=\frac{1+e^{-p}}{P}\eta_3+2\,e^{-p}\cdot\eta_2\cdot\eta_1. \tag{2.18}$$

Bedient man sich desselben Verfahrens wie früher, so erhält man

$$\eta_3=(\eta_3)_{\mathrm{I}}+(\eta_3)_{\mathrm{II}};\ (\eta_3)_{\mathrm{I}}=C_3\cdot\eta_1;\ (\eta_3)_{\mathrm{II}}=C_4(p)\cdot\eta_1, \tag{2.19}$$

$$-\eta_1\frac{d}{dp}C_4=2e^{-p}\eta_2\cdot\eta_1;\frac{d}{dp}C_4=-2e^{-p}\cdot\eta_2. \tag{2.20}$$

Hieraus ist gemäß (2.16)

$$-2e^{-p}\cdot\eta_2=\eta_2+p\frac{d}{dp}\eta_2=\frac{d}{dp}(p\eta_2), \tag{2.21}$$

d. h.

$$C_4=p\cdot\eta_2;\ \eta_3=C_3\cdot\eta_1+p\eta_1\eta_2. \tag{2.22}$$

Den Abel-Tauberschen Sätzen gemäß folgt nun wieder $C_3=0$, also wird

$$\eta_3=p\cdot\eta_1\cdot\eta_2\,. \tag{2.23}$$

Da nun

$$\mathscr{L}\left\{{}_{\delta}I*\ y_3\right\}=\frac{e^{-p}}{p}\,p\cdot\eta_1\cdot\eta_2=e^{-p}\,\eta_1\,\eta_2=\alpha\left\{{}_{\delta}y_2*\ y_1\right\}, \tag{2.24}$$

wird

$${}_{\delta}y_2*\ y_1={}_{\delta}I*\ y_3\,, \tag{2.25}$$

d. h. y_3 befriedigt mithin auch die Gleichung

$$xy_3(x)=[I+3_{\delta}I]*\ y_3(x)\,, \tag{2.26}$$

bzw. η_3 die Gleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_3=\frac{1+3e^{-p}}{p}\,\eta_3. \tag{2.27}$$

Es sei nun vorausgesetzt, daß wir schon für $k=1,2,\ldots,n$ die Äquivalenz des Systems (1.8)—(1.9) und (2.1)—(2.2), weiter auch die Relationen

$$\eta_k=p\cdot\eta_{k-1}\cdot\eta_1 \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{2.28}$$

bewiesen haben. Es zeigt sich dann, daß sie auch für $k=n+1$ Gültigkeit hat. η_{n+1} befriedigt gemäß (1.8)—(1.9) die Gleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_{n+1}=\frac{1+e^{-p}}{p}\,\eta_{n+1}+ne^{-p}\cdot\eta_n\,\eta_1. \tag{2.29}$$

Wir benützen jetzt wieder das gutbekannte Verfahren:

$$\eta_{n+1}=(\eta_{n+1})_{\mathrm{I}}+(\eta_{n+1})_{\mathrm{II}}\,;\ (\eta_{n+1})_{\mathrm{I}}=C_5\,\eta_1;\ (\eta_{n+1})_{\mathrm{II}}=C_6(p)\cdot\eta_1. \tag{2.30}$$

$$-\eta_1\frac{d}{dp}C_6=n\eta_n\cdot\eta_1\cdot e^{-p};\ \frac{d}{dp}C_6=-n\cdot e^{-p}\cdot\eta_n. \tag{2.31}$$

Der Voraussetzung gemäß befriedigt η_n die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_n = \frac{1+ne^{-p}}{p}\eta_n, \tag{2.32}$$

somit gilt auch die Gleichung

$$-ne^{-p}\cdot\eta_n = \eta_n + p\frac{d}{dp}\eta_n = \frac{d}{dp}(p\eta_n), \tag{2.33}$$

d. h.

$$C_6 = p\eta_n;\ \eta_{n+1} = C_5\cdot\eta_1 + p\cdot\eta_n\cdot\eta_1 . \tag{2.34}$$

Aus den Abel-Tauberschen Sätzen folgt, daß
$C_5 = 0$ und somit

$$\eta_{n+1} = p.\eta_n\cdot\eta_1 . \tag{2.35}$$

Da weiter

$$\mathscr{L}\left\{{}_\delta I * y_{n+1}\right\} = \frac{e^{-p}}{p}p\cdot\eta_n\cdot\eta_1 = e^{-p}\eta_n\cdot\eta_1 = \alpha\left\{{}_\delta y_n * y_1\right\} \tag{2.36}$$

d. h.

$${}_\delta I * y_{n+1} = {}_\delta y_n * y_1 \tag{2.37}$$

befriedigt y_{n+1} die Gleichung

$$xy_{n+1}(x) = [I + (n+1)\ {}_\delta I] * y_{n+1}(x) \tag{2.38}$$

d. h. η_{n+1} die Gleichung

$$-\frac{d}{dp}\eta_{n+1} = \frac{1+(n+1)e^{-p}}{p}\eta_{n+1}, \tag{2.39}$$

w. z. b. w.

3. §. Über die exakten Lösungen

Aus dem Gleichungssystem (1.8) bzw. (2.1) folgt, daß die Funktionen $y_k(x)$ für $x > 0$ differenzierbar sind. Deriviert man (2.1), so bekommt man das retardierte Differentialgleichungssystem

$$xy_k'(x) = ky_k(x-1). \qquad (x > 0; k = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Das exakte Lösungssystem erhält man also sogleich durch sukzessive Integration, und zwar z. B.

$$y_k(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + k \log x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 + k \log x + k \int\limits_0^x \frac{\log(\xi - 1)}{\xi} \, d\xi = \\ \quad = 1 + k \log x + k \, [Li(x-1) - Li(1)], & \text{für } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 + k \log x + k \, [Li(x-1) - Li(1)] + \\ \quad + k \int\limits_3^x \frac{Li(\xi - 2) - Li(1)}{\xi} \, d\xi\,, & \text{für } 3 \leq x \leq 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{3.2}$$

mit

$$Li(x) = \int\limits_0^x \frac{\log t}{t+1} \, dt\,. \tag{3.3}$$

4. §. Asymptotische Entwicklung

Die Asymptotik der Funktionen $y_k(x)$ läßt sich nach de Bruin [1] sowie der Form (3.1) des Gleichungssystems (1.8) gemäß angeben. Hierzu muß man eine partikulare Lösung der Gleichung (3.1) angeben, die man in der Form

$$Y_k = \frac{x^k}{k!} + B_{k-1}^{(k)} \cdot x^{k-1} + B_{k-2}^{(k)} \cdot x^{k-2} + \ldots + B_1^{(k)} \cdot x + B_0^{(k)} \tag{4.1}$$

zu suchen hat. Durch Einsetzen folgen die Gleichungen

$$\begin{gathered} x \left[k \frac{x^{k-1}}{k!} + (k-1) \, B_{k-1}^{(k)} \, x^{k-2} + \ \ldots \ + B_1^{(k)} \right] \equiv \\ \equiv k \left[\frac{(x-1)^k}{k!} + B_{k-1}^{(k)} (x-1)^{k-1} + \ldots + B_1^{(k)} (x-1) + B_0^{(k)} \right] \end{gathered} \tag{4.2}$$

d. h.

$$(k-1) \, B_{k-1}^{(k)} = - k \frac{k}{k!} + k B_{k-1}^{(k)}; \; B_{k-1}^{(k)} = \frac{k}{(k-1)!} = \frac{k^2}{k!} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} (k-2) \; B_{k-2}^{(k)} = k \, \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \frac{k}{k!} - k_{k-1}^{(k)} \cdot (k-1) + k \, B_{k-2}^{(k)}; \; B_{k-2}^{(k)} = \\ = \frac{k^2 (k-1) \; (2k-1)}{4 \cdot k!} \end{gathered} \tag{4.4}$$

usw. d. h.

$$Y_k = \frac{1}{k!}\left\{x^k + k^2\,x^{k-1} + \frac{k^2(k-1)(2k-1)}{4}\,x^{k-2} + \dots\right\}. \tag{4.5}$$

$y_k(x)$ besitzt also eine Asymptotik der Form

$$y_k(x) \sim A_k \cdot Y_k(x)\,, \tag{4.6}$$

wo A_k durch das Anfangsintervall bestimmt ist und mit Hilfe der Abel-Tauberschen Sätze zu zählen ist:

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{p\to+\infty} p\cdot\eta_k(p) = \lim_{p\to\infty} p\cdot p\cdot\eta_{k-1}\cdot\eta_1 = \lim_{p\to+\infty} p^2\cdot p\cdot\eta_{k-2}\cdot\eta_1^2 = \\ &= \lim_{p\to+\infty} p^3\cdot\eta_{k-2}\cdot\eta_1^2 = \dots = \lim_{p\to\infty} p^k\cdot\eta_1^k = (\lim_{p\to+\infty} p\eta_1)^k = e^{-\gamma k}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Das Restglied der asymptotischen Gleichung (4.6) kann man nach de Bruin folgendermaßen angeben. Die Lösung der Gleichung (3.1) soll in der Form

$$y_k(x) = f_k(x)\cdot Y_k(x) \tag{4.8}$$

gesucht werden. $f_k(x)$ befriedigt dann die Gleichung

$$\frac{Y_k(x)}{Y_k'(x)}\,f_k'(x) + f_k(x) - f_k(x-1) = 0\,. \tag{4.9}$$

De Bruin hat gezeigt, daß $f_k(x)$ gegen $A_k = e^{-\gamma k}$ strebt. $f_k(x)$ selbst besitzt im Intervall $[0;\,1]$ die Form

$$f_k(x) = \frac{1}{Y_k(x)} \qquad (0 \le x \le 1)\,, \tag{4.10}$$

und hat hier den maximalen bzw. minimalen Wert Φ_k bzw. φ_k, also die Oszillation

$$\delta_k = \Phi_k - \varphi_k\,. \tag{4.11}$$

De Bruin hat auch nachgewiesen, daß

$$\varphi_k < A_k = e^{-\gamma k} < \Phi_k \tag{4.12}$$

gültig ist, woraus die Gültigkeit von

$$|f_k(x) - A_k| < \delta_k \qquad \text{in } 0 \le x \le 1 \tag{4.13}$$

folgt, oder allgemeiner, für $n \leq x \leq n+1$ hat die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|f_k(x) - A_k| &\leq \delta_k \prod_{\nu=1}^{n} \left\{1 - \exp\left[-\int_{\nu}^{\nu+1} \frac{Y_k'(x)}{Y_k(x)}\, dx\right]\right\} = \\
&= \delta_k \prod_{\nu=1}^{n} \left[1 - \frac{Y_k(\nu)}{Y_k(\nu+1)}\right] = \delta_k \Phi_k(n)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Gültigkeit. Wir werden nun

$$
\Phi_k(n) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{Y_k(\nu+1) - Y_k(\nu)}{Y_k(\nu+1)}
\tag{4.15}
$$

abschätzen. Dem Mittelwertsatz gemäß gilt

$$
Y_k(\nu+1) - Y_k(\nu) = Y_k'(\nu+\vartheta_\nu)
\tag{4.16}
$$

mit $0 < \vartheta_\nu < 1$; im Sinne von (3.1) gilt weiter [da auch Y_k die Gleichung (3.1) befriedigt]

$$
Y_k'(\nu+\vartheta_\nu) = \frac{k}{\nu+\vartheta_\nu}\, Y_k(\nu - 1 + \vartheta_\nu)\,.
\tag{4.17}
$$

Um nun zu beweisen, daß Y_k für $0 \leq x$ streng monoton wachsend, und daß weiter $0 < Y_k(0)$ gültig ist, genügt es zu sehen, daß in $0 \leq x \leq 1$ $Y_k(x) > 0$ ist, denn Y (3.1) befriedigt. Es sei deshalb zunächst bemerkt, daß der eine Abstand zwischen zwei nachfolgenden Nullstellen von $Y_k(x)$ in $X \leq 0$ größer als 1 sein soll, weil Y_k die Gleichung (3.1) befriedigt, und somit Y_k für $X \leq 0$ in $X - \xi_0$ wächst, sofern $Y_k\,(\xi_0 - 1)$ negativ war und umgekehrt. Y_k besitzt weiter in $X = -1$ eine Nullstelle da Y_k Polynom, also regulär sein soll, und im Sinne von (3.1)

$$
\lim_{x \to 0} \frac{k\, Y_k(x-1)}{x}
$$

existieren muß. Y_k besitzt also in $-1 < x \leq 0$ keine weitere Nullstellen. Wäre die Funktion hier überall negativ, so wäre Y_k' in $[0, 1]$ gleichfalls überall negativ, d. h. auch Y_k wäre überall negativ, und weiters wäre gemäß (3.1) Y_k für $0 \leq x$ überall negativ, dies aber widerspricht (4.7). Y_k ist also in $-1 \leq x \leq 0$ überall positiv, ebenso Y_k' in $0 \leq x \leq 1$, d. h. auch Y_k in $0 \leq$ $\leq x \leq 1$, w. z. b. w. Demnach ist aber Y_k streng monoton für $0 \leq x$, und es gilt die Abschätzung

$$
\frac{Y_k(\nu - 1 + \vartheta_\nu)}{Y_k(\nu)} < 1\,.
\tag{4.18}
$$

Im Sinne von (4.16)—(4.17)—(4.18) gilt also

$$\Phi_k(n) \leq \prod_{\nu=1}^{n} \frac{k}{\nu + \vartheta_\nu} \leq \frac{k^n}{\Gamma(n+1)}, \tag{4.19}$$

und man hat damit die Abschätzung

$$|f_k(x) - A_k| \leq \delta_k \frac{k^n}{\Gamma(n+1)}, \quad (n \leq x \leq n+1), \tag{4.20}$$

d. h.

$$|y_k(x) - A_k Y_k(x)| \leq \frac{\delta_k \cdot k^n \cdot |Y_k(x)|}{\Gamma(n+1)}, \quad (n \leq x \leq n+1), \tag{4.21}$$

also endlich die asymptotische Entwicklung

$$y_k(x) = e^{-\gamma k} \cdot Y_k(x) + O\left(\frac{\delta_k \cdot k^n \cdot |Y_k(x)|}{\Gamma(n+1)}\right), \quad (n \leq x \leq n+1) \tag{4.22}$$

bzw.

$$m_k(E) = e^{-\gamma k} \cdot Y_k\left(\frac{E}{E_d}\right) + O\left(\frac{\delta_k \cdot k^n \cdot \left|Y_k\left(\frac{E}{E_d}\right)\right|}{\Gamma(n+1)}\right) \tag{4.23}$$

für $nE_d \leq E \leq (n+1) E_d$.

Zusammenfassung

Die Studie gibt eine tiefreifende asymptotische Analyse (mit gut brauchbaren Hinweisen auf die numerische Analyse) des retardierten Integralgleichungssystems

$$xy_k(x) = \int_0^x y_k(\xi)\, d\xi + \int_0^{x-1} y_k(\xi)\, d\xi + (k-1) \int_0^{x-1} y_1(\xi) \cdot y_2(x-1-\xi)\, d\xi,$$

mit

$$y_k(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x < 0, \\ 1, & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Schrifttum

1. DE BRUIN, N. G.: Asymptotic Methods in Analysis. North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1958.

T. FREY, Budapest, V. Szerb u. 23. Ungarn.