

# EINIGE PROBLEME DER VERBINDUNG ZWISCHEN EINEM DURCH ZUFÄLLIGEN FEHLER BELASTETEN PUNKT ODER ABSCHNITT EINER EISENBAHNSTRECKE UND DER MASSGEBENDEN KINEMATISCHEN BEANSPRUCHUNG

Jenő MEGYERI\* und László SZEIDL\*\*

\* Lehrstuhl für Eisenbahnbau  
Technische Universität Budapest  
H-1111 Budapest, Ungarn

Phone: +36 1 463 1154, Fax: +36 1 463 3054

\*\* Lehrstuhl für Warschenlichkeitsrechnung und Statistik  
Eötvös Loránd-Universität Budapest  
Email: szeidl@ludens.elte.hu

Eingegangen: Juli 10, 1997

## Abstract

The fundamental task of kinematical investigation of railway tracks is that in a given position or interval of the track in respect to the view of acceleration no bigger stress can arise than the given acceleration limit or the given limit by the examination of the third kinematical characteristic of movement.

In idealised case the railway track consists of regular straight intervals, regular curves, and regular transition curves. Conclusions drawn from the investigation of the idealised case can greatly deviate from facts supported by real and experimental measurement. Our contemporary measurement facilities only restrictedly enable the kinematical stresses to be directly measured therefore in such cases they can be indirectly examined. The theoretical estimation for standard stresses can be applied in practice, if the distribution of the standard stresses of the extreme error intervals and the suitable circumstances of cycles lengths is available.

*Keywords:* random error, kinematical stress, mean axle error.

## 1. Einleitung

Auf der Eisenbahnstrecke sollten die Beschleunigungen und die Bewegungskennwerte dritter Ordnung unter einem Schwellenwert der Beschleunigung ( $a_{zul}$ ) bzw. unter einem Beanspruchungs-Grenzwert ( $h_{zul}$ ) gehalten werden, d.h. die folgenden limitativen Bedingungen erfüllt werden:

$$|\underline{a}| \leq a_{zul} \left[ \text{m/s}^2 \right] \quad \text{und} \quad |\underline{h}| \leq h_{zul} \left[ \text{m/s}^3 \right]. \quad (1)$$

Diese Probleme können im Zusammenhang miteinander mit Hilfe der bewegungsgeometrischen Untersuchung geprüft werden.

Für eine idealisierte Eisenbahnstrecke kann man voraussetzen, daß sie aus regelmäßigen geraden Abschnitten, regelmäßigen Kreisbögen und Übergangsbögen zusammengesetzt ist. Diese Streckenabschnitte bestimmen eindeutig (und berechenbar) bei einer gegebenen Geschwindigkeit den auf manchen Streckenabschnitten erregten charakteristischen Beschleunigungswert  $|a|$  und denselben der Bewegungskennwert dritter Ordnung  $|h|$  [1], [2], [3], [4].

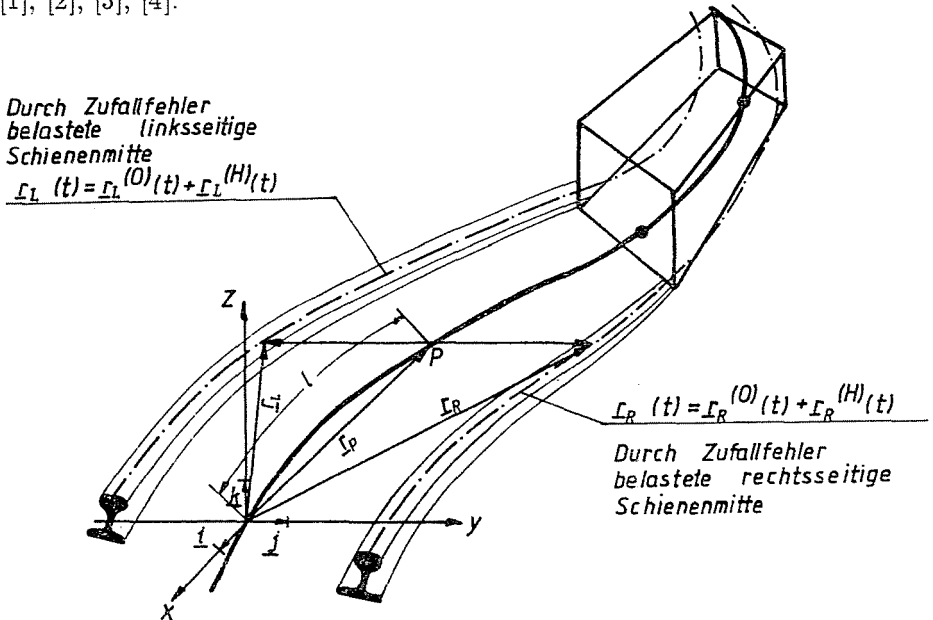


Abb. 1. Beschreibung der links- und rechtsseitigen Schienenmitte

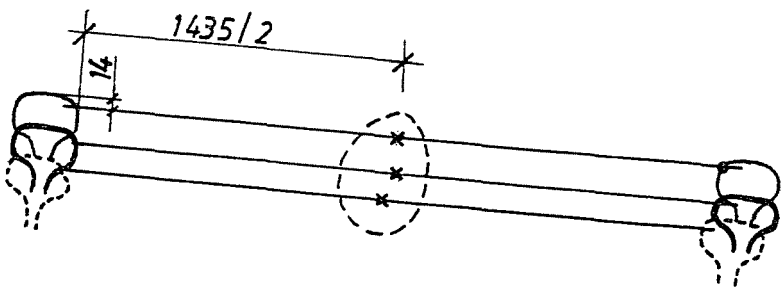


Abb. 2. Die querschnittlichen Lagen der Achsmitte

Die aus der Untersuchung des idealisierten Falles abgezogenen Folgerungen können von den tatsächlichen und von den durch in der Praxis durchgeführten Messungen unterstützten Ergebnissen erheblich abweichen und zwar infolge der hier unten angeführten Umstände:

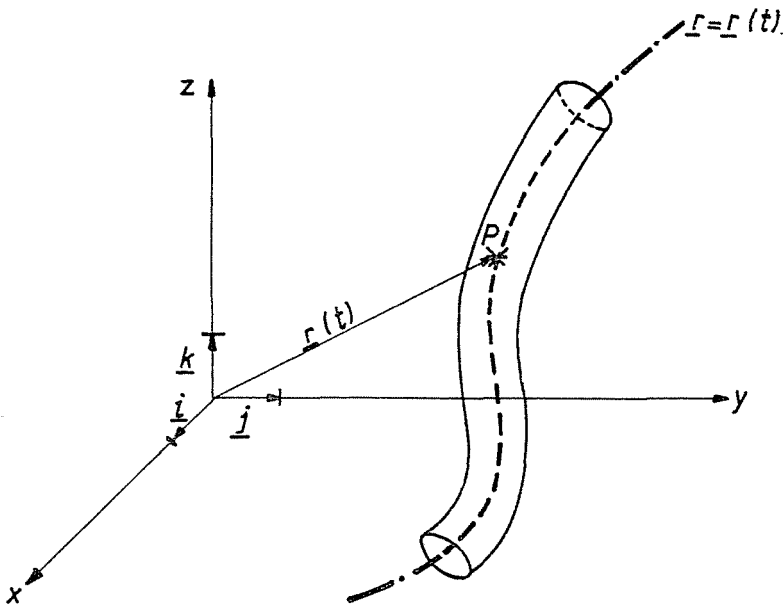


Abb. 3. Die räumlichen Lagen der Achsmittle

- Eisenbahnen können nur innerhalb bestimmten Maßtoleranzen gebaut werden. Demnach können die Gleise von vornherein Baufehler enthalten, die in Anbetracht der kinematischen Beanspruchungen von grundlegender Bedeutung sind, wie z.B. die in der Gleisebene, Vertikalebene, in der Spurweite und auch die Torsionsfehler in der Gleisebene. (Die mit Verkehrsbewegung nicht unmittelbar verbundenen Maßtoleranzen, wie z.B. die mit der Schienenwanderung, Schienenneigung zusammenhängenden Fehler werden in dieser Abhandlung nicht erörtert.) Im Laufe des Betriebes können sich noch weitere Fehler infolge der Verkehrsbewegungen über die obengenannten hinaus anhäufen.
- Mit der Zeit entfalten sich als Symptome der natürlichen Schienenabnutzungen (von der Zeit und Verkersbelastung abhängig) Höhen- bzw. Seitenabnutzungen, die sich in einigen geraden, Kreisbogen- und Übergangsbogen-Abschnitten der Strecke voneinander verschiedenartig in Maß und Verhältnismäßigkeit entwickeln können.
- Die bei der Berechnung der theoretischen Beanspruchung des Gleises, die in der Winklerschen Elastizitätsformel angeführte sog. Bettungsziffer könnte sich sowohl im Raum, als auch mit der Zeit ändern. Deshalb wäre die Anwendung der Formel nur im Falle mathematisch korrekt, wo die Beschreibung der Änderung der Dynamik auf irgendeine Weise behandelbar wäre. Übrigens könnte ein beträchtlicher

Fehler auch bei Anwendung einer sorgfältig festgestellten Bettungsziffer vorkommen, wenn man das Gleis in den Berechnungen der theoretischen Beanspruchung mit welcherart vereinfachtem Modell nähert. Die sog. Fixpunkte, wie z.B. Weichen, Brücken usw. werden hier nicht behandelt, da die wegen deren individuellen Charakters eine individuelle Untersuchung erfordern.

- Abweichend von der idealisierten Bewegung des Eisenbahnfahrzeugs ist die tatsächliche Bewegung der Fahrzeuge infolge der zufälligen Fehler, Inhomogenitäten usw., die sich in beiden Komponenten des Systems "Schiene/Rad" befinden, zufällig, eine zufällige Bewegung kann deshalb nur mit Hilfe von statistischen Methoden beschrieben, bzw. die kinematischen Beanspruchungen berechnet werden. Die im Laufe der von der idealisierten Bewegung abweichenden tatsächlichen Bewegungen können sich die Größen der erregten Kräfte von denen unterscheiden, die in Verbindung mit der idealisierten Bewegung auftreten.

Die fahrzeugdynamische Untersuchung des Gleis/Fahrzeug Systems ist eine schwierige Aufgabe, da dazu auch das komplexe System des Antriebs- und Bremswerke, sowie die Verhältnisse der Massenverteilung usw. in Kauf genommen werden sollten. (Diese Themen sind im Rahmen der vorliegenden Abhandlung nicht behandelt. In dieser Beziehung s. [5], [6]).

Im Folgenden werden die Modellierungsprobleme der verschiedenen, unmittelbar mit den Betriebsbewegungen verbundenen Gleisfehler behandelt, auf Grund der Modellierung derselben (nach der Ansicht des Beschleunigungsvektors  $\bar{a}$  und des Bewegungskennwertes dritter Ordnung  $\bar{h}$ ) befassen wir uns mit den Folgerungen, die von denselben gezogen werden können. Diese Modellierungsprobleme ähneln in vielen Betrachtungen der Modellierung von dynamischen Beanspruchungen der Nutzfahrzeuge (s. [7], [8]).

Infolge des Charakters und der großen Menge der vorkommenden Fehler (abgesehen davon, wenn sie individuell vorkommen) kann die Modellierung nur auf Grund der Theorie und der Methoden der stochastischen mathematischen Statistik durchgeführt werden. Dementsprechend werden die links- und rechtsliegenden Schienenmitten sowie die im weiteren detaillierten Fehler beschreibenden Funktionen als Realisation eines (mehrdimensionalen) stochastischen Vorgangs angenommen, und die Aufdeckungen der statistischen Gesetzmäßigkeiten und die Untersuchung der Zusammenhänge mit den kinematischen Beanspruchungen gegeben.

## 2. Modellierung der mit zufälligen Fehlern belästigten Gleise

Im allgemeinen berücksichtigt man in der Berechnung der theoretischen kinematischen Beanspruchungen des Gleises weder die stochastische Bewegung der Zug- und gezogenen Fahrzeuge noch den Umstand, daß der

Schienenweg infolge des natürlichen Gebrauchs Abnutzungen leidet, weiters daß derselbe waagerechte und vertikale Fehler z.B. Spurweitenfehler oder Ebenenverdrehung enthält und infolge der Fahrzeugsbelastungen elastische und plastische Verformungen erleiden kann. Infolgedessen können die gerechneten Beanspruchungswerte von den tatsächlichen wesentlich unterscheiden.

## 2.1. Charakterisierung der Fehler

### 2.1.1. Beschreibung der mit zufälligem Fehler belasteten links- und rechtsseitigen Schienenmitten

Die auf den Oberflächen der links- und der rechtsseitigen Schienköpfe definierten Schienenmitten sind (s. *Abb. 1*) als parametrischen Raumkurven dargestellt. Ausgegangen davon können – mit Berücksichtigung der im weiteren zu definierenden Abnutzungen der Schienenköpfe und der Neigungswinkelfehler der Schienen – irgendwelche, auf dem Schienenkopf befindliche Raumkurven, die im Laufe der praktischen Berechnungen vorkommen können, durch die folgenden Formeln gegeben werden:

$$r_L(t) = r_L^{(0)}(t) + r_L^{(H)}(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$r_R(t) = r_R^{(0)}(t) + r_R^{(H)}(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

Hierin ist  $t$  ein Skalarparameter (im allgemeinen die Zeit) und die Komponenten  $r_L^{(0)}(t)$  und  $r_R^{(0)}(t)$  bezeichnen die idealisierten (geplanten) Schienenmitten in der Abhängigkeit vom Parameter  $t$ , während die Komponenten  $r_L^{(H)}(t)$  und  $r_R^{(H)}(t)$  die Abweichungen davon präsentieren. Die letzteren (sich zufallmäßig entwickelnden) addizierten Glieder entstehen teils davon, daß bei den Gleisherstellungsarbeiten ein idealisierter Zustand des Gleises vollständig nicht erreicht werden kann (das gilt auch für die verschiedenen Baustoffe, deren Festigkeits-Eigenschaften von den vorschriftlichen abweichen), teils davon, daß mit der Zeit der den Beanspruchungen von verschiedenen Größen und Zeitdauern ausgesetzte Schienenweg nicht nur elastische sondern auch bleibende Formänderungen leidet z.B. infolge der bei den Oberbauregelungs-Arbeiten eintretenden Abweichungen.

Die in der Beschreibung der Schienenmitten angeführten Fehlglieder  $r_L^{(H)}(t)$  und  $r_R^{(H)}(t)$  können den in der Gleis- bzw. in der vertikalen Ebene befindlichen Fehlern entsprechend auf weitere Komponenten zerlegt werden. Die auf die linke bzw. rechte Seite bezogene Zerlegung sollte wie folgt aufgeschrieben werden:

$$r_L^{(H)}(t) = r_L^{(ph)}(t) + r_L^{(fh)}(t), \quad (4)$$

$$\underline{r}_R^{(H)}(t) = \underline{r}_R^{(ph)}(t) + \underline{r}_R^{(fh)}(t), \quad (5)$$

worin die auf den rechten Seiten befindlichen Formelglieder sinngemäß die sich auf die linken und rechten Seiten beziehenden und den oberen Indizes entsprechenden, in Gleisebene ( $ph$ ) bzw. in der Vertikalebene befindlichen Fehler ( $fh$ ) in Abhängigkeit vom Parameter  $t$  bedeuten.

Sowohl die in der Gleisebene als auch in der Vertikalebene befindlichen Fehler (gleicherweise auf der rechten und der linken Seite) sollten weiters auf einen zufälligen "Geräuschvorgang" und eine von demselben (statistisch) unabhängige Komponente zerlegt werden, die den nacheinander in zufälligen Zeitpunkten vorkommenden, zufällige Größen und Amplituden besitzenden "Extremfehler" wie folgt ( $t \geq 0$ ) beschreibt:

$$\underline{r}_L^{(ph)}(t) = \underline{x}_L^{(ph)}(t) + \underline{y}_L^{(ph)}(t), \quad \underline{r}_L^{(fh)}(t) = \underline{x}_L^{(fh)}(t) + \underline{y}_L^{(fh)}(t), \quad (6)$$

$$\underline{r}_R^{(ph)}(t) = \underline{x}_R^{(ph)}(t) + \underline{y}_R^{(ph)}(t), \quad \underline{r}_R^{(fh)}(t) = \underline{x}_R^{(fh)}(t) + \underline{y}_R^{(fh)}(t). \quad (7)$$

So erhält man in der Gleisebene bzw. Vertikalebene die entsprechenden Fehlervorgänge als die Superposition zweier voneinander unabhängigen Fehlervorgänge. Es ist zu bemerken, daß aus dem Gesichtspunkt der maßgebenden Fehler betrachtet, die extremen Fehler eine determinierende Rolle besitzen und die Fehlerfunktionen, die die zufälligen "Extremfehler" mit zufälligen Größen und Amplituden beschreiben, aus den im weiteren zu definierenden Funktionsklassen stammen.

Es ist selbstverständlich, daß sowohl die Berechtigung der Zerlegung als auch die Rolle der Extremfehler in der Zukunft auf Grund von konkreten statistischen Registrierungen bewiesen werden sollen.

### 2.1.2. Ebenverdrehungsfehler

Der Ebenverdrehungsfehler kann (auf eine abstrakte Weise) folgendermaßen ausgelegt werden:

Betrachtet man bei einer festgelegten Einheitsgeschwindigkeit die durch Formeln (2) und (3) definierten links- bzw. rechtsseitigen Schienenmitten:

$$\underline{r}_L(t), \quad \underline{r}_R(t), \quad T \geq 0.$$

Bei einem gegebenen Wert des Parameters  $t$  wird die zu einem Maßfehler  $\Delta l$  gehörige Unebenheit als das Verhältnis des Abstands zwischen der durch die Punkte  $\underline{r}_L(t)$ ,  $\underline{r}_R(t)$  und  $\underline{r}_L(t')$  gespannten Ebene und dem Punkt  $\underline{r}_L(t')$  zu der Maßfehlerlänge  $\Delta l$  interpretiert, wo der zum Punkt  $t$  gehörige Punkt  $t'$  ( $t' > t$ ) so definiert wird, daß die Gleichheit  $[\underline{r}_L(t) - \underline{r}_R(t')] = \Delta l$  erfüllt wird.

Es ist selbstverständlich, daß in dem idealisierten Fall auf geraden Strecken und in Kreisbögen, wenn die durch die Kurve  $\left[ \underline{r}_L^{(0)}(t), \underline{r}_R^{(0)}(t) \right]$

definierte Strecke keine zu dem gegebenen Punkt  $t$  gehörige Unebenheit enthält, die Ebenheitsfehler nur aus den Fehlern  $\left[ \underline{r}_L^{(H)}(t), \underline{r}_R^{(H)}(t) \right]$  stammen können.

### 2.1.3. Schienenneigungsfehler

Beim Gleisbau werden die Schienen im allgemeinen mit einem Neigungswinkel 1:20 oder 1:40 gegen die Gleisachse (in Sonderfällen ohne Neigungswinkel) verlegt. Abweichungen von den genannten Werten nennt man Neigungswinkel.

### 2.1.4. Aus Abnutzungen entstehende Fehler

Außer den oben genannten Fehlern müssen unbedingt auch die sich während des Betriebs entwickelnden Abminderungen des Schienenprofils berücksichtigt werden, die aus der Höhen- und Seitenabnutzungen stammen. Die Abnutzung ist eigentlich eine verwickelte Flächenumwandlung, die jedoch mit Hilfe der nachfolgenden Kennwerte in Abhängigkeit vom Parameter  $t$  beschrieben werden kann.

$$k_L(t) = \left[ k_L^{(mk)}(t), k_L^{(ok)}(t) \right], \quad (8)$$

$$k_R(t) = \left[ k_R^{(mk)}(t), k_R^{(ok)}(t) \right]. \quad (9)$$

In diesen Vektoren weisen die Indexe  $(mk)$  und  $(ok)$  auf die die Höhen- bzw. Seitenabnutzung beschreibenden Komponenten hin.

### 2.1.5. Der Spurfehler

Dieser Fehler bedeutet die Abweichung des tatsächlich gemessenen Wertes vom vorschiftlichen Wert.

Es ist zu bemerken, daß der Spurfehler von den Beziehungen (2) - (9) für beide Schienenstränge schon ermittelt werden kann.

### 2.1.6. Achsenmittfehler

Bei bestimmten Untersuchungen kann die Längsachsenlage von Wichtigkeit sein, darum sollte dieselbe als eine Raumkurve  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ , bzw. die Abweichung derselben von der idealen Achslage gegeben werden. Jedoch ist es

selbstverständlich, daß die die linke- und rechte Schienenmitten beschreibenden Raumkurven  $r_L(t)$ ,  $r_R(t)$  beisammen mit den Schienenneigungs- und Schienenabnutzungs-Fehlern auch die Achsenmitte eindeutig bestimmen und davon  $T(t)$  (somit auch der Achsenmitte-Fehler) explizite aufgeschrieben werden können.

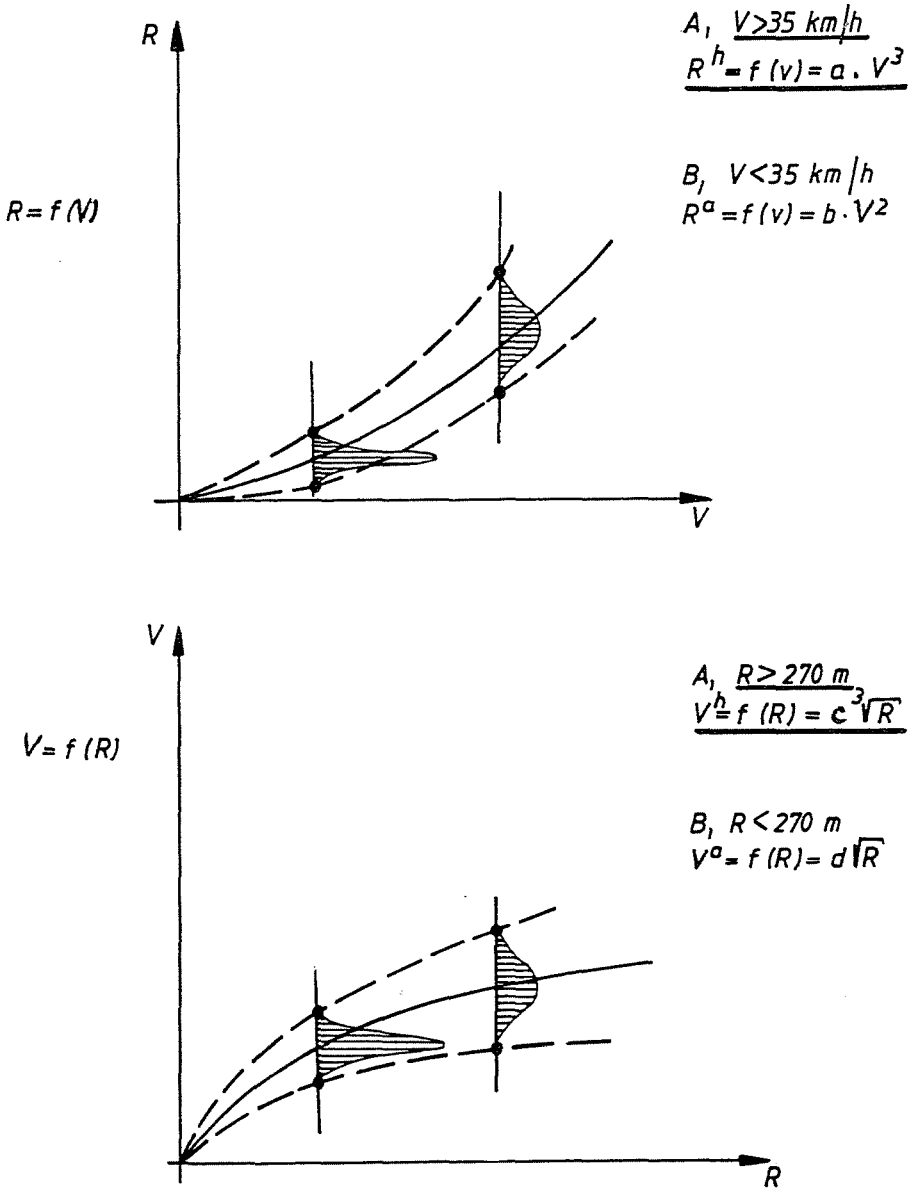


Abb. 4. Verteilung der Beanspruchung; Häufigkeitskurve



Wenn man die möglichen Lagen der Achsenmitte bei einem gegebenen Querschnitt in dem dynamischen System Schiene/Rad betrachtet, die als Resultate von verschiedenen zufälligen Wirkungen zustande kommen können (welches eigentlich vom Gesichtspunkt des Fahrwerks betrachtet durch die Geschwindigkeit und durch die Belastung entschieden wird), so erhält man im gegebenen Querschnitt eine Form (*Abb. 2*) bzw. ihr röhrenartiges Äquivalent (*Abb. 1, Abb. 3*), das sich in Abhängigkeit von dem Parameter  $t$  ändert und das sich in einem engeren Zusammenhang mit der kinematischen Beanspruchung befindet. Die Untersuchung dessen kann viele Probleme beantworten, die mit der Beanspruchung des Schienenwegs in Verbindung sind.

Im gegebenen Querschnitt kann die Verteilung der Beanspruchung wie oben dargestellt untersucht werden. Die dazu gehörige Häufigkeitskurve (mit gegebener Belastung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit) ist in *Abb. 4* dargestellt.

## 2.2. Die wichtigsten Gruppierungen der Eisenbahnstrecken nach der Häufigkeit der verschiedenartigen Gleisfehler

- a) • Gleisbauart:
  - lückenloses Gleis
  - Langschienengleis
- Bahnhofsgleise:
  - Ankunftsgleise
  - Durchfahr Gleise
  - andere Ankunftsgleise
  - Bahnhofsneben Gleise
- Festpunkte (Weichen, Wegübergänge u.a.)
- b) Schwellentypen:
  - Betonschwellen
  - Holzschwellen
- c) Schienen:
  - 48 (kg/m)
  - 54 (kg/m)
  - 60 (kg/m)
- d) Neigungswinkel:
  - lotrecht verlegene Schienen
  - 1:20
  - 1:40
- e) Nach geometrischer Gruppierung:
  - konstante Krümmung:
    - gerade Strecke
    - Kreisbogenstrecke
  - veränderliche Krümmung:
    - Übergangsbogen
- f) Traktion:
  - elektrisch
  - Diesel
  - gemischt

Im weiteren, wenn man von der Gruppierung a) ... f) eine Gruppe auswählt, nennt man den Abschnitt, der die festgelegten Bedingungen er-

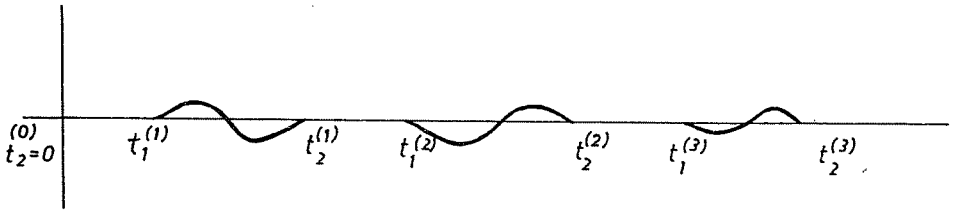


Abb. 5. Anschließende Fehlerabschnitte

füllt, homogen.

Da in der kinematischen Beanspruchung die einzelnen Gruppen bzw. Fälle nicht mit demselben Gewicht eine Rolle spielen, sogar einige im Vergleich mit der Einwirkung der anderen auch vernachlässigt werden können (z.B. die aus dem Neigungsfehler der Schienen entstehende Beanspruchungen unbedeutend sind), weiters, infolge der zahlreichen Nebenwirkungen ist die Zahl der zu prüfenden homogenen Fälle außerordentlich groß. Deshalb müssen mit Rücksicht auf die weiteren Untersuchungen diejenigen Fälle ausgewählt werden, die aus dem praktischen Gesichtspunkt die größte Bedeutung besitzen.

### 2.3. Beschreibung der Fehlerformen

Die Form des in der Gleisebene und in der Vertikalebene befindlichen "Extremfehlers".

Bei der Untersuchung der bewegungsgeometrischen Maßtoleranzen des Eisenbahngleises können die Formfunktionen der in der Gleisebene und in der Vertikalebene befindlichen Fehler aus den mit trigonometrischen (Cosinus) bzw. mit Polynomen beschreibbaren Funktionsklassen ausgewählt werden ([1] pp. 187 bis 189.).

Die mit den trigonometrischen Funktionen beschreibbaren Fehlerfunktionen (in den bezüglichen Lokalkoordinaten-Systemen) werden aus den folgenden Funktionsklassen ausgewählt - worin die unteren Indexe  $I$  und  $E$  den auf dem Kreisbogen - bzw. auf der geraden Strecke vorkommenden Fehlerfunktionen

$$G_I = \{g_I(x; \underline{p})\} \quad \text{bzw.} \quad G_E = \{g_E(x; \underline{p})\}$$

entsprechen, wo neben dem Parametervektor  $\underline{p} = (p_1, p_2)$  die  $f|p_1|$  die Halbampplitude und  $l = p_2$  die Wellenlänge bezeichnen. Die Halbampplitude  $f$  ist nämlich nach dem üblichen Bezeichnungssystem eine Zahl ohne Vorzeichen, deswegen ist das Vorzeichen der Zahl  $p_1$  in dieser Rücksicht maßgebend. Die zu den Funktionsklassen  $G_I$  bzw.  $G_E$  gehörigen Funktionen können wie

folgt definiert werden:

$$G_I(x; p) = p_1 \left[ 1 - \cos \frac{2\pi}{p_2} x \right], \quad \text{wenn } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ bzw.}$$

$$G_E(x; p) = \begin{cases} 2p_1 \left[ 1 - \cos \frac{3\pi}{p_2} \right], & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{p_2}{3}, \\ -p_1 \cos \frac{3\pi}{p_2}, & \text{wenn } \frac{p_2}{3} \leq x \leq \frac{2p_2}{3}, \\ -2p_1 \left[ 1 - \cos \frac{3\pi}{p_2} (p_2 - x) \right], & \text{wenn } \frac{2p_2}{3} \leq x \leq \frac{3p_2}{3} = p_2. \end{cases}$$

Aus diesen zwei Funktionsklassen können die entsprechenden Fehlerfunktionen für die Praxis befriedigend ausgewählt werden. Jedoch ist es klar, daß diese Funktionsklassen für eine ausführlichere Untersuchung erweitert werden können, wo die Fehlerfunktionen eine weitaus kompliziertere und nur mit mehreren Parametern beschreibbare Mannigfaltigkeit erzeugen.

### 2.3.1. Höhen- und Seitenabnutzung

Das Maß der Höhen- und Seitenabnutzung der Schiene wird außer der Zugbelastung und der Geschwindigkeit am meisten durch die geometrische Linienführung beeinflusst. Infolge irgendeines Materialfehlers können zwar auch große und zufällig angeordnete Extremfehler vorkommen, jedoch sie mit Rücksicht auf ihre Eigenartigkeit eine besondere Untersuchung erfordern.

a) Auf geraden Strecken ist die Seitenabnutzung praktisch Null, da für diese Abschnitte angenommen werden kann, daß sich die Identität

$$K_L^{(ok)}(t) = K_R^{(ok)}(t) = 0$$

erfüllt (der instabile Lauf der Fahrzeugräder kann zwar etwaige Seitenabnutzung hervorrufen, die ist aber unbedeutend). Die Höhenabnutzung kann auf homogenen Streckenabschnitten als konstant gelten (abgesehen von den aus Materialfehler entstehenden "Extremabnutzungen"), die von der Verkehrsintensität und von der Verteilung der Belastung abhängt.

b) Auf der geraden-, Kreisbogen- und Übergangsbogen-Streckenabschnitten entwickelt sich die Höhenabnutzung gleichermaßen in der Abhängigkeit von der Belastung und der Verkehrsintensität, jedoch im wesentlichen unabhängig von der Geschwindigkeit der Fahrzeuge.

c) In Kreis- und in Übergangsbogen liegenden Gleisabschnitten verläuft die Seitenabnutzung der Schienen in Abhängigkeit von der geometrischen Linienführung sowie von der Fahrgeschwindigkeit der Fahrzeuge bzw. der Belastung und der Verkehrsintensität; jeder von diesen Faktoren steht in

enger Beziehung zu der Größe der durch die Zentrifugal-Beschleunigung hervorgerufenen Kraft. Demgemäß erhöht sich (auch durch Messungen beweisbar) die Seitenabnutzung der Schienen progressiv zu der Krümmungsgröße.

#### 2.4. Modellierungsprobleme der zufälligen Fehler

Die Raumkurven  $r_L(t)$  und  $r_R(t)$ , die die linken bzw. rechten Schienenmitten für irgendwelchen unbelasteten Streckenabschnitt beschreiben, können prinzipiell mit Hilfe von optischen Messungen mit einer gewünschten Genauigkeit bestimmt werden, deshalb sind auch ihre Abweichungen von der idealisierten Raumkurve (d.h. die Fehler) abmeßbar.

Da dieses Meßverfahren für einen längeren Streckenabschnitt in der Praxis unbrauchbar ist, kann man sich nur auf bei gewisser Belastung ausgeführte mechanisierte Meßverfahren stützen. Der wichtigste Mangel dieser letzteren steht darin, daß sie nicht die tatsächlichen Links- und Rechtschienenmitten beschreiben, sondern irgendwelche von dem Meßgerät abhängige Raumkurven darstellen:

$$\underline{R}_L(t) = \underline{R}_L^{(0)}(t) + \underline{R}_L^{(H)}(t), \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$\underline{R}_R(t) = \underline{R}_R^{(0)}(t) + \underline{R}_R^{(H)}(t), \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Woraus folgt, daß wenn man auf Grund der Meßergebnisse eine statistische Analyse ausführt, dann soll man in Rücksicht nehmen, daß für die Prüfungen nicht die im Betrieb belasteten Schienenmitten  $\underline{r}_L(t)$  und  $\underline{r}_R(t)$ , sondern durch die Abbildung modifizierte Werte für die weitere Arbeit zur Verfügung stehen, wo die Abbildung auch die mit der Übertragung verbundenen Auswirkungen einschließt. Diese modifizierte Trajektorien können wie folgt abgeschrieben werden:

$$\underline{R}_L(t) = \Psi [\underline{r}_L(t)] \quad \text{und} \quad \underline{R}_R(t) = \Psi [\underline{r}_R(t)].$$

Das bedeutet auch zum Beispiel, daß die gemessenen "Extremfehlerfunktionen" nicht aus den Funktionsklassen  $G_I$  und  $G_E$ , sondern aus den dem Meßsystem korrespondierenden Funktionsklassen  $G_I^*$  und  $G_E^*$  herrühren.

Mit Rücksicht auf diesen Umstand können die folgenden Aufgaben konzipiert werden:

- Ermittlung der Abbildung für die annähernde Beschreibung der Übertragungseigenschaften des gegebenen Systems,
- Beschreibung der aus den Funktionsklassen  $G_I$  und  $G_E$  durch Abbildung erhaltenen Funktionsklassen  $G_I^*$  und  $G_E^*$ ,
- Durchführung der Auflösung (10) ... (11) der auf die Schienenmitten bezüglich registrierten Angaben  $\{\{\underline{R}_L(t), \underline{R}_R(t)\}, 0 \leq t \leq T\}$ ,

- Statistische Modellierung des zufälligen Geräuschverlaufs und des "Extremfehlerverlaufs"; Modellidentifizierung,
- Untersuchung der maßgebenden Beanspruchungen (als Wahrscheinlichkeits-Variable) auf Grund der aufgebauten Modelle.

Die Untersuchung - ersichtlich auch aus den dargestellten Aufgaben - ist ziemlich verwickelt. Nicht nur die Identifizierung der "Extremfehler" ist mit Schwierigkeiten verbunden (z.B. Ermittlung der Anfangs- und Endpunkte der Krümmungen, Bestimmung einiger Parameter, Probleme der Algorithmisierung), die Lösung der Aufgaben ist auch dadurch verwickelt, daß das Vorkommen der Fehler in den linken und rechten Schienensträngen nicht als voneinander völlig unabhängig angesehen werden kann, die Spurweite nur innerhalb von gewissen vorgeschriebenen Grenzen ändern darf und u.a. durch die Gleisbautechnik und die Schienenbefestigungsanlagen bestimmt ist. Daneben ist es aus den registrierten Meßergebnissen zu bemerken (welches später mit Hilfe von statistischen Methoden zu beweisen ist), daß zwischen den auf der linken und rechten Seiten vorkommenden "Extremfehlern" ein enger Zusammenhang existieren kann. Demnach ist es nicht genügend, die links- und rechtsseitigen Fehler abgesondert zu analysieren, es sollte auch das gemeinsame, gleichzeitige Vorkommen geprüft werden. Anscheinend kann man für die praktischen Berechnungen voraussetzen, daß die in beiden Schienensträngen ablaufenden Geräuschvorgänge voneinander unabhängig sind, während zwischen den "extremen" Fehlervorgängen (besonders im Falle der in der vertikalen Ebene ablaufenden Fehler) der Zusammenhang eng ist.

Die Probleme der hier dargestellten Aufgaben werden in einer später zu publizierenden Abhandlung des Verfassers erörtert.

### 3. Folgerungen und Anwendungsmöglichkeiten

Im folgenden wird die praktische Anwendung der bisher gewonnenen Ergebnisse veranschaulicht. Die Aufgabe ist: Herstellung einer annähernden Methode zur Abschätzung der maßgebenden Beanspruchungsverteilung auf einer mit zufälligem Fehler belasteten Eisenbahnstrecke.

Betrachten wir eine gegebene homogene Eisenbahnstrecke und prüfen wir die auf diese Strecke bezügliche und von zufälligem Fehler verursachte maßgebende Beanspruchung mit Anwendung der Erneuerungstheorie.

(Der Einfachheit halber prüfen wir einen geraden Streckenabschnitt und nehmen die nur in der vertikalen Ebene wirkende kinematische Beanspruchung in Rücksicht; die Methode eignet sich jedoch auch für verwickelte Aufgaben; dies bedeutet in bezug auf die "Extremfehler", daß dieselben aus der Funktionsklasse  $G_F$  ausgewählt werden sollen.)

Im folgenden stellen wir die Voraussetzungen auf:

Man nimmt an, daß die von den zufälligen Fehlern entstandenen Beanspruchungen grundsätzlich durch die extremen Fehler bestimmt werden (d.h. daß in Übereinstimmung mit dem Obigen, die erwähnten additionierten "Geräuschvorgänge" die maßgebende Beanspruchung nur unbedeutend beeinflussen). Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß derselbe Fehler auf den linken und rechten Schienenmitten vorkommt. Man setzt auch voraus, daß im Falle von den aufeinander folgenden Fehlerabschnitten

$$\left[ t_1^{(1)}, t_2^{(1)} \right], \quad \left[ t_1^{(2)}, t_2^{(2)} \right], \dots, \left[ t_1^{(n)}, t_2^{(n)} \right], \dots$$

(s. Abb. 5) für die Wellenlängenfolge  $l_i = t_2^{(i)} - t_1^{(i)}$  bzw. Halbamplitudenfolge  $f_i$  die Reihe der Wahrscheinlichkeits-Vektorenvariablen  $(l_i, f_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ( $t_2 = 0$ ), mit der unabhängigen, gemeinsamen Verteilungsfunktion gleicher Verteilung  $G_{l,f}(x,y)$  und die davon unabhängige, aufeinander folgende, keine Extremfehler enthaltende Reihe  $t^{(i)} = t_1^{(i)} - t_2^{(i-1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ( $t_2^{(0)} = 0$ ) auch eine unabhängige Reihe gleicher Verteilung mit irgendeiner Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  bilden.

Im Falle von einer zum Parameter  $l, f$  gehörigen Fehlerfunktion in der Funktionsklasse  $G_E$  kann die maßgebende Beanspruchung in Abhängigkeit von den Parametern  $l$  und  $f$  berechnet (s. [1]) und für die weiteren Untersuchungen mit  $\varphi(l, f)$  bezeichnet werden. Hier versteht man unter  $\varphi(l, f)$  den Absolutwert der Beanspruchung, der, infolge unserer Voraussetzungen, in bezug auf die zur Funktionsklasse  $G_E$  gehörigen Funktionen von dem Vorzeichen des Parameters  $p_1$  nicht, sondern nur von dem Absolutwert  $|p_1| = f$  abhängt. Betrachtet man einen ausgewählten Fehlerabschnitt, so wird die maßgebende Beanspruchung eine von den anderen unabhängige Zufallsgröße, deren Verteilungsfunktion in Kenntnis der Verteilungsfunktionen  $F_{l,f}$  der Parameter sogleich aufgeschrieben werden kann:

$$Q(z) = \int_{R^2} I(\varphi(x,y) < z) dF_{l,f}(x,y), \quad (12)$$

worin  $I$  die Indikatorfunktion bedeutet.

$F(x)$  soll die Verteilungsfunktion der Länge des Zufallintervalls (Zufallszyklus) bezeichnen, das aus einem keinen "Extremfehler" enthaltenden Abschnitt und aus dem darauffolgenden Fehlerabschnitt besteht (es ist das Konvolut der Verteilungsfunktionen  $F_0$  und  $F_l(x) = \int_R F_{l,r}(x,y) dy$ ). Führt man für die Momente die Bezeichnungen  $\mu_i = \int_R x^i dF(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  ( $\mu = \mu_1$ ) und für die Varianz die Bezeichnung  $\sigma^2 = \mu_2 - \mu^2$  ein, weiters wenn  $N(T)$  die Zahl der Zyklen bezeichnet, auf dem Abschnitt  $(0, T)$  so gilt nach dem aus der Erneuerungstheorie bekannten Smithschen Satz für den Mittelwert

bzw. Varianz (s. [9]):

$$E[N(T)] - \frac{T}{\mu} \rightarrow \frac{\mu_2}{2\mu^2} - 1, \quad T \rightarrow \infty, \quad \text{bzw.}$$

$$D^2[N(T)] - \frac{\sigma^2}{\mu^3} T \rightarrow \left[ \frac{5\mu_2^2}{4\mu^2} - \frac{2\mu_3}{4\mu^4} - \frac{\mu_2}{2\mu^2} \right], \quad T \rightarrow \infty.$$

Hier ist zu bemerken, daß infolge der Unabhängigkeit von  $l_j$  und  $f_j$  die Momente  $\mu_i$  auch mit den ersten  $i$  Momenten von  $l_j$  und  $f_j$  ausgedrückt werden können. Z.B. ist es leichtverständlich, daß  $\mu = El_1 + Ef_1$  und  $\sigma^2 = D^2[l_1] + D^2[f_1]$ .

In diesem Fall gilt auch das folgende Grenzverteilungsgesetz mit den eingeführten Bezeichnungen außer dem Smithschen Satz für die Zykluszahl  $N(T)$

$$P \left[ N(T) \geq \frac{T}{\mu} - \frac{x\sigma}{\mu^{3/2}} T^{1/2} \right] \rightarrow \Phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz, \quad T \rightarrow \infty.$$

(In bezug auf das Restglied gab EGLUND [10] Abschätzung durch eine normale Verteilungs-Annäherungsmethode.)

Auf Grund der vorhergehenden Zusammenhänge kann man (wenn  $T$  genügend groß ist) schon einfach zur Abschätzung der Verteilungsfunktion der maßgebenden Beanspruchung auf einer Strecke von  $T$ -Länge wie folgt gelangen: Im Falle von einem beliebigen Wert  $0 < q < 1$  bezeichnet  $x_q$  den Wert, für welchen  $\Phi(x_q) = q$  gültig ist (d.h.  $x_q$  bedeutet die Quantität von  $q$ -Ordnung der standard Normal-Verteilung) und man legt eine beliebige kleine  $q$ -Größe ( $0 < q < 1$ ) fest.

Infolge der festgelegten natürlichen Zahl  $n$  weiters wegen der Unabhängigkeit der  $(l_i, f_i)$ ,  $i \geq 1$  Wahrscheinlichkeits-Vektorveränderlichen sowie des Zusammenhangs (12) ist es wahr, daß

$$P \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \varphi(l_i, f_i) < x \right] \leq \{p[\varphi(l_i, f_i) < x]\}^n = \{Q(x)\}^n$$

demnach kann man für die maßgebende Beanspruchung  $\mu$  die folgende obere Abschätzung geben:

$$P \left[ \max_{1 \leq i \leq N(T)} \varphi(l_i, f_i) < x \right] \\ \leq P \left[ \max_{1 \leq i \leq N(T)} \varphi(l_i, f_i) < x, N(T) \geq \frac{T}{\mu} - \frac{x_q \sigma}{\mu^{3/2}} T^{1/2} \right] +$$

$$+P \left[ \max_{1 \leq i \leq N(T)} \varphi(l_i, f_i) < x, N(T) < \frac{T}{\mu} - \frac{x_q \sigma}{\mu^{3/2}} T^{1/2} \right] \leq \{Q(x)\}^{n(T, q)} + q,$$

worin  $n(T, q)$  den ganzzahligen Teil der Größe  $\frac{T}{\mu} - \frac{x_q \sigma}{\mu^{3/2}} T^{1/2}$  bedeutet. Davon kann man schon in Kenntnis der Verteilungsfunktion  $Q(x)$  zu einem beliebig ausgewählten Zuverlässigkeitsniveau  $1 - p$  solch ein Beanspruchungsniveau und einen von  $p$  abhängigen Wert  $q$  bestimmen, daß auf dem Streckenabschnitt  $T$  die maßgebende Beanspruchung auf dem Zuverlässigkeitsniveau  $1 - p$  niedriger als  $z_p$  sei, wo schon der Zusammenhang

$$P \left[ \max_{1 \leq i \leq N(T)} \varphi(l_i, f_i) < z_p \right] \leq 1 - p$$

gültig ist.

Betrachtet man die Aufgabe aus praktischem Gesichtspunkt, trotz den im vorhergehenden behandelten Vereinfachungen sind natürlich mehrere Näherungen durchführbar. Jedoch beschränken wir uns auf die uns zur Verfügung stehenden Messungsmöglichkeiten zur Ermittlung der kinematischen Beanspruchung, demzufolge können wir dieselbe nur in indirekten Wegen durchführen. Jedoch kann die vorgeführte indirekte Schätzung in der Praxis angewandt werden, wenn die Angaben für die Verteilung der maßgebenden Beanspruchung auf den Extremfehler-Abschnitten  $\varphi(l_i, f_i)$  sowie die entsprechenden Momente der Zykluslängen zur Verfügung stehen. Die Lösung der Aufgabe kann statistisch solcherweise angenähert werden, daß man auf Grund von konkreten Registrierungen die nacheinander folgenden (Zufall-) Zykluslängen

$$\tau_j = t_2^{(j)} - t_2^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, N(T)$$

und die  $\bar{l}_j$  und  $\bar{f}_j$  (Zufall-) Parameter des zu der Zykluslänge gehörigen "Extrem"-Fehlers ermittelt. Auf Grund der Folge  $\tau_j, j = 1, 2, 3, \dots$  können die nötigen  $i$ -ten Momente leicht angenähert werden mit Hilfe der empirischen Momente:

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{N(T)} \sum_{j=1}^{N(T)} \tau_j^i, \quad i = 1, 2, \dots$$

während die maßgebenden Beanspruchungen der "Extrem-Fehler" der  $Q(x)$  Funktion aus der Folge der Zufallgröße  $\varphi(\bar{l}_j, \bar{f}_j), j = 1, 2, \dots, N(T)$  gerechneten empirischen Verteilungsfunktion

$$\bar{Q}_T(x) = \sum_{j=1}^{N(T)} I \left[ \varphi(\bar{l}_j, \bar{f}_j) < x \right]$$

ermittelt werden können.



## Literatur

- [1] MEGYERI, J. (1993): Eisenbahnbewegungsgeometrie, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [2] MEGYERI, J. (1978): Differential-Geometrische Bestimmung kinematischer Bewegungsmerkmale bei Gleisbogen für höhere Geschwindigkeiten, *Archiv für Eisenbahntechnik*, Folge 33. pp. 65–67.
- [3] MEGYERI, J. (1981): Massgebende geometrische Ausbildung von Eisenbahngleisbogen für höhere Geschwindigkeiten, *Archiv für Eisenbahntechnik*, Folge 36. pp. 68–71.
- [4] MEGYERI, J. (1986): Bewegungsgeometrische Untersuchungen der Maßtoleranzen im Eisenbahnoberbau, *Archiv für Eisenbahntechnik*, Folge 41. pp. 65–68.
- [5] ZOBORY, I. (1992): Vasúti vontatójárművek hajtásdinamikája (Antriebsdynamik der Eisenbahnzugfahrzeuge), Doktorenabhandlung, Budapest.
- [6] ZOBORY, I. (1985): Dynamic Processes in the Drive Systems of Railway Traction Vehicles in the Presence of Excitation Caused by Unevennesses in the Track. *Proceedings 9th IAVSD Symposium on the Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks*. 1985, Swets and Zeitlinger, Lisse pp. 635–648.
- [7] HORVÁTH, S. – KERESZTES, A. – MICHELBERGER, P. – SZEIDL, L. (1982): Mathematical Model of the Load and Stress Statistics of Vehicle Structures, *Journal of Applied Mathematical Modelling*, Vol. 22, pp. 3–4.
- [8] MICHELBERGER, P. – SZEIDL, L. – KERESZTES, A. (1987): Assessment of Stress Statistics for Commercial Vehicle Frames, *Periodica Polytechnica, Transportation Engineering*, Vol. 15. N 1, pp. 3–14.
- [9] SMITH, W. L. (1958): Renewal Theory and its Remification, *Roy. Stat. Soc. ser. B*, Vol. 20, pp. 243–302.
- [10] EGLUND, G. (1980): Remainder Term Estimate for the Asymptotic Normality of the Number of Renewals, *Scan. J. Statist.*, V. 7, N 1, pp. 197–202.