PERIODICA POLYTECHNICA SER. CIVIL ENG. VOL. 38, NO. 2, PP. 231–241 (1994)

ANWENDUNG VON IRRFAHRTPROBLEMEN IN DER BESCHREIBUNG DER HYDROLOGISCHEN VORGÄNGE[1]

István KONTUR

Lehrstuhl für Wasserwirtschaft
Technische Universität Budapest
H–1521 Budapest, Ungarn

Eingegangen: March 31, 1994

Abstract

The connection of the storage and continuation equations, the average delay time and the outflow probability of the water particle are described on the basis of the random walk of water particles. Its comparison to the linear reservoir model.

The second part contains the different cases of the linear cascade models: discrete and continuous, homogenous cascade (Nash) model, superposition of linear cascades (Dooge model), discrete cascades with feedback, continuous generalized linear cascades, discrete diffuse wave model and its comparison to the cascades having feedback. Finally the time and space discretising conditions coming from the theory of the random walk are demonstrated, which are identical to the criterium of stability of a discretising scheme.

Keywords: random walk, linear cascade, diffusion wave.

1. Die Speicherungs/Kontinuitätsgleichung und die Aufenthalts/Austrittswahrscheinlichkeit

In der Hydraulik ist die Aufschreibung zu einem Punkt der Kontinuitätsgleichung wolhbekannt, das heißt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0 \tag{1–1}$$

ist, wo ρ – die Dichte und v – der Geschwindigkeitsvektor sind.

In der Hydrologie untersucht man die Änderung der in je einem Raumteil gespeicherten Wassermenge. Das Integral nach dem Volumen der Gleichung (1–1) ist

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_V \mathrm{div}(\rho v) \mathrm{d}V = 0\,, \tag{1–2}$$

wo das zweite Glied mittels des Gauss-Ostrogradskischen Satzes, durch ein Flächenintegral ersetzbar ist.

[1]Mit Unterstützung des OTKA — Themas Nr. T007252

Den praktischen Anwendungszwecken entsprechend kann diese Fläche auf die Einströmungs- und Ausströmungsflächen geteilt werden, wo dieser Integralwert negativ bzw. positiv ist (als Positive genommen die Normale der Oberfläche, die nach außen gerichtet ist), das heißt

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V - \int_{A_{\mathrm{ein}}} \rho v \mathrm{d}\vec{A} + \int_{A_{\mathrm{aus}}} \rho v \mathrm{d}\vec{A} = 0 . \tag{1–3}$$

In dieser Gleichung wird das erste Glied, mit Verwendung des Zusammenhanges von $\rho = M/V$ (Masse durch Volumen) die durchschnittliche Dichte, beziehungsweise diese von $\rho = S/V$ (Wassermenge per Volumen) zu $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$, während die zweite und dritte Glieder gerade die einströmenden und ausströmenden Wasserergiebigkeiten (Wassermengen) sind, das heißt

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - \mathbb{I}(t) + Q(t) = 0 \tag{1–4}$$

was schon der in der Hydrologie bekannten Speicherungs-Differentialgleichung entspricht.

Die in der Gleichung (1–3) angewandten Formen des Eingangs und des Ausgangs können bewahrt werden, wenn die Dichte des Flüssigkeits-flußes nicht konstant ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Wasserteilchen aus dem Raumteil V während des Zeitintervalles Δt ausfließt wenn es früher dort verweilte, (bzw. dorthin eintritt) ist q, und T, wenn es zuvor außen war

$$q = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\bar{t}}} , \tag{1–5a}$$

wo $\bar{t}$ – die durchschnittliche Durchflußzeit oder die durchschnittliche Aufenthaltszeit bedeutet.

Laut des Materialerhaltungsgesetzes ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Wasserteilchen während des Zeitintervalles Δt aus dem Raumteil V austritt, wenn es früher dort war: p, und p kann aus der Gleichung

$$p = 1 - q = e^{-\frac{\Delta t}{\bar{t}}} \tag{1-5b}$$

berechnet werden.

Aus der Differentialgleichung der Speicherung bekommt man ein zu demselben Erfolg führendes Ergebnis, wenn man das Daseinsrecht der linearen Kaskade annimmt, das heißt

$$Q(t) = KS(t) , \tag{1–6}$$

wo K – der sogenannte lineare Speicherungskoeffizient ist, die — wie man es später sehen wird — gerade dem Reziprokwert der durchschnittlichen Durchzugszeit entspricht, das heißt

$$K = \frac{1}{\bar{t}}.$$

Die Lösungen der Gleichung von

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + KS(t) = 0 \tag{1–7}$$

lauten mit den Anfangsbedingangen von $I(t) = 0$ und $S(t = 0) = S_0$ folgendermaßen:

$$S(t) = S_0 e^{-Kt} \qquad \text{und} \qquad Q(t) = KS_0 e^{-Kt}. \tag{1–8}$$

Mit der Annahme, daß das Ausfließen aller Teilchen bei der Ausströmung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit abläuft (d.h. es ein völlig vermischter Reaktor ist), entspricht das Verhältnis des während der Zeit Δt ausgeflossenen Volumens zum gesamten Volumen der Wahrscheinlichkeit q, das heißt

$$\Delta S = \int_0^{\Delta t} Q(t)\mathrm{d}t = KS_0 \int_0^{\Delta t} e^{-Kt}\mathrm{d}t = S_0 \left[1 - e^{-K\Delta t}\right] = S_0 q(\Delta t). \tag{1–9}$$

Anders formuliert, $q(\Delta t)$ ist der Quotient von ΔS und S_0, wie es aus der unterstehenden Gleichung hervorgeht:

$$q(\Delta t) = 1 - e^{-K\Delta t} = \frac{\Delta S}{S_0}. \tag{1–10}$$

Die hier aufgeschriebenen Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf die Zeit Δt und auf ein endliches Volumen, was einem in Raum und Zeit diskreten System entspricht.

2. Lineare Speicherungsreihen — Modelle

Eines des einfachsten Anwendungsgebietes des Irrfahrtproblems ist das lineare Speicherungsreihenmodell. Gemäß den im vorhergehenden Punkt geschriebenen Gesetzmäßigkeiten untersucht man je einen Raumteil, ist also das Modell in Raum diskret. Hinsichtlich der Nomenklatur der stochastischen Vorgänge ist es also diskret oder kontinuierlich, entsprechend der Zeit, die diskretisiert oder kontinuierlich sein kann. (Diskrete oder kontinuierliche Markoffsche Kette.) Für das erstere repräsentieren das Irrfahrtproblem, für das letztere aber der Poissonsche Vorgang die klassischen Beispiele. (In der Bezeichnung des Titels haben wir die Irrfahrt – obwohl wir uns in diesem Aufsatz auch mit den Markoffschen Ketten von kontinuierlichen Parametern beschäftigen – deswegen angewandt, weil dadurch die Nachfolge der Irrfahrt des Wasserteilchens veranschaulichend ist.)

Im Falle der Markoffschen Kette von diskreter Zeit charakterisiert die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $\mathbb{P}$, im Falle derselben von kontinuierlicher Zeit aber die infinitesimale Matrix $\mathbb{A}$ das System. Beide Matrizen sind quadratisch $(n*n)$, wo n – die Anzahl der benannten Zustände ist. Die Elemente der Matrix $\mathbb{P}$ sind Wahrscheinlichkeiten, also Zahlen zwischen 0 und 1, ferner ist ihre Reihensumme, aus der Kontinuitätsgleichung folgend, gleich eins.

Die Matrix $\mathbb{A}$ enthält Größen von Masseneinheit 1/Zeit, die sich im Falle der aufgrund der auf die Zeiteinheit fallenden Durchflußvolumina rechenbaren Markoffschen Kette diskreten Charakters, mit gleichen Zeitspannen Δt, als Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $\mathbb{P}$, also als der Exponent der Matrix $\mathbb{A}$ ergeben, das heißt

$$\mathbb{P} = e^{\mathbb{A}\Delta t} = \mathbb{I} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Delta t)^m}{m!} \mathbb{A}^m . \tag{2–1}$$

In den reellen physikalischen Systemen befinden sich negative Zahlen in der Hauptdiagonale der Matrix $\mathbb{A}$, aber für ihre Größen gibt es keine Einschränkungen. Die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $\mathbb{P}$ ergibt sich als eine Reihensumme aus der obigen Reihenentwicklung, da die Zeilensumme der Matrix $\mathbb{A}$ gleich 0 ist.

a) Homogene, lineare (Nash-) Kaskade, diskrete Zeit

Es seien n-zählige lineare Speicher untereinander, von oben nach unten gereiht und mit der Numerierung $i = 1, 2, \ldots, n$ versehen, und bei jedem Speicher sei q die Austrittswahrscheinlichkeit des Wasserteilchens während des Zeitintervalles Δt laut dem Zusammenhang (1–5a), dann wird die Wahrscheinlichkeit in der Hauptdiagonale der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $\mathbb{P}$ zu $1 - q$, während die in deren oberen Kodiagonale zu q sein. Die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix $\mathbb{P}$ soll noch durch je eine Spalte und Zeile $(n + 1)$ berändert werden, was dem Abflußquerschnitt —

genauer gesagt, dem Zustand der Aussenliegendheit außer der Kaskade — entspricht. Der Wert des Eckelementes $(n+1)$, $(n+1)$ beträgt 1, da wir keinen Rückschritt annehmen: der Zustand $(n+1)$ selbst repräsentiert eine Senke.

Unter solchen Bedingungen wird im Zeitpunkt m aus dem Wasservolumen $S_{1,0}$, das im Zeitpunkt 0 im ersten Speicher verstaut war, ein Wasservolumen von

$$\Delta S_{n,m} = qg(n,m)S_{1,0} \tag{2–2}$$

abfließen, wo $g(n,m)$ – die Dichtefunktion der negativen binomialen Verteilung ist, das heißt

$$g(n,m) = \begin{cases} \binom{m-1}{n-1}(1-q)^{m-n}q^{n-1}; & m \geq n \\ 0; & m < n \end{cases}. \tag{2–3}$$

b) Homogene, lineare (Nash-) Kaskade, kontinuierliche Zeit

Es seien n-zählige lineare Speicher untereinander, und die abfließende Wasserergiebigkeit sei proportional mit der gespeicherten Menge (lineare Kaskade), dann gilt der Zusammenhang

$$y_j(t) = KS_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2–4}$$

In dieser Gleichung ist die Dimension der Größe $y(t)$ eine Ergiebigkeit in $[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$, die der Größe $S_j(t)$ ein Volumen in $[\mathrm{m}^3]$, und die vom Parameter $K\,[\mathrm{s}^{-1}]$.

Die für den Speicher aufgeschriebene Differentialgleichung kann in der Form von

$$\frac{\mathrm{d}S_j(t)}{\mathrm{d}(t)} = y_{j-1}(t) - y_j(t) = KS_{j-1}(t) - KS_j(t) \tag{2–5}$$

aufgeschrieben werden und die Koeffizientenmatrix der zum Speicher n gehörenden Differentialgleichung stimmt im Falle der Substitution von $\lambda = K$ mit der infinitesimalen Matrix des reinen Poissonschen Geburtsvorganges überein, wo λ – die sogenannte Geburtsrate ist. Der Geburtsvorgang kann hier dadurch gedeutet werden, daß ein Individuum geboren wird, wenn ein Wasserteilchen in eine Kaskade gerät, deren Ordnungszahl um eins höher ist als die der untersuchten. (Beim klassischen Geburtsvorgang bedeutet die Zahl der Population den Zustand).

In der Hauptdiagonale der infinitesimalen Matrix $\mathbb{A}$ ist $-K = -\lambda$, und in deren Kodiagonale ist λ gleich konstant. Der Zustand $(n+1)$ entspricht einer Senke, und das Eckelement ist gleich 0.

Laut des Zusammenhanges (2–1) kann man erhalten, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Speicher j im Zeitpunkt t befindet, wenn es im Zeitpunkt $t = 0$ im Speicher $k \leq j$ war. Dies führt uns zu folgendem Ergebnis:

$$p(t; j, k) = e^{-Kt} \frac{(Kt)^{j-k}}{(j-k)!}, \qquad k \leq j. \tag{2–6}$$

Diese Resultate sind die Elemente (k, j) der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix. (Obere Dreieckmatrix.)

Im Zeitpunkt t wird die aus dem Speicher n abfließende Wasserergiebigkeit, die aus dem im Zeitpunkt $t = 0$ im ersten Speicher verstauten Wasservolumen $S_{1,0}$, stammt, die folgende:

$$y_n(t) = KS_n(t) = Kp(t; n, 1)S_{1,0} = K \frac{(Kt)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-Kt} S_{1,0}. \tag{2–7}$$

Wie es ersichtlich ist, ist $p(t; n, 1)$ der Wert der durch den Parameter Kt charakterisierbaren Poissonschen Verteilung bei n: das heißt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein im Zeitpunkt $t = 0$ im ersten Speicher befindliches Wasserteilchen in welchem Speicher verweilt, einer Poissonschen Verteilung folgt.

c) Das Dooge-Modell als Superposition von linearen Speichern

Als Überlagerung der homogenen linearen Nash-Kaskaden bekommt man das Wassersammelmodell von Dooge, das als Summe von Systemen mit geteilten Parametern sowie die von Teilsystemen zustande kommt. Im Falle von in der Zeit diskreten Kaskaden von gleichen Parametern q wird das im Zeitpunkt m abfließende Wasservolumen

$$\Delta S_{n,m} = q \sum_{k=1}^{n} \binom{m-1}{k-1} (1-q)^{m-k} q^{k-1} S_{K,0} \tag{2–8}$$

sein.

Im Falle eines Wassersammelmodells mit geteilten Parametern betrifft der auf das Teilgebiet d$\mathbb{A}$ fallende Niederschlag $x(t=0)$, als Diracscher Deltaimpuls, und die auf diese Impulse gegebenen Antwortfunktionen summieren sich, also

$$y_n(t) = K \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(Kt)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-Kt} x(t=0) \mathrm{d}\, \mathbb{A}_k \,. \tag{2–9}$$

Bei einem inhomogenen Kaskadenmodell besitzen die einzelnen Teilimputs je andere Parameter K und n.

d) Homogene, lineare, verallgemeinerte Rückfluß- (Kontur-) Kaskade, diskretisierte Zeit

Die Verallgemeinerung der linearen Speicherreihen (Punkt 2a) besteht darin, daß hier auch der Rückschritt bei der Irrfahrt erlaubt ist. Das Wasserteilchen gerät während der Zeit Δt mit der Wahrscheinlichkeit q in den um eins tiefer liegenden und mit der Wahrscheinlichkeit p in den um eins höher liegenden Speicher: dann ist die Wahrscheinlichkeit des Stehenbleibens gleich $1-p-q$. Die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix der die Irrfahrt beschreibenden Markoffschen Kette besitzt die folgende Form:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & & & & & & & & \\ \hline p & 1-p-q & q & & & & & & \\ & p & 1-p-q & q & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & p & 1-p-q & & q \\ \hline & & & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} (0 \\ \\ (1 \\ (2 \\ \vdots \\ (n \\ \\ (n+1 \end{array} \,. \tag{2–10}$$

Die die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix berändernde Zeile und Spalte 0 beziehungsweise $(n+1)$ stellen die oberen bzw. unteren Randbedingungen dar. Die Wahrscheinlichkeitsparameter p und q in den Elementen $(1,\,0)$ und $(n, n+1)$ der Matrix $\mathbb{P}$ bedeuten die sogenannte permeable Wand, aber wenn sich hier eine Null befindet (und in der Hauptdiagonale die Größen $1-q$ bzw. $1-p$ sind), ist dies der Fall der reflektierenden Wand.

Die nach dem Schritt m in den Speichern gespeicherte Wassermenge ist

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{s}_0 \mathbb{P}^m \,, \tag{2–11}$$

wenn im Speicher am Anfang bestimmte Volumina von $\mathbf{s}_{0,0}$, $\mathbf{s}_{1,0}$, $\ldots$, $\mathbf{s}_{n+1,0} = \mathbf{s}_0$ waren.

Die Potenz $\mathbf{P}^m$ kann in einfacheren Fällen auch explizit ausgedrückt werden. Wenn z.B. oben eine reflektierende und unten eine permeable Wand sind, ist das Element (i,j) der Matrix $\mathbf{P}^m$

$$[\mathbf{P}^m]_{i,j} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{i-j} \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin(n+1-i)\vartheta_k \sin(n+1-j)\vartheta_k}{n+1+T_n(\lambda_k)U_n(\lambda_k)}.$$

$$(1-p-q+2\sqrt{pq}\cos\vartheta_k)^m\ , \tag{2–12}$$

wo

$$T_n(\lambda_k) = \cos n\vartheta_k \qquad \text{und} \qquad U_n(\lambda_k) = \frac{\sin(n+1)\vartheta_k}{\sin\vartheta_k}\,.$$

Tschebischeffsche Polynome erster und zweiter Art sind; $\lambda_k = 2\cos\vartheta_k$ sind die Eigenwerte der Matrix die aus der folgenden charakteristischen Gleichung:

$$\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} - \sqrt{\frac{p}{q}}\,\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} = 0$$

erhalten werden können.

e) Homogene, lineare, verallgemeinerte Kaskade, kontinuierliche Zeit

Es seien n-zählige lineare Kaskaden untereinander, aber jetzt fließe nicht nur eine Wasserergiebigkeit von $K * S_j(t)$ aus der oberen Kaskade in die untere, sondern auch ein Wasservolumen von $R * S_{j+1}(t)$ aus der unteren Kaskade in die obere, wo K und R Größen von Dimension $1/s$ sind, und $K > R$ ist.

Die für den Speicher j aufgeschriebene Speicherung-Differentialgleichung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{\mathrm{d}S_j(t)}{\mathrm{d}t} = KS_{j-1}(t) - (K+R)S_j(t) + RS_{j+1}(t)\,. \tag{2–13}$$

Wenn man die Substitutionen von $K = \lambda$ und $R = \mu$ anwendet, wo λ die Geburts- und μ die Sterblichkeitsraten sind, ist dies dann ein Poissonscher Geburts – Sterblichkeitsvorgang, dessen infinitesimale Matrix der

Koeffizientenmatrix der Speicherungs-Differentialgleichung ist, das heißt

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ R & -K-R & K & & & & \\ & R & -K-R & K & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & R & -K-R & K \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} . \qquad (2\text{–}14)$$

Zur Auflösung der Differentialgleichung benötigt man die Exponentialfunktion der Matrix $\mathbb{A}$, die gleichzeitig der Exponent der infinitesimalen Matrix der zeitlich kontinuierlichen Markoffschen Kette ist. Aufgenommen die Zeit $t = \Delta t$ bekommt man gerade die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix der diskretisierten Form des Modells von kontinuierlichen Zeit, deren Element (i, j)

$$\left[e^{\mathbb{A}\Delta t}\right]_{i,j} = \frac{2e^{-(K+R)\Delta t}}{n+1} \left(\sqrt{\frac{K}{R}}\right)^{i-j} \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k \Delta t} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \sin \frac{ik\pi}{n+1} , \qquad (2\text{–}15)$$

wo

$$\lambda_k = 2\sqrt{KR} \cos \frac{k\pi}{n+1}$$

ist.

f) Diskretisierung des Diffusions-Wellenmodells einer Flußstrecke als verallgemeinerte Rückflußkaskade

Die Anwendung der Diffusions-Wellengleichung in der Modellierung des flußseitigen Flutwellen-Herabziehens ist ein wohl bekannter Prozeß. Die Form der Diffusions-Wellengleichung ist die folgende:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -c\frac{\partial Q}{\partial x} + D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + f(x,t) , \qquad (2\text{–}16)$$

wo Q – die Wassermenge in $[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$, c – die Wellenherabzugsgeschwindigkeit in $[\mathrm{m/s}]$, D – der Diffusionsfaktor in $[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$ und $f(t)$ – die sich aus dem ausseren Zufluß gebende Wassermenge-Veränderung in $[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2]$ sind.

Mit Anwendung vom einfachsten zentralen Schema, aufgeteilt in gleiche Strecken von Δx =konstant, ist die durch räumliche Diskretierung erhaltbare j-te Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}Q_j(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{2\Delta x}\left[Q_{j+1}(t) - Q_{j-1}(t)\right] +$$

$$+\frac{D}{(\Delta x)^2}\left[Q_{j-1}(t) - 2Q_j(t) + Q_{j+1}(t)\right] + f_j(t)\,. \tag{2–17}$$

Durch die Ersetzung von $\alpha = -\frac{c}{2\Delta x}$ und $\beta = \frac{D}{(\Delta x)^2}$ ist die Koeffizientenmatrix der Differentialgleichung gleich der Matrix (2–14), das heißt

$$R = \alpha + \beta = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{D}{\Delta x} - \frac{c}{2}\right)\,; \qquad K = \beta - \alpha = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{D}{\Delta x} + \frac{c}{2}\right)\,. \tag{2–18}$$

In der Hauptdiagonale befindet sich die Größe $-2\beta = -[K+R] = -2D/(\Delta x)^2$. Die Maßeinheit ist auch hier das Reziproke der Zeit.

In Kenntnis der Koeffizientenmatrix bildet die Bestimmung der Exponentialfunktion der Matrix die Aufgabe, wie es im vorherigen Punkt zu sehen war. Die Ähnlichkeit zwischen dem linearen Speicherungs-Reihenmodell und dessen zu den Wassergiebigkeiten aufgeschriebenen Form geben die Formeln (1–6) beziehungsweise (2–4) der linearen Kaskade.

3. Folgerungen des Irrfahrtproblems

Durchschauend die in Raum diskretisierten Fälle der in Raum und Zeit kontinuierlichen Beschreibung, bringt der Koeffizientenmatrixexponent der infinitesimalen Matrix der zeitlich kontinuierlichen Markoffschen Kette den Zusammenhang zustande. In Betracht genommen nur das Glied $m = 1$ in der Formel (2–1), ergibt sich aus der Gegenüberstellung der in den Punkten 2a und 2b beschriebenen Modelle das Ergebnis von

$$q = K\Delta t \qquad \text{und} \qquad q' = e^{-Kt}K\Delta t\,,$$

während aus der Gegeneinanderstellung der in den Punkten 2d, und 2e, beschriebenen Modelle dasselbe von

$$q = K\Delta t \qquad \text{und} \qquad p = R\Delta t$$

und q' ist ein aus der Gleichung (2–6) erhaltbarer Wert.

Zwischen den Parametern D und c des in Raum diskretisierten Diffusions-Wellenmodells sowie den Parametern K und R der Rückfluss-Kaskade gibt die Formel (2–18) den Zusammenhang an, in Betracht genommen auch den Wert der Veränderlichen x. Aus dem positiven Wert der Faktoren R und K folgt, daß beim zeitlich kontinuierlichen Modell $\Delta x < 2D/c$ ist. Im Falle eines in Raum und Zeit diskretisierten Diffusions-Wellenmodells bekommt man noch auch die weitere Bedingung von $\Delta t < 2D/c^2$, daraus folgend, daß die Elemente (2–10) der Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix nur positive Zahlen sein können.

Die zeitlich im voraus diskreten Irrfahrtmodelle können den diskretisierten Gestalten der kontinuierlichen Modelle entsprechen lassen, wenn während des Zeitschrittes Übergänge nicht nur in die benachbarten, sondern auch in die weiteren Kaskaden vorkommen können. Im Falle der Nash-Kaskade werden diese Wahrscheinlichkeiten durch die Formel (2–6), aber im Falle der Rückflußkaskade durch die Formel (2–13) beschrieben.

Literatur

KONTUR, I. (1975): Some Stochastic Runoff Models. *Proceedings Second World Congress, International Water Resources Association, New Delhi*, December 1975. Volume 5, pp. 61–71.

KONTUR, I. (1980): Stochastic Model for the Water Cycle, *Periodica Polytechnica Ser. Civil Eng.*, Vol. 24, pp. 239–252.

KONTUR, I. – AMBRUS, S. (1981): Random Walk Models Applied in Water Resources Management. Environmental System Analysis and Management, S. Rinaldi (editor), North–Holland Publishing Company, IFIP, 1982, pp. 131–163.

KONTUR, I. (1984): Random Walk Model of Water Movement in Unsaturated Zones, *Proceedings of the International Symposium, RIZA*, Munich, October 1984, Ed.: P. Udluft, Vol. 1, pp. 365–373.

KONTUR, I. – AMBRUS, S. (1984): Runoff Simulation with a Random Walk Model, Cybernetics and Systems Research 2. R. Trapp (Ed.) Elsevier Science Publishers B. V. (North–Holland) 1984. pp. 209–216.

KONTUR, I. – SZÉL, S. – JÓZSA, J. (1991): Mixing of Reacting Subtances by Simple Random Walk Model. *Proceedings XXIV. IHAR Congress*, Madrid 1991.

PREKOPA, A. (1962): Valószínűségszámítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

RÓZSA P. (1976): Lineáris Algebra, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.