

# ANALYSE DES SÉRIES DES DONNÉES DES DÉBITS DES COURS D'EAU DANS LE DOMAIN DES ÉTIAGES

András PRÉKOPA, Ádám BOSZNAY, Tamás SZÁNTAY, István ZSUFFA

Université Technique de Budapest

Reçu le 31 march 1994

## Abstract

The discharges of the water courses are generated by the procedure of the precipitation — which is an easily analysable stochastic procedure. The procedure of the discharges is transformed by the boundary conditions of the water system. Consequently the procedure is a very complicated structured stochastic procedure. The Cramer-Leadbetter crossing method was constructed for analysis of such complicated stochastic procedures. For the water management purposes it is needed to complete the random variables introduced by Cramer and Leadbetter with the sum and extrem values of these parameters. Finally the stochastic procedure will be characterised by the series of conditional probability distribution of 17 random variables defined by the different crossing levels.

To complete the information the Poissonian structure of the highwaters and the exponential character of the recession curves were used. A special tank model was used to deduce analytical formulas for the distribution functions of these 17 random variables. Two more sophisticated models were constructed — these models the conditional probability functions can be estimated by numerical algorithms with help of the adequate software.

## Le Régime Hydrologique des Rivières

L'origine des débits des étiages présentait pour longtemps une question insoluble aux esprits réfléchis. La rivière d'Arno, débitant d'eau dans les mois chauds d'été sans précipitations, a incité le premier maître du penser de science de nature, Léonardo da Vinci, à construire un modèle hydrologique bizarre et particulier: d'après lui l'eau de telles périodes d'étiages n'est pas autre chose que le sang de la terre, de cet être vivant, qui accède à la surface à travers des blessures de la terre, à travers des sources. Et — selon la conception physiologique de son époque — c'est la respiration de la terre, la marée de la mère, qui est la force motrice de cette circulation du sang.

Quelques années plus tard, c'était aussi un artiste, Palissy, qui a décrit le premier le fait que pendant les étiages les eaux des cours d'eau tirent leur origine également de la précipitation, de sa partie s'infiltrant dans le sol. Ces particules d'eau s'infiltrant fréquemment n'atteignent la surface par

les sources ne pénétrant dans le lit des cours d'eau qu'après des siècles, à travers les pores des couches géologiques sableuses et graveleuses, à travers des failles des roches ou des galeries des couches karstiques .

Toutefois la voie souterraine de l'eau reste cachée devant les recherches analytiques. On agit en vain en décrivant ce processus mécanique par les équations de mouvement et des matériaux relativement simples et bien traitable si les conditions aux limites, l'épaisseur et la porosité des couches de filtration, la géométrie des galeries et des failles sont inconnues et resteront toujours inconnues, puisque ce système infiniment complexe et embrouillé n'est point à suivre sous la surface du sol.

Grace au caractère infiniment complexe des conditions aux limites et au caractère fondamentalement aléatoire des conditions initiales générant le ruissellement, des processus des précipitations on doit accepter que les processus du régime hydrologique des cours d'eau seront représentés par des fonctions aléatoires. Toutefois ce processus aléatoire fut composé par la totalité d'évènements mécaniques qui suivent les lois de la mécanique des fluides. Ces lois mécaniques influencent fondamentalement les processus aléatoires du régime hydrologique des cours d'eau constituant ainsi la structure particulière de ce processus aléatoire. Donc, en conclusion, le caractère stochastique du processus stochastique typique structuré du régime hydrologique des cours d'eau est dû à la condition initiale, c'est à dire au processus aléatoire des précipitations alors que sa structure est due aux processus mécaniques, ou plutôt à leurs conditions aux limites. Cependant le nombre infini des éléments des conditions aux limites exclut la possibilité d'une recherche analytique basée sur un déterminisme "à priori". Le structure n'est descriptible qu' "à posteriori" à l'aide de l'analyse des évènements observés.

A la description de la structure on doit remplacer le système inconnu caractérisé par une géométrie infiniment compliquée par les modèles de structure simple mais adaptable et ajustable. L'image physique de ces modèles n'est guère plus proche au système inconnu de la nature que celle du modèle de Léonardo du XV-ème siècle. Mais au cours de l'application pratique du modèle ce n'est pas l'image physique mais la maniabilité numérique qui est le facteur déterminant.

Donc la série de temps des débits caractérisant le processus aléatoire du régime hydrologique d'un cours d'eau n'est point une ordre de succession simple des valeurs aléatoires (c'est à dire un processus de "bruit blanc"). Même la série des débits journaliers n'est pas analysable par les méthodes raffinées ARMA, ARIMA appliquées avec succès dans l'hydrologie, par exemple dans analyse des volumes d'eau mensuels. Il nous faut prendre connaissance que la série des débits des cours d'eau s'est formée d'une série aléatoire des fonctions de temps des crues et des /'tiages intercon-

nectées, au lieu d'être une série aléatoire sans structure des simples valeurs scalaires.

La forme de l'hydrogramme d'une crue est déterminée par l'intensité et durée aléatoires de la précipitation efficace (c'est à dire de la part s'écoulant sur la surface) ainsi que par la géométrie du bassin versant régularisant le phénomène de concentration sur le bassin versant. Les variations temporelles des débits des périodes des étiages provenant des eaux souterraines sont régularisées par les conditions potentielles et de pression des couches drainées. Les grands espaces de stockage compensent la variation des intensités spatiales et temporelles des précipitations. En conséquence on décrit les débits des étiages par un processus typique de vidange.

C'est la cascade de  $k$  morceaux de réservoirs linéaires au paramètre  $\Phi$  connectés en série qui présente le modèle hydraulique de la transformation linéaire nommée hydrogramme unitaire instantanée utilisée il y a des décades à la description du phénomène de la concentration (NASH, 1958). La courbe de tarissement exponentielle caractérisant des débits des étiages peut être modélée par la vidange d'un seul réservoir linéaire à paramètre  $\alpha$  (ROCHE, 1962).

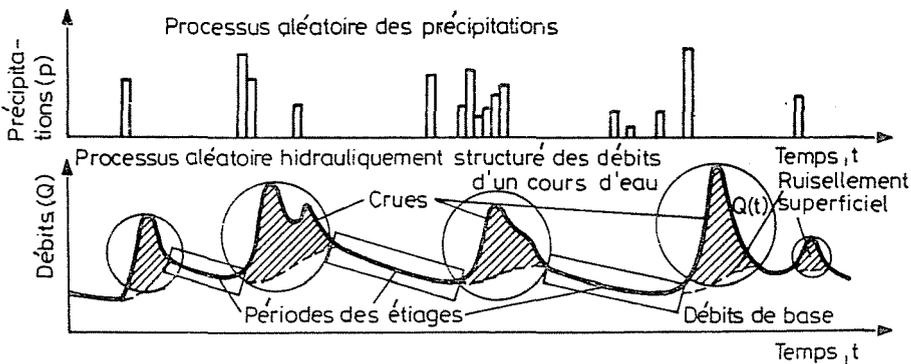


Fig. 1. Le processus stochastique des débits d'un cours d'eau

Hors de la caractérisation de la série des débits observés dans une seule section de la station limnimétrique il faut aussi caractériser le processus de la formation du régime hydrologique le long du cours d'eau. L'un des procédés à caractériser la transformation d'hydrogrammes des crues le long des rivières nommés méthode Muskingum est modélée par un tel réservoir linéaire à deux paramètres où l'eau stockée dans le réservoir prismatique n'est pas la fonction linéaire des débits seuls se déversant mais également des débits entrant.

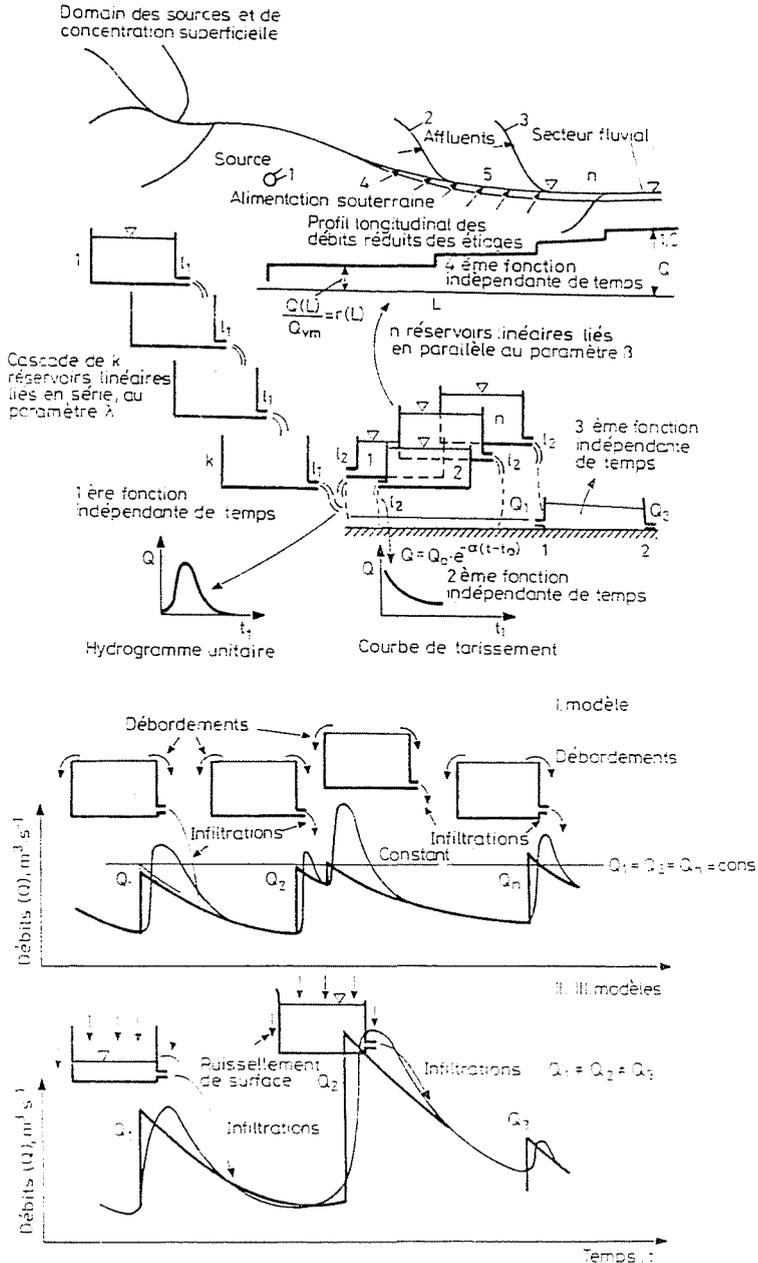


Fig. 2. Les modèles de la structure des processus hydrologiques des cours d'eau

Tableau 1

	Ruissellement de surface	Ruissellement alimenté des ressources souterraines
Section (station limnimétrique)	$U(t)$ Hydrogramme unitaire Cascade de $k$ morceaux de réservoirs linéaires aux paramètres identiques $\Phi$ $Q(t) = \int^t U(x-t)L(x)dx$	$Q(t)$ Courbe de tarissement Un seul réservoir linéaire à paramètre $\alpha$ $Q(t) = Q_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$
Secteur d'une rivière	$Q_k(t) = f\{Q_b(t), S(t)\}$ Transformation d'hydrogramme Un réservoir bilinéaire  $\delta S(t) = a\{pQ_b(t) + [1-p]Q_k(t)\} + b$	$r(L)$ Profil en long des débits réduits des étiages $n$ réservoirs linéaires aux paramètres identiques $\alpha$ connectés en parallèle $r(L) = \frac{Q(L,t)}{Q(0,t)}$

En conclusion on a résumé les quatre fonctions indépendantes du temps décrivant la structure du processus aléatoire du régime hydrologique d'un cours d'eau dans le tableau I. et les modèles respectifs dans la *Fig. 2*. Au lieu des modèles les plus simples énumérés ci-devant au modelage de l'alimentation souterraine on peut aussi adapter les autres modèles éventuellement mieux ajustables. Par exemple, la courbe de tarissement peut être approchée — à l'aide de l'équation différentielle de Dupuit-Thiem — par une fonction de puissance à l'exposant négatif (ROCHE, 1962), respectivement le profil longitudinal des débits réduits est mieux à modeler par les réservoirs linéaires aux paramètres différents connectés en parallèle et la graphique simple de profil pourra être remplacée par une abaque nomographique.

### Analyse du Processus Stochastique Structuré du Régime Hydrologique d'un Cours d'Eau

Le fonctionnement du système hydraulique modelant les processus mécaniques est dirigé par le système des conditions initiales du processus aléatoire des précipitations.

On ne peut plus savoir des processus aléatoires des précipitations que les événements pluvieux suivent un processus des incréments indépendants, c'est à dire le nombre des événements pluvieux doit être caractérisé par la loi Poisson, ou — ce qui en est équivalent — la longueur des périodes sèches entre deux pluies successives est une variable aléatoire à la loi exponentielle (SZÍGYÁRTÓ, 1960).

Conformément au caractère aléatoire du processus pluvieux le processus du régime hydrologique d'un cours d'eau généré par ceci doit être analysé par les méthodes d'analyse des fonctions aléatoires. Au cours de l'analyse des données d'observation journalières en considérant les séries d'observation des années comme des réalisations séparées, en cas d'une série des observations homogènes convenablement longue on pourra fournir les réponses riches en informations aux questions posées par la pratique.

La méthode de "crossing" proposée à l'analyse des processus aléatoire bien compliqués (CRAMER-LEADBETTER, 1968) n'était pas absolument inconnue pour les hydrologues. C'était encore en 1948 que Prof. Lászlóffy a recommandé l'introduction de la surface des durées au lieu de la courbe des durées des valeurs des débits journaliers en interaction bien à calculer, mais malaisés à s'interpréter. Cette surface des durées n'est rien de moins que la loi de distribution conditionnelle

$$F(x|y) = p(\Sigma t \leq x | Q_i = y)$$

approchée par la distribution des fréquences calculée des données observées. Dans la formule — suivant la terminologie de Cramer-Leadbetter -  $\Sigma t$  est la somme des variables aléatoires  $t$  nommée "longeurs d'excursion montagnaise" et définies par la coupe ("crossing")  $Q_i$ , c'est à dire la somme des longueurs des périodes au manque d'eau relative.

En effet Cramer et Leadbetter ont recommandé dans leur livre devenant renommée que les processus aléatoires bien compliqués soient caractérisés par une série des distributions de probabilité conditionnelle des valeurs aléatoires mutuellement indépendantes définies par les coupures ("crossings") aux valeurs  $Q_i = y$  du processus.

En effet le processus aléatoire  $Q(t)$  sera caractérisé par les séries des lois de distribution de probabilité conditionnelle à la forme

$$F(x|y) = P(\mu \leq x | Q_i = y)$$

où la variable aléatoire  $\mu$  peut être (voir Fig. 3.)

- $n$  — nombre des sections
- $th$  — longueur de l'excursion montagnaise, c'est à dire longueur de la période relativement humide
- $tv$  — longueur de l'excursion de vallée, c'est à dire longueur de la période relativement sèche
- $h_{\max}$  — hauteur du sommet de mont, c'est à dire la valeur maximum locale au dessus de la coupure, de demande d'eau  $Q_i$
- $d_{\max}$  — profondeur maximum de la vallée, c'est à dire la différence entre la demande d'eau  $Q_i$  et le débit minimum local

$V_h$  – la surface du mont c'est à dire le volume d'eau de la crue au dessus de débit  $Q_i$ ;

$V_v$  – la surface de la vallée, c'est à dire le volume d'eau manquant par rapport à la demande  $Q_i$ .

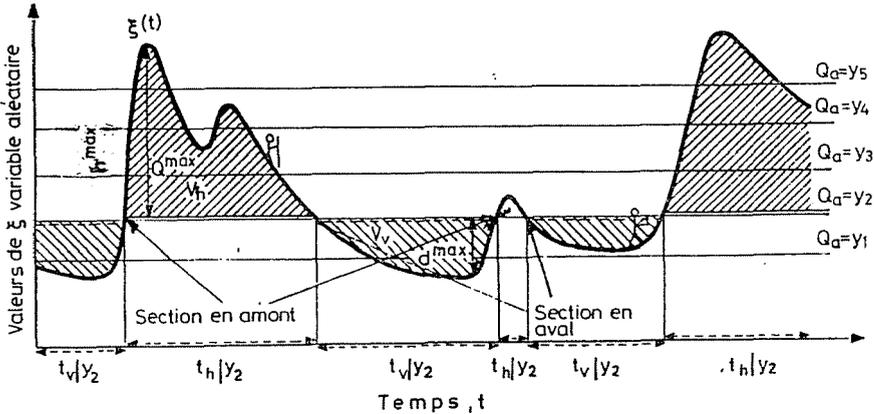


Fig. 3. Analyse d'un processus stochastique à l'aide de la méthode de "crossing"

Les scalaires recommandés par Cramer et Leadbetter, c'est à dire les valeurs aléatoires  $\mu$  mutuellement indépendantes définies par les différents niveaux de coupure  $Q_i = y$  sont les indices des ressources en eau bien utilisés dans la pratique de l'aménagement en eau, dont les probabilités conditionnelles liées aux valeurs caractérisent excellentement la sécurité du service d'eau, ainsi que le risque rencontré par le service d'eau demandée.

En raison des exigences de l'aménagement en eau, auprès des variables aléatoires définies par Cramer et Leadbetter — ou mieux à l'aide de celles-ci — on pourra enrichir le tas des valeurs aléatoires assurant la description du processus stochastique structuré par d'autres variables aléatoires complémentaires.

En raison des calculs d'optimisation il est bien avantageux de lier des variables aléatoires aux années particulières. En conséquence on va définir les variables annuelles suivantes:

$t_{\max}$  – longueur maximum annuelle des périodes relativement sèches

$\Sigma t$  – la somme annuelle des longueurs des périodes relativement sèches

$V_{\max}$  – la valeur maximum annuelle des volumes manquant d'une période continue,

$\Sigma V$  – la somme annuelle des volumes manquant

De même les variables aléatoires respectives pourront être interprétées aux paramètres des “excursions de montagne” caractérisant les conditions de la situation de défense contre les crues.

Les lois de distribution des variables aléatoires énumérées ci-devant sont bien estimables à l'aide des échantillons statistiques des variables aléatoires définies par les coupures (“crossings”) des séries des données homogènes suffisamment longues ( $N > 30$  ans): les maxima annuels à l'aide des lois des valeurs extrêmes (lois Gumbel ou Fréchet) les sommes annuelles à l'aide de la loi normal (Gauss-Laplace) sont en général bien caractérisables.

Cependant c'est le manque des échantillons statistiques convenablement longues et homogènes qui est le problème permanent de l'hydrologie. Le nombre des éléments dans l'échantillon dépend du point initial de l'observation qui ultérieurement est inaltérable. Les problèmes de l'aménagement en eau à résoudre se présentent en raison des exigences actuelles dans les lieux et points de temps plus ou moins indépendants des lieux et des point de départ des observations. Pour cette raison c'est assez souvent qu'on doit déduire les paramètres statistiques et estimer les coefficients de risque et de sécurité concernant la service des demandes d'eau à l'aide des séries d'observation relativement courtes de 10 à 20 ans.

### Utilisation Intensifiée du Trésor des Informations des Séries d'Observation Courtes

Les 10 à 20 données de l'échantillon sont entièrement insuffisantes à déduire des paramètres statistiques caractérisant la fonction de répartition des maxima et des sommes annuelles, la quantité des informations est trop restreinte pour cela. Prof. Bernier était le premier (BERNIER, 1963), et après lui presque simultanément M. STRUPCZEWSKI (1967) et MM. TODOROVIC et ZELENHAZIC (1968) qui — au cours de leurs travaux d'analyse des crues — ont aperçu la possibilité de l'utilisation des informations excédantes concernant la loi Poissonienne des nombres des pluies et en conséquence des nombres des crues.

En effet dans le domain des débits des étiages on aura des informations complémentaires. Le processus du vidange des ressources d'eau souterraines est bien représentable — dans la plupart des cas pratiques — par une courbe exponentielle à l'exposant négatif suivant le modèle de la vidange d'un réservoir linéaire. Conformément à ce modèle le régime hydrologique d'un cours d'eau — au moins dans le domain des étiages —

est bien caractérisable par un processus Poissonien secondaire, ou comme disent Cox et Wilkinson, par un processus du type Takács.

Le processus classique de Takács fut préparé à analyser le processus composé par la superposition des fonctions de temps de courant électrique suivant des courbes exponentielles à l'exposant négatif induites par les impacts des électrons dont le nombre est caractérisé par la loi Poisson, c'est à dire que la distribution des longueurs des périodes séparant les impacts doit être exponentielle (*Fig. 4/d*).

Le modèle du régime hydrologique des cours d'eau est fortement différent: au cours d'une pluie le réservoir linéaire dirigeant le régime hydrologique se remplit, et après la cessation de la précipitation la vidange du réservoir, prend son commencement suivant une courbe exponentielle. Ce processus de vidange dure jusqu'au moment où une pluie nouvelle va remplir le même réservoir. Après ça le processus de vidange commence de nouveau. Donc les processus particuliers ne se superposent pas, mais ils recommencent d'un certain niveau de départ.

Quant à la relation entre le remplissage des réservoirs souterrains et le ruissellement de surface on la peut approcher par plusieurs modèles.

En cas des bassins versants aux couches parfaitement perméables (p.e. couches gravuleuses ou couches karstiques non pas couvert) le ruissellement de surface ne se forme qu'après le réservoir souterraine est entièrement rempli et son débordement a commencé. Dans un tel cas, après que la crue de ruissellement de surface provoqué par le débordement du réservoir a quitté la section, le vidange du réservoir commence toujours du même niveau avec le même débit et ce processus du vidange continue jusqu'à la pluie suivante remplissant de nouveau le réservoir souterraine. (voir *Fig. 4/a*, I-er modèle).

Au contraire, en cas des bassins versants couverts par couches peu perméables le ruissellement de surface ne se produise que si l'intensité de la précipitation dépasse celle de l'infiltration. Donc le réservoir souterrain — suivant l'intensité et la durée de la précipitation — se remplit aux niveaux différents et par conséquence le processus de vidange partit de ces niveaux différents. Puisque les intensités et les durées des précipitations sont essentiellement des valeurs aléatoires, leurs caractéristiques, et le stockage souterraine donc la valeur initiale du vidange se développant en fonction de ces caractéristiques doivent être aussi aléatoires. La distribution de probabilité de cette valeur aléatoire ainsi déterminée sera approchée par la loi exponentielle à un seul paramètre. (*Fig. 4/b*, modèle II.)

Le processus construit selon ce modèle II. — p.e. en cas d'une génération des données — est chargé par contradictions. En effet, au cours de la présentation d'une précipitation nouvelle le processus de vidange se termine et pendant la crue le réservoir se remplit. Donc, le vidange va partir

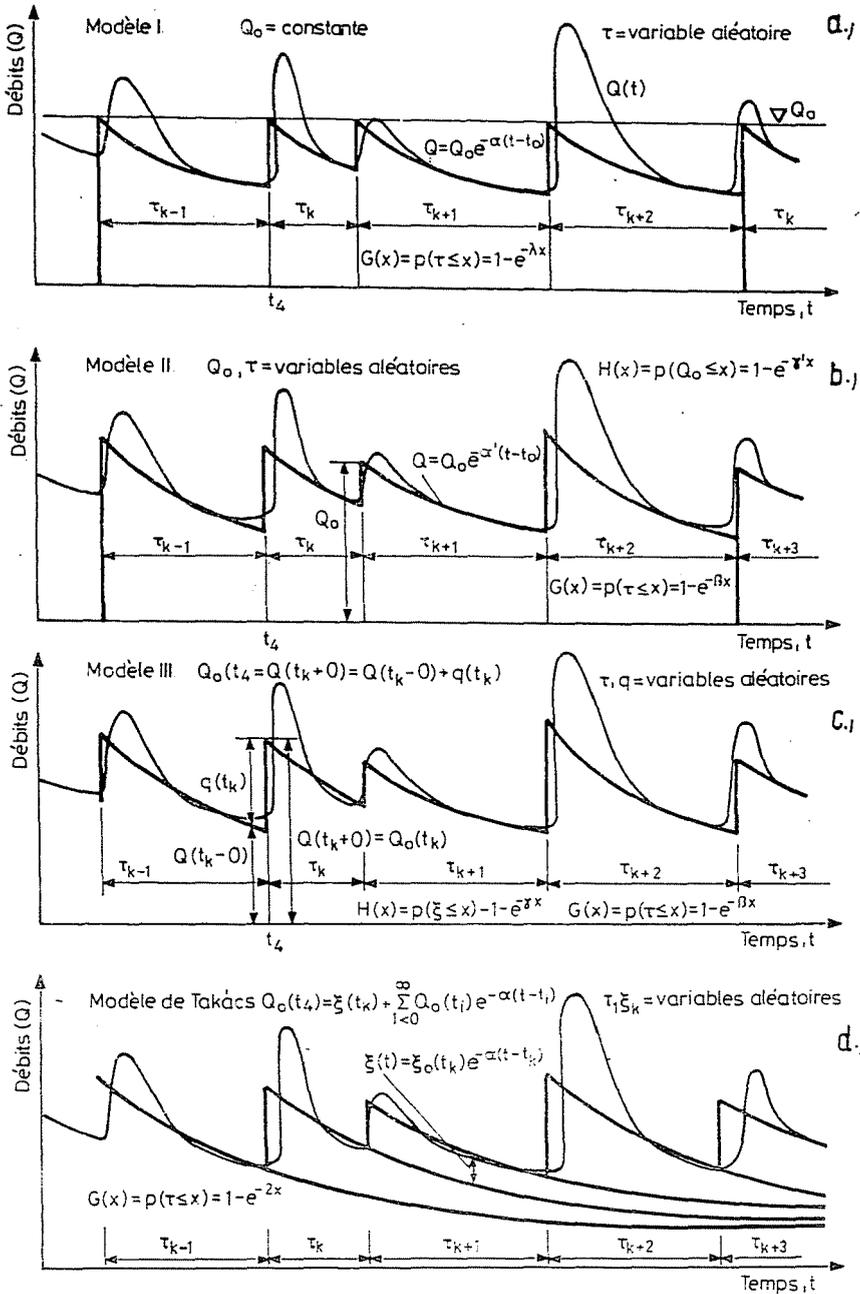


Fig. 4. Trois variantes des processus secondaires Poissoniens approchant dans le domaine des étiages le processus des débits d'un fleuve et le processus classique de Takács

d'un niveau plus élevé. Donc un élévation se superpose à la minimum valeur dernière de la courbe de tarissement antérieure et ainsi la courbe de tarissement doit partir toujours d'un tel niveau supérieur. Cette exigence ne se réalise qu'à la condition qu'au lieu de la valeur initiale on calcule avec l'accroissement de la valeur antérieure par laquelle le débit de courbe de tarissement s'est augmenté au cours de la crue supposant qu'il y a une distribution exponentielle. (*Fig. 4/c*, modèle III.)

L'identification de physique de la construction de modèle démontre les exactitudes inévitables des modèles. En effet les réservoirs des terraines karstiques se remplissant rapidement se vident en effet suivant une courbe exponentielle à condition qu'ils ne recevront ravitaillement qu'au cours des périodes de ruissellement superficiel. Ce processus de physique peut être troublé par des précipitations à faible intensité qui, en infiltrant dans le sous-sol, augmentent le niveau de nappe et troublent le processus de vidange. En même temps c'est aussi évident qu'il y a beaucoup de précipitations faibles qui ne remplissent pas les réservoirs, donc ne provoquent pas de ruissellement de surface. Par conséquence le nombre des crues, or les intervalles des crues successives ne sont pas identiques au nombre des précipitations or aux durées des périodes sèches. Donc la distribution exponentielle des durées entre les crues n'est pas une hypothèse "à priori" justifiable, on doit la tester, par exemple à l'aide d'un système de coordonnées semilogarithmiques ou à l'aide de l'analyse numérique de l'exponentialité.

Quant aux sous-sols caillouteux l'hypothèse de base du modèle I. — selon les expériences — s'est bien accomplie. En même temps on peut prouver, des points de vue et pratique et théorique, que, dans un tel cas, les courbes de tarissement sont mieux ajustables par les fonctions de puissance à l'exposant négative au lieu des fonctions exponentielles.

En cas des sols vaseux aux coefficients de filtration faibles le ruissellement de surface est la fonction de l'état de sol qui se forme en fonction des précipitations antérieures, donc des nombres des crues précédentes. En conséquence, sur un tel sous-sol le caractère de processus des accroissements indépendants des crues est douteux.

En effet le choix et l'adaptation du modèle exige la justification des hypothèses de base. Donc des tests adéquats doivent être incorporés dans les algorithmes et logiciels.

### Les Algorithmes des trois Modèles

Suivant les trois hypothèses détaillées ci-devant aux trois modèles en question, trois algorithmes de calcul et trois méthodes d'application ont été élaborés.

C'est l'estimation de la loi de probabilité conditionnelle des débits inférieurs à la valeur  $X$ :

$$F(x|t) = p(Q \leq x | T \leq t) ,$$

qui forme le devoir de base à résoudre.

En sa connaissance les probabilités des maxima et des sommes des longueurs des périodes relativement sèches et des volumes d'eau manquant caractérisant la sécurité ainsi que les risques de la livraison des demandes d'eau sont également calculables.

Au calcul de la loi de probabilité conditionnelle en question c'est la loi de probabilité des débits minimums des points de temps finals des périodes sèches qui doit être calculée antérieurement. En la connaissant la loi de probabilité des minimums annuels est aussi calculable.

On obtient les valeurs minimums des débits directement des valeurs  $d_{\max}$  "des points plus profonds des vallées" définies par la méthode de "crossing", puisque évidemment:

$$Q_{\min} = Q_i - d_{\max} .$$

où  $Q_i$  est le niveau de demande d'eau, c'est à dire le niveau de "crossing".

En effet c'est la loi de probabilité conditionnelle

$$F(x|y) = p(d_{\max} \leq x | Q_i = y) ,$$

qui est à calculer tout d'abord.

L'analyse se limite aux débits minimums prenant naissance des ressources souterraines, donc le ruissellement de surface, c'est à dire des débits des crues sont sans intérêt. C'est pourquoi les courbes de tarissement suivant les hydrogrammes des crues furent allongées en sens inverse dans le temps jusqu'au point des débits minimums antérieurs aux hydrogrammes des crues à être analysées dans les suivants.

En cas des fleuves relativement grandes cet allongement des courbes de tarissement résulte dans des valeurs irréelles, puisque les débits initiaux  $Q_0$  tellement dessinées aux hydrogrammes des crues longues montes aux valeurs inimaginablement élevées. En outre l'allure exponentielle des courbes de tarissement de telles grandes fleuves est également douteuse. La courbe de tarissement d'un récipient accumulant les débits des plusieurs affluents dont les régimes hydrologiques sont mutuellement indépendants ne peut suivre une fonction exponentielle qu'à la condition que les courbes de tarissement de chaque affluent sont caractérisées par le même paramètre. Les bassins versants des affluents d'une fleuve grande ont des structures géologiques fortement différentes, donc cette hypothèse ne se réalise guère.

En conséquence, en cas de grandes fleuves au lieu de l'adaptation des processus secondaires Poissonniens le régime hydrologique de la rivière doit être décrit par la loi multidimensionnelle de Prékopa-Szántay (PRÉKOPA - SZÁNTAY, 1979).

En effet les modèles des petits cours d'eau, caractérisant les ressources en eaux d'origine du pays sont construits au système des hypothèses rangées en trois groupes. Donc

- a) l'hypothèse "a" se rapporte aux processus des événements des crues,
- b) les hypothèses "b" concernent le caractère physique et analytique de la courbe de tarissement; et
- c) les hypothèses de travail "c" se rapportent aux valeurs initiales des courbes de tarissement.

- a) Les ruissellements de surface, la série de temps des hydrogrammes des crues construisent un processus des événements aux incréments indépendants, donc les longueurs de temps  $\tau$  séparant les sommets suivent une loi de probabilité exponentielle au paramètre  $\beta$

$$H(x) = p(\tau \leq x) = 1 - e^{-\beta x} .$$

Ce processus peut être modifié par l'infiltration influencée par l'humidité de sol des couches aux fins particules. Par conséquent le Poissonité des nombres des crues doit être testée, par exemple par le contrôle de l'exponentialité des intervalles des crues.

- b) Le processus de tarissement, conformément à la loi de vidange du réservoir linéaire, est bien caractérisable par une courbe exponentielle à l'exposant négatif

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha(t-t_0)} .$$

On remarque que cette hypothèse est bien formulable par la fonction de vidange des réservoirs non-linéaires, ou par la relation potentielle à l'exposant négatif dérivée du théorème Dupuit-Thiem concernant le drainage d'une couche aquifère et les calculs à démontrer dans ce qui suit sont bien exécutables à l'aide de ces hypothèses relativement plus rarement appliquées.

- c) Quant à la valeur initiale de la courbe de tarissement on suppose que
  - c1. selon le modèle I. détaillé elle est constante:

$$Q_0 = \text{const} ,$$

ou

- c2. elle est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle à paramètre  $\tau$ :

$$G(x) = p(Q_0 \leq x) = 1 - e^{-\tau x},$$

ou

- c3. elle est la somme du débit minimum  $Q(t' - 0)$  du point de temps final  $t'$  de courbe de tarissement antérieure et d'un saut  $q$ , valeur aléatoire à la loi exponentielle à paramètre donc:

$$Q_0(t') = Q(t' + 0) = Q(t' - 0) + q$$

et

$$G^0(x) = p(q \leq x) = 1 - e^{-\tau' x}.$$

En effet, à l'aide des hypothèses concernant la valeur initiale de la courbe de tarissement on a définie trois modèles, selon lesquels les lois de distribution des minimums peuvent être construites.

Dans le modèle I. où la valeur minimum  $Q_0 = \text{const}$  est la fonction des longueurs de période  $\tau$  à une loi de probabilité connue. Suivant les relations connues concernant la loi de probabilité d'une fonction d'une variable aléatoire la loi de probabilité cherchée est bien calculable à l'aide des paramètres définies ci-avant:

$$F_1(x) = p(Q_{\min} \leq x) = \begin{cases} \left\{ \frac{x}{Q_0} \right\}^{\beta/\alpha} & \text{si } 0 \leq Q \leq Q_0 \\ F_1(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_1(x) = 1 & \text{si } x \geq Q_0 \end{cases}$$

Dans le modèle II., où la valeur initiale est une variable aléatoire à loi exponentielle, en appliquant la relation concernant la loi combinée de deux variables aléatoires, la loi des minimums locaux est bien estimable par la formule suivante, où les paramètres sont ceux définis ci-devant:

$$F_2 = 1 - e^{-\tau' x} + (\tau' x)^{\frac{\beta}{\alpha}} \Gamma \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) [1 - \Gamma_{1-\beta/\alpha}(\tau' x)].$$

Dans la formule les valeurs de la fonction  $\Gamma$ , respectivement les valeurs de la loi de probabilité  $\Gamma_i$  distinguée par l'index  $i$  sont accessibles des tableaux bien connus ou elles sont aisément calculables à l'aide des logiciels d'ordinateur.

C'est l'hypothèse du modèle III. qui est la plus proche à la réalité selon laquelle la valeur initiale est la somme de la valeur minimum antérieure

et un accroissement aléatoire  $q$  exponentielle au paramètre  $\tau''$ . Selon la relation de base concernant la fonction de densité de la somme des variables aléatoires non-négatives on obtient la fonction de densité de la loi de probabilité cherchée de la solution de l'équation intégrale ci-après:

$$\frac{dF_3}{dz} = f_3(z) = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 \int_0^{\min(v_0, z/y)} f_3 \left\{ \frac{z}{y} - 1 \right\} \tau'' e^{-\tau'' v} y^{\beta/\alpha - 2} dv dy .$$

où, a part des notations déjà utilisées,  $v_0$  est la limite supérieure réelle de la variable d'intégration où la probabilité de l'occurrence d'un évènement adéquat est pratiquement 0.

Dans ce cas, la fonction de la courbe de tarissement, ou plutôt la formule de la loi de probabilité de base respective à l'hypothèse de travail peut être arbitraire, puisque leurs caractères n'influencent pas l'algorithme de la solution numérique. Quant aux algorithmes numériques on utilise la solution du système homogène des équations linéaires construites à l'aide de l'approche de la loi de probabilité par une fonction à gradins, ou à l'aide de la série de puissance de la fonction de densité de la loi de probabilité des accroissements, par approximations successives.

En connaissant la loi  $F(x|y)$  de probabilité des minimums locaux mutuellement indépendants et la loi Poissonienne  $P(n)$  du nombre de ces minima la loi de probabilité des minima annuels est aisément calculable: puisque c'est évident, qu'en supposant l'indépendance mutuelle on peut écrire pour les minimums annuels que

$$F_{i,\min}(x) = p(KQ \leq x) = 1 - \Sigma \{1 - F_i(x|y)\}^n P(n) .$$

Par exemple en cas de l'hypothèse  $Q_0 = \text{const}$  la loi cherchée est bien calculable à l'aide d'un ordinateur par l'algorithme fixée par la formule suivante:

$$F_{1,\min}(x) = p(KQ \leq x) = 1 - \sum_0^{\infty} \left\{ 1 - \left[ \frac{x}{Q_0} \right]^{\beta/\alpha} \right\}^n \frac{\beta}{n!} e^{-\beta} .$$

De même, en cas d'une valeur initiale aléatoire à loi de probabilité exponentielle, la formule de l'algorithme du calcul numérique est facile à construire.

En cas du modèle III c'est la somme de produit infinie des puissance  $n$  des valeurs numériques de la loi de probabilité obtenue du résultat numérique de la solution de l'équation intégrale loi et les valeurs respectives de la loi Poisson aux variables  $n$  qui fournit les valeurs numériques de la loi de probabilité des débits minimums annuels.

En effet, au cours d'un tel calcul de la loi de probabilité des débits minimums annuels d'une part on augmente notablement la quantité des informations utilisées dans les calculs, donc également l'exactitude de l'estimation de la loi de probabilité. D'autre part quand on calcule la loi de probabilité des minimums annuels au moyen d'une simple échantillon statistique des débits minimums annuels observés les paramètres en calculés sont très sensibles aux effets violents le plus souvent d'origine anthropogène influençant les valeurs des débits minimums. Les fermetures de lit, les prises d'eaux agressives peuvent diminuer radicalement et contre nature les valeurs du processus naturel plus ou moins physiquement déterminées. Le calcul indirecte tenant compte du caractère stochastique structuré du processus va filtré ces facteurs troublants.

C'est la longueur de temps  $tv$  des périodes de manques d'eau par rapport aux demandes d'eau qui est un des plus importants facteurs de risque de l'assouvissement des besoins en eau.

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est aisément calculée dans le cas d'une valeur initiale fixée  $Q_0 = \text{const}$  (modèle I.)

$$F_{1,tv}(x|y) = p(tv \leq x | Q_i = y) = 1 - \left(\frac{y}{Q_0}\right)^{\beta/\alpha} e^{-\beta x}.$$

Le calcul de la loi de probabilité de la même variable aléatoire pour une valeur initiale distribuée selon une loi exponentielle est beaucoup plus compliqué. On voit sur la *Fig. 5* que la valeur initiale de la loi exponentielle peut rester avec une valeur de probabilité bien fixée au dessous du niveau de "crossing", c'est à dire au dessous du niveau de demande d'eau. De même il est aussi possible que le point de minimum terminal d'une courbe de tarissement partant d'une valeur initiale aléatoire pour une période à longueur aléatoire reste au dessus du niveau de demande (de "crossing"). En chacun des deux cas la longueur de la période relativement sèche est fortement changée. L'analyse de cet évènement composé a conduit à une loi de probabilité formé de plusieurs composants:

$$\begin{aligned} F_{2,tv}(x|y) &= p(tv \leq x | Q_i = y) = e^{-\tau'y} - \\ &- (\tau'y)^{\beta/\alpha} \Gamma(1 - \beta/\alpha) [1 - \Gamma_{1-\beta/\alpha}(\tau'y)] + \\ &+ (1 - e^{-\beta x})(1 - e^{-\tau'y}) \int_0^x (\tau'e^{-\tau'ye^{\alpha v}} - \tau'e^{-\tau'y}) e^{-\beta v} dv + \\ &+ \int_x^\infty (\tau'e^{-\tau'ye^{\alpha v}} - \tau'y^{\alpha(v-y)}) e^{-\beta v} dv. \end{aligned}$$

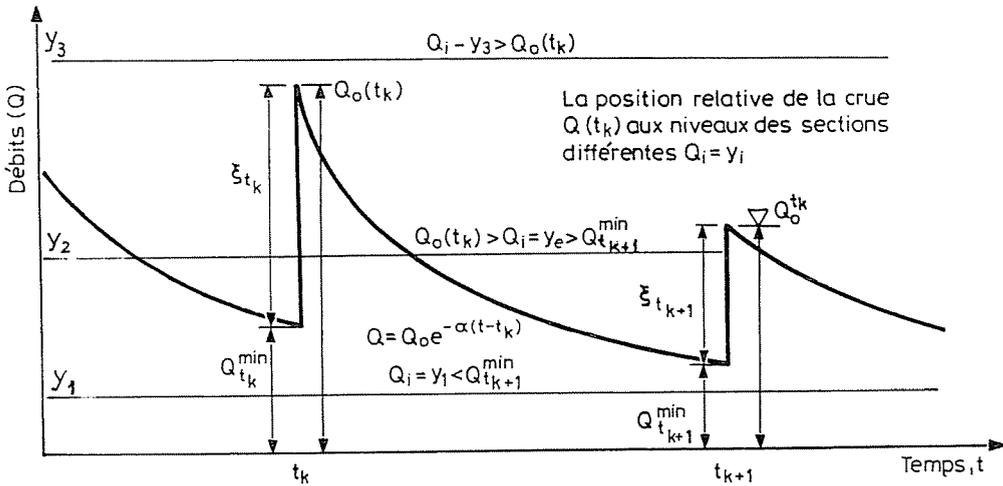
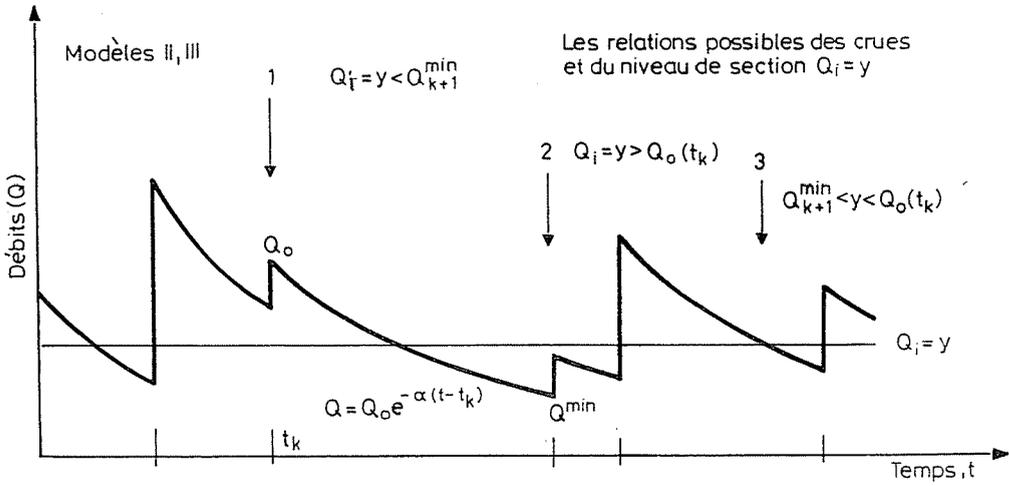


Fig. 5. Les situations réciproques des points des minima et des niveaux de sections (des "crossings"), c'est à dire des périodes respectives de manque d'eau (des longueurs des excursions de montagne) concernant les modèles I. et II.

La lois de probabilité des périodes relativement sèches concernant le modèle III. est également bien complexe:

$$\begin{aligned}
 F_{3,tv}(x|y) &= p(tv \leq x | Q_i = y) = 1 - F_3(y) + \\
 &+ (1 - e^{-\beta x}) \int_0^x F_3(y-z)g(z)dz + \\
 &+ \int_0^x \left[ \int_0^{ye^{\alpha v}} F_3(ye^{\alpha v} - z)gzdz - \int_0^y F_3(y-z)g(z)dz \right] \beta e^{-\beta v} dv + \\
 &+ \int_x^\infty \left[ \int_0^{ye^{\alpha v}} F_3(ye^{\alpha v} - z)g(z)dz - \int_0^y F_3(y-z)g(z)dz \right] \beta e^{-\beta v} dv .
 \end{aligned}$$

Dans la formule ci-devant  $F_3(x)$  est l'intégration de la fonction de densité  $f_3(x)$  définie par l'équation d'intégrale,  $g(x)$  est la fonction de densité de la loi (non sans condition exponentielle) de probabilité des accroissements  $g$ ,  $\beta$  est le paramètre du processus aléatoire Poissonienne, et  $\alpha$  est l'exposant de la courbe de tarissement exponentielle.

Quant à la loi de probabilité du nombre annuel des périodes relativement sèches, dans le cas du modèle I. supposant une valeur initiale fixée  $Q_0 = \text{const}$ , on obtient une relation bien simple à calculer.

La distribution de probabilité des points de section provenant de niveau de demande d'eau de niveau  $Q_i = y$  de "crossing", c'est à dire de nombre  $M$  des périodes relativement ininterrompues sèches est caractérisée par la distribution combinée

$$F(n|y) = p(M = n | Q_i = y) = p(M = n, Q(t) = y) = p(M = n, Q_{\min} \leq y) ,$$

où le nombre  $M$  des événements des crues, des "accroissements" est une variable aléatoire en générale à la loi exponentielle.

Donc en appliquant la règle de multiplication concernant la distribution réunie des événements mutuellement indépendants, la loi de probabilité cherchée devient

$$\begin{aligned}
 F_{1,n}(n|y) &= p(M = n | Q_i = y) = \frac{\beta^n}{n!} e^{-\beta} \left( \frac{y}{Q_0} \right)^{\beta/\alpha} & \text{si } y \leq Q_0 \\
 F_{1,n}(n|y) &= 0 & \text{si } y > Q_0 .
 \end{aligned}$$

Quant au modèle II. il faut prendre en considération que la valeur initiale  $Q_0$  est une valeur aléatoire à la loi de probabilité connue.

Actuellement il ne faut tenir compte des évènements combinés traités au cours de la déduction de la loi de probabilité des longueurs de périodes relativement sèches que les évènements classés troisième, c'est à dire il ne faut retenir que les sections des courbes de tarissement entre leurs deux points terminaux  $Q_0 = Q(t' + 0)$  et  $Q_{\min} = Q(t'' - 0)$  où  $t'$  et  $t''$  sont les points de temps de deux minima locaux consécutifs.

$$F_{2,n}(n, y) = p(M = n | Q_i = y) = \int_0^x (\tau' e^{-\tau' y^{\alpha v}} - \tau' e^{-\tau' y}) e^{-\beta v} dv \left( \frac{\beta^n}{n!} e^{-\beta} \right)$$

En cas du modèle III., par un raisonnement identique, on a

$$F_{3,n}(n|y) = p(M = n | Q_i = y) = \int_0^\infty \left[ \int_0^{xe^{\alpha v}} F_3(xe^{\alpha v} - y) g(y) dy - \int_0^x F(x - y) g(y) dy \right] \beta e^{-\beta v} dv \left( \frac{\beta}{n!} e^{-\beta} \right).$$

Dans cette formule bien compliquée  $F_3$  est la loi de probabilité des débits minima locaux calculée selon les conditions du modèle III., dont la fonction de densité doit être déduit par la solution numérique de l'équation d'intégrale. La fonction  $g(y)$  est la fonction de densité des sauts  $q$ , qui ne doit pas être fixée par formule.

C'est la valeur maximum annuelle des longueurs des périodes sèches qui est un élément très important au point de vue de l'aménagement en eau, dont probabilité de dépassement est une des meilleures caractéristiques des risques chargeant des systèmes d'alimentation en eau.

C'est bien connu que la puissance à l'exposant  $n$  de la loi de probabilité des valeurs  $x$  fournit la loi de probabilité conditionnelle de maximum de ces variables aléatoires mutuellement indépendantes en condition qu'on a justement  $n$  occurrences des évènements. Donc puisque  $n = 0, 1, 2, \dots$  composent un système complet des évènements, selon la théorème des probabilités complètes on a

$$F_{t_{\max}}(x|y) = p(t_{\max} \leq x | Q_i = y) = \sum_{n=0}^{\infty} p[t_v \leq x | Q_i = y]^n P(M = n)$$

En conséquence, en cas de la valeur initiale fixée  $Q_0 = \text{const}$  (modèle I.), la loi de probabilité conditionnelle des maxima annuels des périodes sèches liée à la demandes d'eau  $y$ , c'est à dire au niveau  $y$  de "crossing", est:

$$\begin{aligned}
 F_{1,t_{\max}}(x|y) &= p(t_{\max} \leq x|Q_i) = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( 1 - (\beta y)^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-\beta x} \right) \frac{\beta}{n!} e^{-\beta} \left( \frac{y}{Q_0} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \right) = \\
 &= \left( \frac{y}{Q_0} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-e^{-\beta x + (\frac{\beta}{\alpha}) \ln(\frac{y}{Q_0})}} \quad \text{si } x \leq 365 \text{ jours} \\
 F_{1,t_{\max}}(x|y) &= p(t_{\max} \leq x|Q) = 1 \quad \text{si } x > 365 \text{ jours}
 \end{aligned}$$

En cas des valeurs initiales aléatoires de loi exponentielle (modèle II.) on aura évidemment une formule bien compliquée.

Quant au modèle III., où c'est le saut  $q$  de débit se superposant à la variable aléatoire exponentielle du débit minimum antérieur, en suivant la formule générale ci-dessus, il faudra exécuter les calculs ultérieures à l'aide des valeurs numériques de la fonction de densité de la loi de probabilité obtenus par la solution de l'équation intégrale.

Du point de vue de la pratique de l'aménagement en eau c'est la somme annuelle des longueurs des périodes sèches qui est une des variables aléatoires utilisée depuis longtemps, dont l'abaque approximatif, c'est à dire le faisceau des courbes de fréquences des valeurs observées approchant les lois conditionnelles, fut introduit par Prof. Lászlóffy en le dénommant "surface des durées" (LÁSZLÓFFY, 1948).

La formule de la loi de probabilité conditionnelle de cette variable aléatoire peut être calculée aisément en supposant que la valeur initiale  $Q_0$  est constante (modèle I.):

$$\begin{aligned}
 F_{1,\Sigma t}(x|y) &= p(\Sigma t \leq x|Q_i = y) = \\
 &= \left( \frac{y}{Q_0} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-\beta} \left( 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{\beta^i}{i!} \left( \frac{y}{Q_0} \right)^{\frac{i\beta}{\alpha}} \Gamma_i(x, \beta) \right) \right)
 \end{aligned}$$

De la même manière les algorithmes adéquats représentant les lois conditionnelles décrivant "la surface des durées" concernant les modèles II. et III. peuvent être aussi construits.

Les quantités des volumes d'eau manquant au cours des prises d'eau sont également les paramètres caractéristiques de l'alimentation de l'eau. Comme on voit sur la Fig. 3, les volumes d'eau manquant, fixés par la méthode de "crossing", sont bien décrits par la formule élémentaire

$$V = Q_i t - \int_0^u Q_i e^{-\alpha t} dt = Q_i \left( t \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right)$$

où  $t$  est la longueur de la période des manques d'eau. Donc le volume d'eau manquant est la fonction de la longueur de la période sèche, c'est à dire d'une variable aléatoire à loi de probabilité connue. Cependant la formule standard du calcul de la loi de probabilité n'est pas directement adaptable, puisque la fonction inverse de la formule ci-devant  $V(t)$  est impossible explicitement décrire.

En cas du modèle I., où  $Q_0 = \text{const}$ , le faisceau des courbes des lois de probabilité conditionnelles des longueurs des périodes sèches est bien représentables et par la transformation graphique de cet abaque les lois de probabilité conditionnelle des volumes d'eau manquant sont bien à construire. Par la même manière les lois de probabilité conditionnelles des volumes d'eau maxima manquant rattachés aux périodes sèches aux longueurs maxima annuels sont aussi aisément à dessiner. (*Fig. 6*)

#### *Les possibilites d'utilisation pratique*

C'est seulement le type le plus simple — donc n'utilisable qu'avec beaucoup de restriction — des trois modèles des processus Poissoniens modellant la série d'observation des débits d'un cours d'eau par lequel on peut calculer les formules des lois de probabilité de chacune des variables aléatoires caractérisant les ressources en eau de la rivière.

L'adaptation du modèle du type II. conduit aux lois compliquées desquelles plusieurs n'étaient adaptables qu'à l'aide d'utilisation des algorithmes numériques au lieu des formules analytiques. Ces calculs résumés en ordre algorithmique sont bien à suivre à l'aide des logiciels mathématiques acceptablement précis.

Même la relation de base du modèle III., jugé le plus correcte du point de vue physique, est une telle équation intégrale dont la solution ne se fait que par une approche numérique. La description à l'aide des symboles des algorithmes de l'estimation des lois de probabilité des variables aléatoires complexes elle-même a conduit aux systèmes des ordres insolublement compliqués. Mais cependant ce modèle du type III. est excellentement bon pour générer les séries des données fictives extrêmement longues dont les structures sont identiques à celle de la série des observations réelle. Les distributions de fréquence des variables aléatoires déterminées par la méthode de "crossing" de ces séries fictives générées caractérisent bien les ressources en eau du cours d'eau en question.

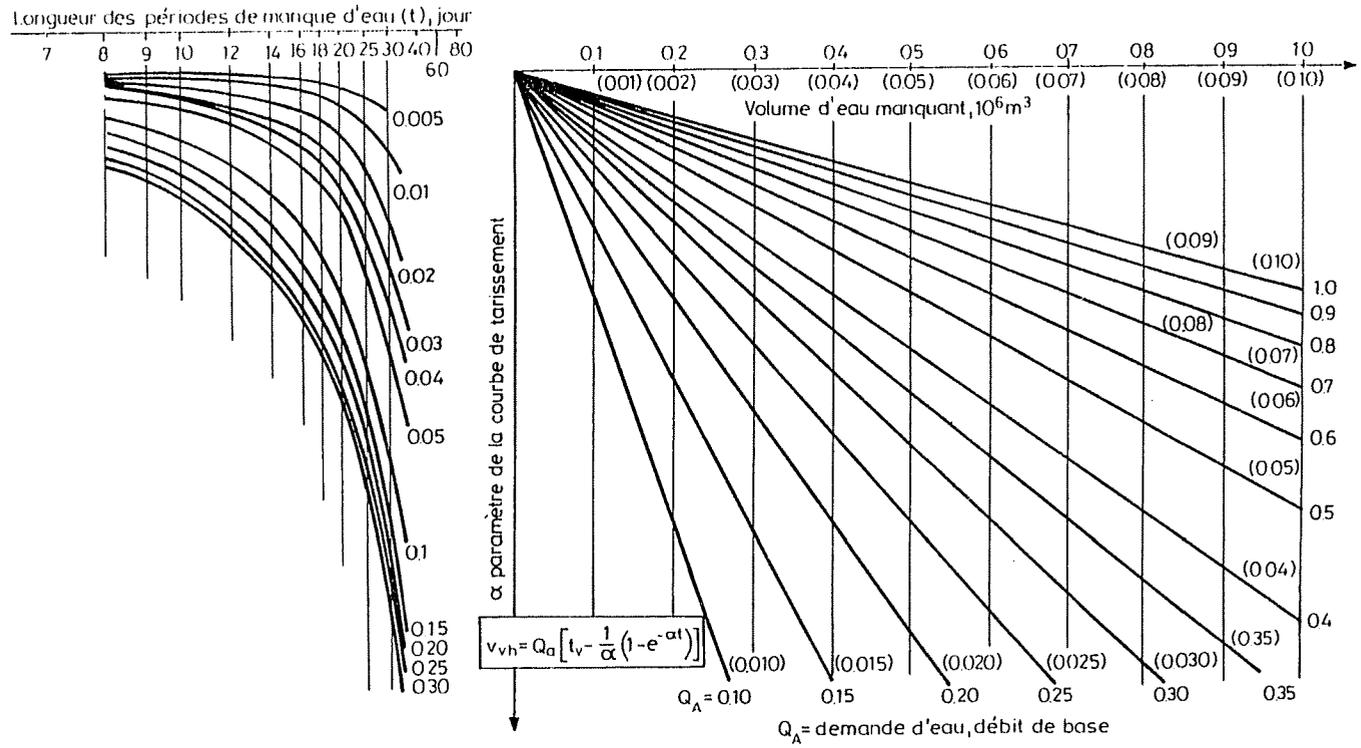


Fig. 6. Abaque à l'estimation des probabilités d'occurrence des volumes d'eau manquant et des maxima de ces volumes

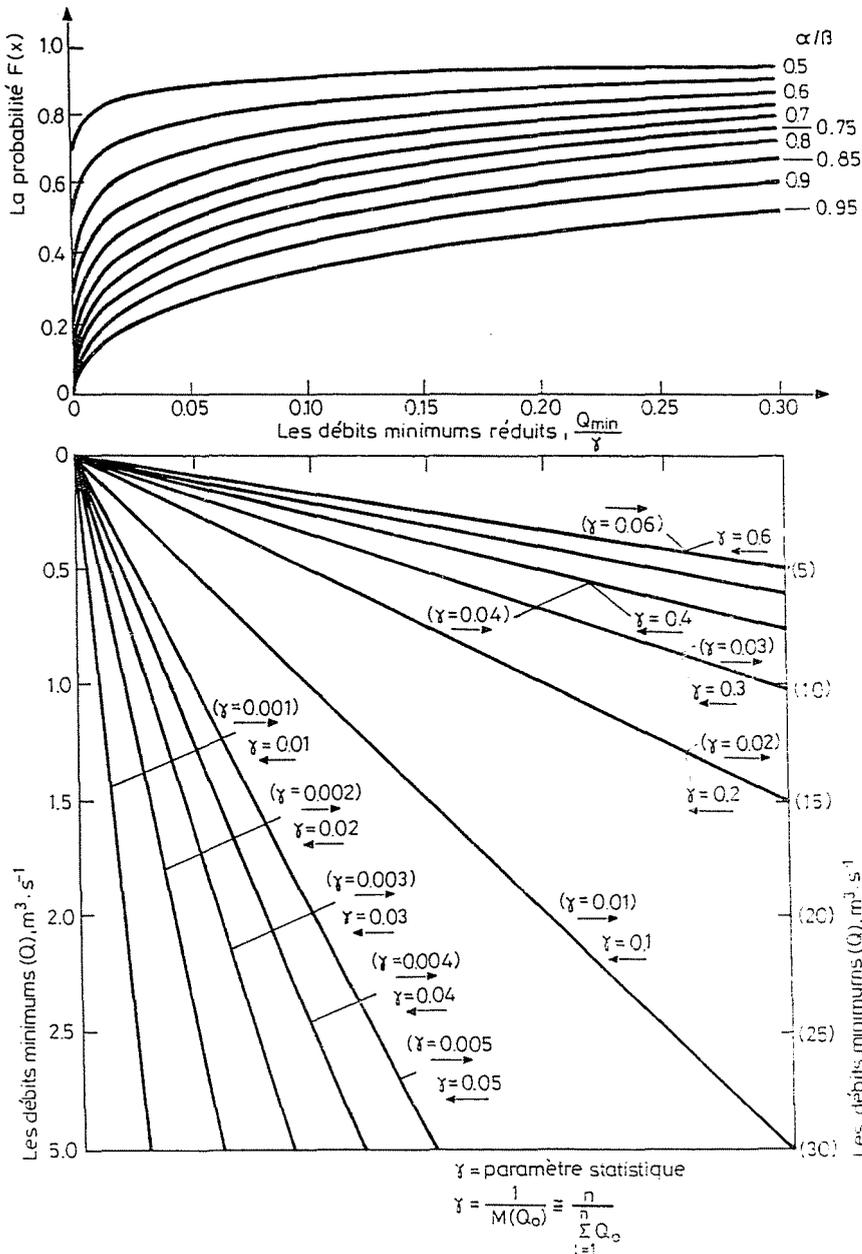


Fig. 7. Nomogramme à la caractérisation détaillée du processus stochastique des débits d'un cours d'eau selon le modèle I.

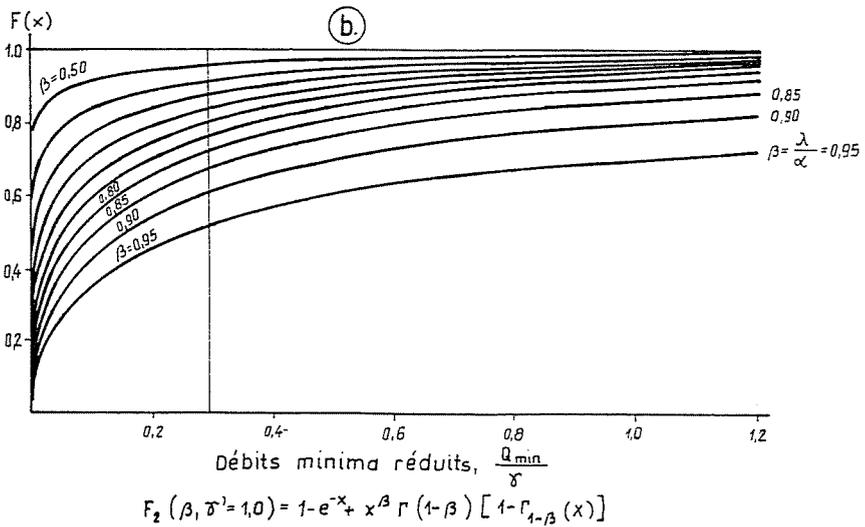
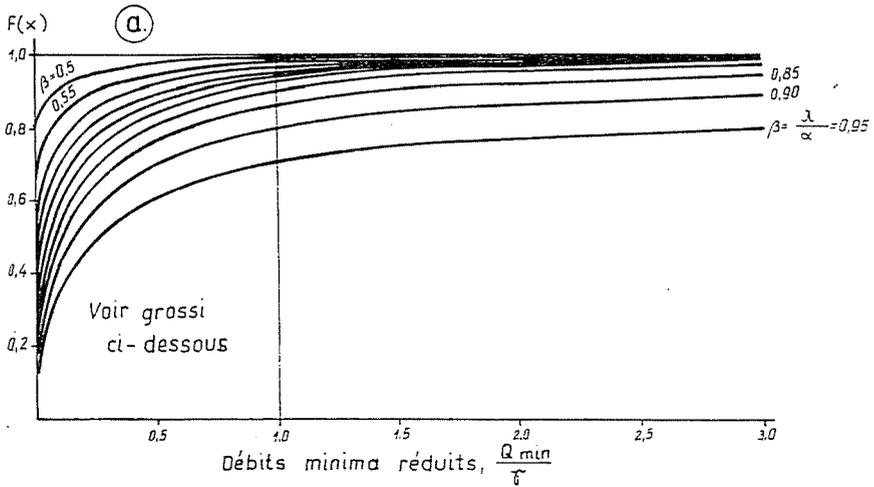
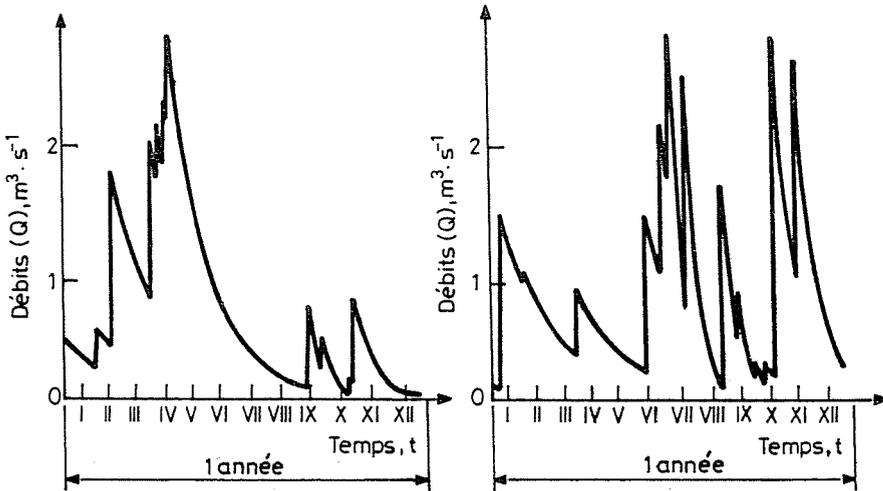


Fig. 8. Les lois des minima réduits selon le modèle II

Les trois modèles sont utilisables selon trois manières différentes.

En se basant sur les formules bien simples du modèle I. on a construit un tel abaque duquel — à l'aide des paramètres aisément calculables — les valeurs de fonctions des lois sont directement accessibles (*Fig. 7*). Quant aux calculs à exécuter les algorithmes du modèle du type II. on a préparé un logiciel propre HAL, avec lequel un part des lois sont directement calculables (*Fig. 8*). Le modèle III. est utilisé, à l'aide du logiciel VIZA pour générer les séries fictives des données aux analyses de fréquence des variables aléatoires fixées par les "crossings" (*Fig. 9*).

Les paramètres des ressources en eau des cours d'eau, respectivement leurs lois de probabilité conditionnelle calculées à l'aide de ces trois modèles démontrés ci-dessus caractérisent bien les risques chargeant les prises d'eau et en conséquence ils fournissent une base solide au développement de l'aménagement en eau, respectivement aux décisions optimales de son fonctionnement.



*Fig. 9.* Deux années de la série des données fictives générée à l'aide du modèle de type III.

## References

1. COX, D. R. – MILLER, H. D. (1965): *Stochastic Processes* Methuen and Co. LTD London.
2. CRAMER, H. – LEADBETTER, M. R. (1967): *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, New York.
3. GIHMAN, I. – SKOROHOD, A. V. (1975): *The Theory of Stochastic Processes I., II.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
4. GUMBEL, E. J. (1958): *Statistics of Extremes*. Columbia Press, New York.
5. KEPS, H. (1963): Zur Ermittlung von Hochwasserwahrscheinlichkeiten. *Oesterreichische Wasserwirtschaft* 1963, 5–6.
6. KONTUR, I. (1974): Újabb vizsgálati módszerek gyakorlati alkalmazása idősorok elemzésénél. *Hidrológiai Közlöny*, 1974/2.
7. LÁSZLÓFFY, W. (1954): A fölszíni vízkészlet meghatározása és a hidrológiai hosszszelvények. *Vízügyi Közlemények*.
8. MISTÉTH, E. (1972): Műtárgyak árvízvezetésre való méretezése a valószínűségelmélet alapján. *Hidrológiai közlöny*, 1972/1–2.
9. NASH, J. E. (1958): The Form of the Instantaneous Unit Hydrograph. Proc. AIHSAsemblée Générale de Toronto, Vol. 3. pp. 114–131.
10. NORDIN, G. T. – ROSBJERG, D. M. (1970): Application of Crossing Theory in Hydrology. *Bulletin AIHS XV/3*.
11. PRÉKOPA, A. (1956): On Stochastic Set Functions I. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungariae*, Vol. 7.
12. PRÉKOPA, A. (1958): On Secondary Processes Generated by Random Point Distribution of Poisson Type. *Annales Univ. Sc. Bp. De R. Eötvös nominata*.
13. PRÉKOPA, A. (1963): Valószínűségelmélet (Műszaki alkalmazásokkal). Műszaki Kiadó, Budapest.
14. PRÉKOPA, A. – SZÁNTAI, T. (1979): A New Multivariate Gamma Distribution and its Fitting to Empirical Data. *Water Resources Research*, Vol. 14.
15. PRÉKOPA, A. – BOSZNYAY, Á. – SZÁNTAI, T. – ZSUFFA, I. (1979): Vízfolyások hasznosítható természetes vízkészlete. Kézirat, Vízgazdálkodási Intézet, BME Gépészkar Matematika Tanszék.
16. RICE, S. O. (1945): *Mathematical Analysis of Random Noise*, Bell Syst. Tech. J. 24.
17. ROCHE, M. (1963): *Hydrologie de Surface*. Gauthier-Villars, Paris.
18. STRUPCZEWSKI, W. (1967): Determination of the Probability Distribution of Maximum Discharges on Basis of all Observed Floods and their Computation. *Publication No. 84 AIHS*.
19. SZÍGYÁRTÓ, Z. (1960): Length of Periods without Precipitation in Hungary. *Publication No 51 AIHS Commission of Surface Water*. Helsinki.
20. TAKÁCS, L. (1954): On Secondary Processes Generated by a Poisson Process and their Application in Physics. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* Vol. 5.
21. TAKÁCS, L. (1960): *Stochastic Processes, Problems and Solutions*. Methuen, London.
22. TODOROVIC, P. – ZELENHASIC, E. (1968): Stochastic Process of Precipitation Phenomena. *Bulletin AIHS XIII*. 4–12.
23. TODOROVIC, P. (1970): *Stochastic Models of Flood Analysis*. *Water Res. Res.* 4.
24. TUSNÁDI, G. – ZIRMANN, M. (1968): *Idősorok analízise*. Műszaki Kiadó, Budapest.
25. ZELENHASIC, E. (1970): *A Stochastic Model for Flood Analysis*. Dissertation Colorado State University, Fort Collins.
26. ZSUFFA, I. (1969): A sztochasztikus folyamatok elméletének alkalmazása a hidrológiában, a hidrológiai folyamatok elmélete. *Hidrológiai Közlöny*, 1969 Vol. 7.

27. ZSUFFA, I. (1972): Loi de probabilité à deux variables des basses eaux. AIHS Colloque de Warsovie, 1971.
28. ZSUFFA, I. (1990-91): A vízkészletek föltárása és a vízjárás sztochasztikus folyamatának műszaki hidrológiai jellemzése, I. és II. Hidrológiai Közlöny, 1990/5 és 1991/4.
29. ZSUFFA, I. (1993): A hidrológiai folyamatok elmélete és a műszaki hidrológia. Disszertáció. Kézirat.