NEUE STRUKTURSÄTZE FÜR RIESZSCHE UND VERWANDTE RÄUME

M. Mikolás

Lehrstuhl für Mathematik an der Fakultät für Bauwesen
Technische Universität, H-1521 Budapest
Eingegangen am 18. März 1987

Abstract

The so-called *coordinatization problem of abstract spaces*, due to D. Hilbert, O. Veblen and W. Young, has been solved about fifty years ago by means of modern algebraical methods in case of certain extensions of projective geometry by J. Neumann and I. Halperin, but it has been investigated quite recently by the author in another direction, namely for the Riesz spaces L^p and related classes of functions. (Cf. e.g. Abstract of Comm., ICM Helsinki, 1978 and ICM Berkeley, 1986.) — This paper is intended primarily to the following questions: in which sense can be transferred the *Riesz—Fischer theorem* on Hilbert spaces (which is as well-known of fundamental importance in the *quantum theory*, too) to more general function classes according to the above-mentioned aspects; further, what kinds of new type "*structural theorems*" can be obtained on this way.

1. Vorgeschichte des allgemeinen Koordinatisierungsproblems von Hilbert bis Neumann

Bekanntlich war D. Hilbert gleich nach der Jahrhundertwende der erste Mathematiker, der im Laufe seiner Untersuchungen über die Axiomatisierung der projektiven Geometrie bzw. über *Intergralgleichungen* den Koordinatenbegriff in einem viel allgemeineren Sinne benutzte, als das früher üblich war. Daher entstand einerseits eine neue Begründung klassischer Geometrien, die man heute auch mit den Namen von O. Veblen und W. Young zu verknüpfen pflegt; andererseits führte Hilbert als eine gemeinsame Erweiterung der endlich-dimensionalen euklidischen Räume, den von ihm genannten unendlich-viel-dimensionalen Folgenraum l^2 ein — also das erste wirklich brauchbare *Beispiel eines »koordinatisierten« abstrakten Raumes im Sinne der Funktionalanalysis*.

Den folgenden Schritt haben F. Riesz und E. Fischer (voneinander unabhängig) in 1907 getan, indem sie durch ihren Fundamentalsatz den Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen L^2 ebenfalls »koordinatisieren« konnten. Genauer gesagt: die Elemente einer vorgegebenen reellen Zahlenfolge c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sind dann und nur dann die Fourierkoeffizienten einer passenden Funktion $f \in L^2(a, b)$ in Bezug auf ein vollständiges orthonormiertes System $\{\Phi_n(t)\} \subset L^2(a, b)$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ gilt.[1] Dies bedeutet,

[1] Siehe [2], [19]; über spätere Beweise vgl. z. B. [20], [4], [16], [7].

daß eine umkehrbar eindeutige Beziehung — sogar eine Isomorphie — zwischen den Elementen von L^2 und l^2 aufgestellt werden kann; und mithin läßt sich jede Funktion $f \in L^2$ (d. h. ein Inbegriff *nicht-abzählbar* unendlich vieler Funktionswerte) auf überraschende Weise mit Hilfe von *abzählbar* unendlich vielen *Fourierkoeffizienten als »Koordinaten«* charakterisieren. — Der obige schöne *Satz von Riesz—Fischer*, der nur unter Zugrundelegung des modernen Lebesgueschen Integralbegriffes gilt, spielt bis heute eine zentrale Rolle in der Theorie der Orthogonalreihen und zugleich in der Geometrie des Hilbertschen Funktionenraumes L^2; kein Wunder, daß beide Entdecker (damals noch junge Mathematiker) bald weltberühmt wurden.

Die stürmische Entwicklung der Funktionalanalysis hat ungefähr während der dreißiger Jahre diejenige Periode erreicht, welche man heute als Beginn der »Überalgebraisierung« zu betrachten pflegt. Jedenfalls muß man aber beachten, daß auch der früher erwähnte *Hilbert—Veblen—Youngsche* klassisch-geometrische *Beitrag zum »Koordinatisierungsproblem«* gegen 1936—37 von J. NEUMANN und I. HALPERIN nur *mit tiefen modern-algebraischen Mitteln weiterentwickelt* werden konnte. Das Hauptergebnis in dieser Richtung, der sogenannte *Neumannsche Koordinatisationssatz* bezieht sich auf gewisse sehr abstrakte Verallgemeinerungen der projektiven Geometrie und gehört eigentlich nicht mehr zur Geometrie oder Funktionalanalysis, sondern zur Idealtheorie bzw. Filtertheorie. (Es sei an dieser Stelle auf ein wenig bekanntes »posthumus« Buch von J. Neumann hingewiesen, das drei Jahre nach Neumann's Tod mit dem Titel *»Continuous Geometry«* unter Mitwirkung von Halperin publiziert worden ist. (Vgl. [17] und [3].)

Übrigens ist es auch J. Neumann zu verdanken, daß er bei der von ihm herrührenden strengen mathematischen Begründung der *Quantenmechanik* in 1927 (vgl. [16]), den Äquivalenzbeweis der sog. Matrixmechanik von W. K. HEISENBERG—M. BORN—P. JORDAN und der Wellenmechanik von E. SCHRÖDINGER mittels der Isomorphie von L^2 und l^2 ausgeführt, und somit die entscheidende Bedeutung des Riesz—Fischerschen Satzes für die moderne Physik gezeigt hat.[2] Die zugleich entwickelte gemeinsame Verallgemeinerung von L^2 und l^2: der *abstrakte Hilbertraum* ist auch isomorph mit l^2, also nach dem Muster von L^2 *»koordinatisierbar«*.

2. Rieszsche und verwandte Verallgemeinerungen von Hilberträumen

Was die *Koordinatisierung von Funktionenräumen* anbelangt, so blieb der Grundsatz von F. Riesz und E. Fischer das einzige diesbezügliche Resultat in der Literatur bis zu den siebziger Jahren, obwohl sich die Forschungen auf

[2] Vgl. dazu noch z. B. [9], *14.34*.

dem genannten Gebiet inzwischen in riesigem Maße erstreckt haben. (Vgl. z. B. [23].) Es würde zu weit führen, bezüglich dieser Entwicklung auf Einzelheiten einzugehen; nur einige wichtige Aspekte sollen hier angedeutet werden, welche zur Annäherung unseres eigentlichen Themas unentbehrlich sind.

I. Beim Bestreben, die am Anfang dieses Jahrhunderts frisch ausgebaute Theorie des Hilbertraumes L^2 auf die natürlichste Weise zu generalisieren, hat Friedrich RIESZ schon 1910, in einer klassisch gewordenen Arbeit (s. [21]) die Klassen $L^p(1 < p \leqq \infty)$, d. h. diejenigen meßbaren Funktionen f für welche $|f|^p$ im Grundbereich Lebesgue-integrierbar ist, eingeführt und ausführlich geprüft. (Diese werden heute *Rieszsche Räume* genannt, und zwar im engeren Sinne des Wortes.) In einem Raum $L^p(p \neq 2)$ läßt sich aber nicht jedem Elementenpaar f, g ein »Skalarprodukt« (f, g) als Produktintegral zuordnen. (Um die Existenz des letzteren zu sichern, muß man auch den sog. dualen Raum L^q mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ betrachten und das eine Element aus L^p, das andere aus L^q wählen.) Deshalb ist es nicht möglich, den Riesz—Fischerschen Satz in seiner ursprünglichen Form auf L^p übertragen, obgleich einige Konsequenzen dieses Theorems, z. B. die Vollständigkeit des Raumes, gültig bleiben.

II. Wie bekannt, haben die vielerlei Anwendungsmöglichkeiten der Rieszschen Räume S. BANACH in 1932 Anlaß gegeben, die von ihm genannten normierten, linearen, vollständigen Räume (derer Prototyp ja L^p ist) zu untersuchen und die Theorie der linearen Operationen auszuarbeiten. (Vgl. [1].) Seitdem stehen die *linearen Funktionenräume und Operatoren* in der Literatur der Funktionalanalysis immer im Vordergrund. (S. z. B. [26].)

III. Dem Banachschem Ideenkreis schließt sich eng eine von W. ORLICZ etwa gleichzeitig eingeführte, ausgezeichnete Klasse von normierten linearen Räumen an. Er wurde darauf aufmerksam, daß zahlreiche Eigenschaften von $L^p(p > 1)$ mit der Monotonität und Konvexität der Potenzfunktion x^p zusammenhängen. Darum betrachtete er die Menge L_φ derjenigen meßbaren Funktionen f, für welche im Grundbereich (meistens in einem Intervall) das Lebesgue-Integral $\int \varphi(|f|)dt$ existiert, wobei $\varphi(0) = 0$ und für $u > 0$ $\varphi(u)$ nichtnegativ, stetig, streng monoton wachsend und konvex anzunehmen ist. Wird nun für die genannte Klasse L_φ ein passender Normenbegriff definiert und macht man noch L_φ (durch eine passende Erweiterung) abgeschlossen in Bezug auf diese Normenbildung als Mengenoperation, so entspringt der sog. (zur Funktion φ adjungierte) *Orliczsche Raum*, der also eine gemeinsame Generalisierung sämtlicher Rieszräume $L^p\,(p > 1)$ darstellt, gleichfalls ein Banachraum ist und besonders seit dem zweiten Weltkrieg in verschiedenen Zweigen der Analysis, unter anderen in der Theorie der Fourierschen Reihen und in der allgemeinen Theorie konvexer Funktionen eine große Rolle spielt. (Vgl. z. B. [18], [25], [15], [24], [26], [5], [27], [6].)

3. Neueste Beiträge; Koordinatrix und Burkill-Integrale bei L^p-Räumen

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die *neuesten Ergebnisse über das Koordinatisationsproblem* kurz zu behandeln.

Im Anschluß an frühere eigene Veröffentlichungen über den Riesz—Fischerschen Satz und verschiedene Approximationsfragen bezüglich Rieszscher Räume ([7] und [8]), erst um die Mitte der siebziger Jahre kam Verfasser zur Erkenntnis, daß eine neuartige »Koordinatisierung« bei L^p und verwandten Funktionenräumen nicht nur die traditionelle Untersuchungsweise dieser Räume erleichtern, sondern sogar auch zu manchen neuen strukturellen Zusammenhängen führen könnte.

Den Ausgangspunkt bildete folgende Bemerkung: das Integralmittel einer Lebesgue-integrierbaren Funktion f auf einem variablen endlichen Intervall I, d. h.[3]

$$f_{[I]} = |I|^{-1} \int_I f(t)\, dt \tag{1}$$

als eine Intervallfunktion von I betrachtet, kann in der Geometrie des Hilbertschen Funktionenraumes für ein Gegenstück und zugleich für einen Inbegriff kartesischer Koordinaten angesehen werden. Denn man kann einerseits $f_{[I]}$ als einen Fourierkoeffizient von f bezüglich der charakteristischen Funktion χ_I auffassen:

$$f_{[I]} = \frac{(f, \chi_I)}{\|\chi_I\|^2};$$

und das System der zu einer willkürlichen Intervallzerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b \quad (I_n = [x_{n-1}, x_n]) \tag{2}$$

gehörigen charakteristischen Funktionen $\{\chi_{I_n}\}$ ist offenbar orthogonal auf $[a, b]$; andererseits haben die sog. *Inklusivitätseigenschaft* von $f_{[I]}$:

$$\min \{f_{[\alpha,\gamma]}, f_{[\gamma,\beta]}\} \leqq f_{[\alpha,\beta]} \leqq \max \{f_{[\alpha,\gamma]}, f_{[\gamma,\beta]}\} \qquad (a \leqq \alpha < \gamma < \beta \leqq b) \tag{3}$$

und gewisse Fundamentaltatsachen der Lebesgueschen Theorie zur Folge, daß die Darstellung

$$f(x) = \lim_{|I_x| \to 0} f_{[I_x]} \quad (x \in I_x \subseteq [a, b]) \tag{4}$$

fast überall in $[a, b]$ gilt. (Wenn man also $f_{[I]}$ in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes x kennt, so wird dadurch der Funktionswert $f(x)$ eindeutig bestimmt — abgesehen eventuell von einer Nullmenge.)

Es wurde deswegen in [10] und [11] vom Verfasser für den Operator (1) die Benennung »*Koordinatrix*« eingeführt. Ebenda wurde gezeigt, daß man unter Benutzung von (1) alle wesentlichen »Pfeiler« der Geometrie von L^2: die

[3] Hier und später wird die Länge eines Intervalls I mit $|I|$ bezeichnet.

Besselsche Ungleichung, die Parsevalsche Formel, das sog. Hilbertsche Darszellungstheorem, ein Gegenstück des Riesz—Fischerschen Satzes usw. in sehr übersichtlicher, »anschaulicher« Form herleiten kann, u. a. mit unerwarteten Beziehungen zur Theorie der sog. *Hellingerschen Integrale.*

Einige Jahre später hat es sich herausgestellt (vgl. [13]—[14]), daß sich die eben angeführten Ergebnisse sogar auf alle *Rieszsche Räume* $L^p(p > 1)$ übertragen lassen, wobei aber auch manche Neuartigkeiten auftreten. Insbesondere:

1) In Zusammenhang mit einer elementaren Konsequenz der Hölderschen Ungleichung:

$$|f_{[I]}|^p \leqq (|f|^p)_{[I]} \tag{5}$$

ergibt sich die Darstellung

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |I|\,|f_{[I]}|^p, \tag{6}$$

wo $\|f\|_p = (\int_a^b |f|^p dt)^{1/p}$ die L^p-Norm bedeutet[4] und auf der rechten Seite die für eine beliebige Intervallfunktion $\Psi[I]$ $(I \subseteq [a, b])$ übliche Bezeichnung

$$\int_a^b \psi[I] = \lim_{\max|I_n|\to 0} \sum_{I_n} \psi[I_n] \quad (\bigcup_n I_n = [a, b]) \tag{7}$$

verwendet wird [vgl. (2)].

2) Die ganze Theorie der Rieszschen Räume ist in naher Beziehung mit den Eigenschaften der durch (7) definierten sog. *Burkillschen Integralbegriffes*, welchem im Falle von Intervallfunktionen eine ebenso große Bedeutung zukommt, wie dem Riemann- oder Lebesgue-Integral für Punktfunktionen, und welcher seit mehreren Jahrzehnten in der Geometrie und in verschiedenen Teilen der Funktionanalysis viele Anwendungen gefunden hat. (Vgl. z. B. [22], 19—28.)

4. Ein Gegenstück des Riesz — Fischerschen Fundamentalsatzes

Auf diesem Grund erhält man das

Theorem 1. (Hauptsatz von Riesz—Fischerschem Typ.)

Eine Intervallfunktion $g[I]$ $(I \subseteq [a, b])$ läßt sich dann und nur dann in der Form

$$g[I] = f_{[I]} = |I|^{-1} \int_I f(t)\,dt \quad (f \in L^p(a, b)) \tag{8}$$

[4] Die erwähnte Hölder-Ungleichung wird meistens in der Form benutzt:

$$\left|\int_a^b u(t)\,v(t)\,dt\right| \leqq \|u\|_p\,\|v\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Wir bemerken zugleich, daß (6) auch als ein »kontinuierliches« *Analogon der Parsevalschen Formel* angesehen werden kann.

ausdrücken, wenn folgende Bedingungen in $[a, b]$ *erfüllt sind:*
1) $|I| g[I]$ *ist additiv;*
2) $|I|\,|g[I]|^p$ *ist majorisierbar mit einer additiven Intervallfunktion* $H_g[I]$.

Zusätze. (A) *Die Annahme 2) kann mit der Bedingung*

$$\int_a^b |I|\,|g[I]|^p < \infty \tag{9}$$

ersetzt werden. — (B) *Wird* $g[I]$ *gemäß 1)—2) gewählt, so kann die fragliche Funktion* f *für fast alle* $x \in [a, b]$ *durch die Formel*

$$f(x) = \lim_{|I_x| \to 0} g[I_x] \quad (x \in I_x \subseteq [a, b]) \tag{10}$$

angegeben werden.

B e w e i s. Die Notwendigkeit der obigen Bedingungen 1)—2) ist ersichtlich, denn die Intervallfunktion $g[I] = f_{[I]}$ mit $f \in L^p(a, b)\,(p > 1)$ besitzt wegen $|I| g[I] = \int_I f(t)dt$, ferner mit Rücksicht auf die elementare Abschätzung $|I|\,|g[I]|^p \leq I(|f|^p)_{[I]} = \int_I |f|^p dt$ [vgl. (5)] beide Eigenschaften in Betracht.

Um das *Hinreichen* zu prüfen, nehmen wir an, daß

$$G[\alpha, \beta] = |I| g[I] \quad (I = [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]) \tag{11}$$

additiv ist und somit eine Darstellung der Form

$$G[\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha) \tag{12}$$

gilt, wo F die Punktfunktion

$$F(x) = \begin{cases} G[a, x] & (a < x < b) \\ 0 & (x = a) \end{cases} \tag{13}$$

bezeichnet. Ferner sei $g[I]$ so beschaffen, daß es eine in $[a, b]$ additive Intervallfunktion $H_g[I]$ mit

$$|I|\,|g[I]|^p \leq H_g[I] \quad (\forall I \subseteq [a, b];\, p > 1) \tag{14}$$

gibt.

Diese zweite Bedingung impliziert gleich für alle Zerlegungen (2) von $[a, b]$ die Abschätzung

$$\sum_{I_n} |I_n|\,|g[I_n]|^p \leq H_g[\bigcup_n I_n] = H_g[a, b],$$

woher man die gleichmäßige Beschränktheit der Summe im ersten Glied, genauer

$$\sup \{\sum_{I_n} |I_n|\,|g[I_n]|^p\} \leq H_g[a, b] \tag{15}$$

entnehmen kann.

Verwendet man nun die »diskrete« Variante der Hölderschen Ungleichung, d. h.

$$\left|\sum_{k=1}^{r} u_k v_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{r} |u_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} |v_k|^q\right)^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

auf eine beliebige Summe der Form $\sum_{k=1}^{r} |G[\alpha_k, \beta_k]|$, wobei $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ ein endliches System von paarweise durchschnittsfremden Teilintervallen von $[a, b]$ bedeutet, so ergibt sich unter Benutzung von (12) und (15):

$$\sum_{k=1}^{r} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| = \sum_{k=1}^{r} (\beta_k - \alpha_k) |g[\alpha_k, \beta_k]| \leq$$
$$\leq (H_g [a, b])^{1/p} \left\{\sum_{k=1}^{r} (\beta_k - \alpha_k)\right\}^{1/q} \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Da die letzte obere Schranke mit der Gesamtlänge des Intervallsystems $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ gegen Null strebt, so folgt die *absolute Stetigkeit* von $F(x)$ in $[a, b]$ und daher die Existenz einer Lebesgue-integrierbaren Funktion f, für welche $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, d. h. [vgl. (12)—(13)]

$$g[I] = |I|^{-1} \int_\alpha^\beta f(t)\, dt = f_{[I]} \quad (\forall I \subseteq [a, b]). \tag{16}$$

Daß die hiesige $f(t)$ zur Klasse $L^p(a, b)$ $(p > 1)$ gehört, erkennt man leicht durch Anwendung des *Fatouschen Lemmas* auf das Funktionensystem $|\sigma_{(I_{n\nu})}[f]|^p (\nu = 1, 2, \ldots)$, wo $\sigma_{(I_{n\nu})}[f]$ die Summe $\sum_{I_{n\nu}} f_{[I_{n\nu}]}\, \chi_{I_{n\nu}}(t)$ bezeichnet und $(I_{n\nu})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ irgendeine solche Folge von unbegrenzt verfeinerten Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ bedeutet, deren jedes Element aus dem vorangehenden durch Einschaltung neuer Zerlegungspunkte entsteht. Das genannte System strebt nämlich für $\nu \to \infty$ fast überall in $[a, b]$ gegen $|f(t)|^p$ und die entsprechenden Integrale $\int_a^b |\sigma_{(I_{n\nu})}|^p dt$ haben eine gemeinsame obere Schranke wegen der Identität

$$\int_a^b |\sigma(I_n)[f]|^p\, dt = \sum_{I_n} |I_n|\, |f_{[I_n]}|^p \quad (\forall (I_n);\ \bigcup_n I_n = [a, b]) \tag{17}$$

[vgl. (15), (16)], so daß auch das Integral $\int_a^b |f|^p dt$ vorhanden sein muß.

Was die Zusätze betrifft: (A) folgt daraus, daß das Burkill-Integral (9) zugleich auch als die obere Grenze sämtlicher Summen der Form $\sum_{I_n} |I_n|\, |g[I_n]|_p$ $\left(\bigcup_n I_n = [a, b]\right)$ aufgefaßt werden kann; (B) aber ist eine direkte Konsequenz von (4), falls (16) beachtet wird.

Hiermit ist die Verifikation unseres Satzes vollendet.

5. Anwendungen bezüglich Vollständigkeitsfragen

Mit Hilfe der bisherigen Resultate können wichtige *Struktursätze* auf neuartige, einfache Weise erhalten werden. Als eine erste Anwendung geben wir einen solchen »Limessatz« an, der zugleich einen expliziten Ausdruck für den sog. starken Grenzwert in Betracht liefert.[5]

THEOREM 2. (VOLLSTÄNDIGKEITSAUSSAGE FÜR RIESZ-RÄUME.)

(I) *Jede Cauchy-Folge* $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *von* $L^p(a, b)$ $(p > 1)$ *hat einen Grenzwert im Sinne der Metrik dieses Raumes. Der* L^p*-Limes* f *von* $\{f_k\}$ *läßt sich fast überall in der Form:*

$$f(x) = \lim_{|I_x| \to 0} \lim_{k \to \infty} (f_k)_{[I_x]} \quad (x \in I_x \subseteq [a, b]) \tag{18}$$

darstellen.[6]

(II) *Eine Funktionenfolge* $\{f_k\} \subset L^p(a, b)$ $(p > 1)$ *ist dann und nur dann konvergent der Metrik des Raumes nach, wenn die Bedingung*

$$\lim_{k, l \to \infty} \| f_k - f_l \|_p = 0 \tag{19}$$

erfüllt wird.

B e w e i s. (I) Setzen wir voraus, dass $\{f_k(x)\}$ eine *Cauchy-Folge* in $L^p(a, b)$ $(p > 1)$ ist, d. h. (19) gilt. Dann ist der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} (f_k)_{[I]} = g[I] \tag{20}$$

für jedes feste $I \subseteq [a, b]$ wegen der elementaren Abschätzung [vgl. (5)]:

$$| (f_k)_{[I]} - (f_l)_{[I]} | \leq | I |^{-1/p} \| f_k - f_l \|_p$$

offensichtlich vorhanden.

Die durch (20) angegebene Intervallfunktion $g[I]$ befriedigt aber die Bedingungen des Theorems 1: die Additivität von $|I| g[I]$ ist trivial und die Höldersche Ungleichung ergibt: $| I | \, g[I]^p \leq \lim_{k \to \infty} \int_I |f_k|^p dt$. Daher existiert eine Funktion $f \in L^p(a, b)$ $(p > 1)$ derart, daß $g[I] = f_{[I]}$ ist und sogar (18) fast überall in $[a, b]$ besteht. Wir haben noch zu zeigen, daß f den L^p-Limes von $\{f_k\}$ liefert.

Zu diesem Zweck sei die Norm $\|f_k - f\|_p$ betrachtet und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

---

[5] Für frühere kompliziertere Existenzbeweise s. z. B. [20], 1304—1305; [21], 466—468; [4], 15—16; [22], 58—59; [16], 62—64; [7], 160—162; [8], 312—313.

[6] Bemerkt sei, daß (18) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \lim_{k \to \infty} \int_a^x f_k(t) \, dt \, .$$

Einerseits erhält man wegen $|f_{[I]}|^p \leqq (|f|^p)_{[I]}$ aus (19), falls k und l passend groß gewählt werden:

$$\sum_{I_n} |I_n|\,|(f_k - f_l)_{[I_n]}|^p \leqq \|f_k - f_l\|_p^p < \frac{\varepsilon}{2};$$

es entspringt also durch Grenzübergang $l \to \infty$ für das erste Glied:

$$\sum_{I_n} |I_n|\,|(f_k - f)_{[I_n]}|^p \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall (I_n);\, k \geqq k_0(\varepsilon)). \tag{21}$$

Andererseits ersieht man aus (6), wenn f mit $f_k - f$ ersetzt wird:

$$\|f_k - f\|_p^p - \sum_{I_n} |I_n|\,|(f_k - f)_{[I_n]}|^p \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\max |I_n| < \delta(\varepsilon);\ k = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Verknüpft man nun (21) und (22) bei einer genügend feinen Zerlegung (I_n), so folgt durch Addition:

$$\|f_k - f\|_p^p \leqq \varepsilon \quad (k \geqq k_0(\varepsilon)); \tag{23}$$

und das ist, weil ε beliebig klein gewählt werden mag, mit der ersten Hälfte der Behauptung gleichgültig.

(II) Die andere Hälfte des Satzes ist bloß ein Korollar der ersten, denn 1° die Bedingung $\exists f \in L^p(a, b)$ $(p > 1)$ mit

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_p = 0 \tag{24}$$

auf Grund der Dreiecksungleichung für die L^p-Norm sogleich (19) impliziert; 2° umgekehrt, aus (19) kann man — wie eben gezeigt — leicht auf (24) schließen.

Wir heben hervor, daß es sich hier um die *Erstreckung des Riesz—Fischerschen Konvergenzkriteriums auf* $L^p (p > 1)$ handelt.

6. Ein neuartiger Isomorphiesatz für Riesz-Räume

Eine andere Anwendung des Theorems 1 bietet eine neue, sehr einfache Annahmen involvierende *Charakterisierung der Klassen* $L^p(a, b)$ $(p > 1)$, welche auf dem Begriff eines mit der Koordinatrix (1) eng verknüpften Funktionenraumes beruht.

Es sei mit $\Gamma^p(a, b)$ die Menge derjenigen Intervallfunktionen $g[I]$ $(I \subseteq [a, b])$ bezeichnet, welche die im Theorem 1 formulierten Eigenschaften 1)—2) besitzen, so daß es wegen (8) und (10) eine bijektive Beziehung zwischen den Elementen von $\Gamma^p(a, b)$ und $L^p(a, b)$ $(p > 1)$ besteht. Dementsprechend werden in $\Gamma^p(a, b)$ die Addition und die Multiplikation mit einer Konstante K

durch die Formeln $(g_1 + g_2)[I] = g_1[I] + g_2[I]$, bzw. $(Kg)[I] = K \cdot g[I]$, der Normenbegriff aber durch

$$\| g[I] \|_p = \left(\int_a^b |I| \, |g[I]|^p \right)^{1/p} \tag{25}$$

definiert.

THEOREM 3. (ISOMORPHIESATZ FÜR RIESZ-RÄUME.)

Die obige Menge $\Gamma^p(a, b)$ $(p > 1)$ von Intervallfunktionen bildet einen Banachraum, der mit dem zugehörigen Rieszschen Raum $L^p(a, b)$ isomorph ist. Die Abbildung $L^p \to \Gamma^p$ ist normentreu.

Beweis. Die Linearität und Normiertheit von $\Gamma^p(a, b)$ $(p > 1)$ sind von vornherein klar, während die Vollständigkeit des Raumes auf Grund von (25) nach dem Muster der Verifizierung des Theorems 2 unschwer gezeigt werden kann.

Was die Behauptungen über Isomorphie bzw. Normentreue anbelangt, so hat man zu beachten, daß sich die Resultate linearer Verknüpfungen im Raume $L^p(a, b)$ und diejenigen im Raume $\Gamma^p(a, b)$ einander gegenseitig entsprechen, ferner, daß die Norm eines jeden Elements $f \in L^p(a, b)$ mit der Norm des zugeordneten Elements $g \in \Gamma^p(a, b)$ wegen (6) und (8) übereinstimmt. W.z.b.w.

7. Weitere Aspekte über Orlicz-Räume und die Klasse von koordinatisierten metrischen (M_C-)Räumen

Schließlich wollen wir die Generalisierungsmöglichkeiten der bisher besprochenen Ergebnisse über $L^p(p > 1)$ schildern. Genauer gesagt, es sollen einige Beiträge zum Problem erwähnt werden: was kann der obige *Koordinatisierungsprozeß* im Falle der *Orliczschen und verwandten Räume* leisten?

Wie früher, sei mit $L_\varphi(a, b)$ die Klasse derjenigen in $[a, b]$ meßbaren Funktionen $f(t)$ bezeichnet, für welche $\int_a^b \varphi(|f|)\,dt < \infty$ bleibt, wobei $\varphi(0) = 0$ und für $u > 0$ $\varphi(u)$ nichtnegativ, stetig, streng monoton wachsend und (von unten) konvex zu nehmen ist.

Dann liefert die allgemeine *Jensensche Ungleichung*

$$\varphi\left(\frac{\left|\int_I f(t)\,dt\right|}{|I|}\right) \leq \frac{\int_I \varphi(|f|)\,dt}{|I|} \qquad (I \subseteq [a, b]) \tag{26}$$

sofort eine *Grundeigenschaft der Koordinatrix* [vgl. (1) und (5)]:

$$\varphi(|f_{[I]}|) \leq (\varphi(|f|))_{[I]}, \tag{27}$$

ferner die »Stetigkeit« und »Subadditivität« von $|I|\,\varphi(|f_{[I]}|)$ im Sinne, wie es in der Theorie der Intervallfunktionen üblich ist. (Vgl. z. B. [22].)

Hieraus kann man mittels Fundamentalsätze über Burkillsche Integrale wieder ein *Gegenstück der Parsevalschen Formel* ableiten [vgl. (6)]:

$$\int_a^b |I|\, \varphi(f_{[I]}) = \int_a^b \varphi(|f|)\, dt. \tag{28}$$

Dazu muß man aber beachten, daß ein Normenbegriff für $L_\varphi(a, b)$ unmittelbar durch die Formel

$$\|f\|_\varphi = \varphi_{-1}\left[\int_a^b \varphi(|f|)\, dt\right] \tag{29}$$

nicht definiert werden kann, da dieser letzte Ausdruck die Eigenschaften einer Norm im allgemeinen nicht besitzt;[7] sogar die Existenz von $\|f\|_\varphi$ ist auch nicht ohne Einschränkungen gesichert. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, haben zuerst W. ORLICZ, später A. ZYGMUND und andere Analytiker neue, ziemlich komplizierte Normendefinitionen eingeführt, welche zwar genügen, L_φ zugleich zu einem Banachraum — das heißt eben »Orliczscher Raum« — zu erweitern, aber für unsere Zwecke ungeeignet sind. (Vgl. z. B. [24], [27].)

Darum hat Verfasser unlängst einen anderen Weg gewählt: für die Klasse L_φ die Metrik anstatt einer Norm durch eine passende, auf einer Verallgemeinerung der Minkowskischen Ungleichung basierende Distanzdefinition zu ermöglichen. (Vgl. [13]—[14].) Wird noch eine abstrakte (»axiomatische«) Version des Koordinatrixbegriffes zugrunde gelegt, so resultiert eine neue, sehr allgemeine Klasse von »*koordinatisierten metrischen*« (kurz »M_C«-) *Räumen*, die nicht notwendigerweise linear sind, für welche die meisten, durch Koordinatisation von L^p erhaltenen Ergebnisse (vor allem die neuen »Struktursätze«) ihre Gültigkeit behalten, und welche verschiedene physikalische Anwendungen haben. Bemerkt sei noch: 1) in der Theorie der M_C-Räume wird die skalare Multiplikation mit einer einfacheren Operation (sog. »Projizieren«) ersetzt, die sich immer ausführen läßt; 2) durch Einführung einer starken Generalisierung des sog. *Haarschen Orthogonalsystems* (vgl. [12]), das in M_C für ein »natürliches« Gegenstück des Systems von »Einheitsvektoren« angesehen werden kann, läßt sich auch die Theorie der Orthogonalreihen in gewissem Sinne auf die »Sprache« von M_C übersetzen.

Die Einzelheiten bezüglich L_φ und M_C, sowie diesbezügliche Aspekte über sog. *abstrakte Rieszsche Räume* (vgl. [6]) werden anderswo untersucht.

Zusammenfassung

Das von Hilbert, Veblen und Young herrührende *Koordinatisierungsproblem abstrakter Räume* wurde ungefähr vor fünfzig Jahren für gewisse Verallgemeinerungen der projektiven Geometrie von J. Neumann und I. Halperin mit modern-algebraischen Methoden gelöst, aber

[7] Die Forderung $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda|\, \|f\|_\varphi$ (λ konstant) wird z. B. nur ausnahmsweise befriedigt.

neuestens vom Verfasser in einer anderen Richtung, im Falle der Rieszschen Räume L^p und verwandter Funktionenklassen weiter untersucht. (Vgl. z. B. Abstracts of Comm., ICM Helsinki, 1978 und ICM Berkeley, 1986.) Die Abhandlung ist in erster Linie den Fragen gewidmet: in welchem Sinne läßt sich der *Riesz—Fischersche Satz* über Hilberträume, der auch für die *Quantentheorie* von grundlegender Bedeutung ist, den genannten Aspekten gemäß erweitern; und welche neuartige *Struktursätze* können auf diesem Wege gewonnen werden.

Literatur

1. BANACH, S.: Opérations linéaires. Warszawa, 1932.
2. FISCHER, E.: Sur la convergence en moyenne. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, *144* (1907), 1022—1024; 1148—1150.
3. HALPERIN, I.: Von Neumann's Coordinatization Theorem. Acta Sci. Math. Szeged, *45* (1984), 213—218.
4. KACZMARZ, S.—STEINHAUS, H.: Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa—Lwow, 1935.
5. KRASNOSELSKIĬ, M. A.—RUTICKIĬ, YA. B.: Convex Functions and Orlicz Spaces. (Trans. from Russian.) Noordhoff, Groningen, 1961.
6. LUXEMBURG, W. A. J.—ZAANEN, A. C.: Riesz Spaces I. North-Holland, Amsterdam—London, 1971.
7. MIKOLÁS, M.: Über den Riesz—Fischerschen Satz und die Vollständigkeit der Funktionenräume L^p. Annales Univ. Budapest, Sectio Math., *8* (1965), 159—162.
8. MIKOLÁS, M.: Über die Approximation durch Treppenfunktionen in L^p. Proceedings Conf. Constructive Theory of Functions, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
9. MIKOLÁS, M.: Reelle Funktionen und Orthogonalreihen.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
10. MIKOLÁS, M.: Orthogonal Systems of Characteristic Functions and Hilbert Space. Resultate der Mathematik—Math. Results, *1* (1978), 195—206.
11. MIKOLÁS, M.: Neuere Beiträge zur Struktur des Hilbertschen Funktionenraumes. Abstracts of Comm., International Congress of Mathematicians. Helsinki, 1978, 103.
12. MIKOLÁS, M.: On the Convergence of Generalized Haar Expansions. Periodica Polytechnica, Civil Eng., *27* (1983), 31—38.
13. MIKOLÁS, M.: On a New Class of Nonlinear Metric Spaces. Abstracts of Comm., International Congress of Mathematicians. Berkeley, 1986, 197.
14. MIKOLÁS, M.: Über eine Klasse verallgemeinerter Hilberträume mit Anwendungen. Zeitschrift für Angew.Math. Mech. (Im Erscheinen.)
15. MORSE, M.—TRANSUE, W.: Functionals Bilinear over the Product of two Pseudonormed Vector Spaces, I—II. Annals of Math. (2) *50* (1949), 777—815; *51* (1950), 576—614.
16. NEUMANN, J.: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton University Press, 1955.
17. NEUMANN, J.: Continuous Geometry. Princeton University Press, 1960.
18. ORLICZ, W.: Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. Int. Acad. Polonaise, Sci. Math. et Nat., 1932, 207—220.
19. RIESZ, F.: Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, *144* (1907), 615—619; 734—736.
20. RIESZ, F.: Sur les suites de functions mesurables. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, *148* (1909), 1303—1305.
21. RIESZ, F.: Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Annalen, *69* (1910), 449—497.
22. RIESZ, F.—SZ. NAGY, B.: Leçons d'analyse fonctionnelle. (2. ed.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
23. TRIEBEL, H.: Theory of Function Spaces. Birkhäuser-Verlag, Basel—Stuttgart, 1983.
24. WEISS, G.: A Note on Orlicz Spaces. Portugaliae Mathematica, *15* (1956), 35—47.
25. ZAANEN, A. C.: On a Certain Class of Banach Spaces. Annals of Math. (2) *47* (1946), 654—666.
26. ZAANEN, A. C.: Linear Analysis. (3. ed.) North-Holland, Amsterdam—Noordhoff, Groningen, 1960.
27. ZYGMUND, A.: Trigonometric Series I—II (2. ed.). Cambridge University Press, 1968.

Prof. Dr. Miklós MIKOLÁS, H-1521 Budapest.

* In ungarischer Sprache.