ÜBER DIE LINEARE AUSGLEICHUNG UND REGRESSION VON MESSGRÖSSEN

M. Mikolás

Lehrstuhl für Mathematik, Fakultät für Bauingenieurwesen, TU Budapest, H-1521

(Eingegangen am 5. Juni 1981)

Summary

ON LINEAR ADJUSTMENT AND REGRESSION OF MEASURED VALUES — There are three different ways in use for the linear adjustment of the observed values of two random variables by means of the least squares' method, that is, applying distances of control points from a fitting straight line measured along the ordinate and the abscissa axes, or orthogonally. In the following, a general method for linear adjustment will be discussed, involving all three classic computation methods as special cases, and yielding a so-called „adjustment straight line adjoined to an arbitrary specified distance direction".

Zusammenfassung

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, daß man die lineare Ausgleichung der Beobachtungswerte zweier Zufallsgrößen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate auf drei verschiedene Weisen auszuführen pflegt, nämlich durch Benützung der in Richtung der Ordinaten- und der Abszissenachse gemessenen, bzw. der orthogonalen Abstände der Grundpunkte von einer Approximationsgeraden. In dieser Arbeit wird nun eine solche allgemeine Methode der linearen Ausgleichung untersucht, welche alle drei genannten klassischen Rechnungstypen als Spezialfälle umfaßt und die sog. »zu einer beliebig vorgeschriebenen Abstandsrichtung adjungierte Ausgleichungsgerade« liefert.

1. Es wird eine vermutete lineare Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen x und y untersucht, für welche n Paare $(n > 2)$ von zusammengehörigen Beobachtungswerten:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \tag{1.1}$$

vorliegen. Dann erhält man bekanntlich mit Hilfe der *Methode der kleinsten Quadrate* eine Gerade, die in der xy-Ebene die Punkte (1.1) «in ihrer Gesamtheit» am besten approximiert, d.h. die Beobachtungsfehler in diesem Sinne *ausgleicht*. Dazu pflegt man die Gleichung der gesuchten Geraden in einer der Formen:

$$y = ax + b \tag{1.2}$$

oder

$$x = Ay + B \tag{1.3}$$

zu schreiben, so daß die Extremumaufgabe

$$\sum_{i=1}^{n} [(ax_i + b) - y_i]^2 = \text{Minimum} \tag{1.4}$$

bzw. ihr Gegenstück

$$\sum_{i=1}^{n} [(Ay_i + B) - x_i]^2 = \text{Minimum} \tag{1.5}$$

zu lösen sind. Geometrisch ausgedrückt: man hat die Quadratsumme der in Richtung der Ordinaten- bzw. Abszissenachse gemessenen Abstände der Punkte (1.1) von der Geraden (1.2) bzw. (1.3) zu minimisieren, wobei die Koeffizienten a, b bzw. A, B als Unbekannte auftreten.

Wir möchten betonen: fast ebenso oft kommt in der Literatur eine dritte Variante der linearen Ausgleichung vor, welche sowohl für theoretische, als auch für praktische Zwecke wichtig ist. Man kann nämlich anstatt von (1.4)—(1.5) die Quadratsumme der *orthogonalen* Abstände der Punkte (1.1) von einer gewissen Geraden minimisieren, wodurch sich eine sog. *Gerade der orthogonalen Regression* ergibt [4].

Die erwähnten drei Ausgleichungsarten liefern natürlich im allgemeinen voneinander abweichende Resultate. Setzt man der Kürze halber

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.6}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x - \bar{x}, \quad \eta = y - \bar{y}, \\ \xi_i = x_i - \bar{x}, \ \eta_i = y_i - \bar{y} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

so läßt sich die Gleichung der fraglichen Geraden in folgende Form bringen:

$$\eta = t \cdot \xi \tag{1.8}$$

wobei t der Reihe nach die Werte[1]

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i}, \tag{1.9}$$

bzw. eine Wurzel der Gleichung

$$t^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i + t \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 - \eta_i^2) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = 0 \tag{1.10}$$

bedeutet. (Vgl. z. B. [1]—[4] und [6]—[8].)

[1] Im Falle des zweiten Bruches bedeutet das Verschwinden des Nenners einfach $1/t = 0$ womit (1.8) in $\xi = 0$, d. h. in die η-Achse übergeht.

Wenn wir uns alle Punkte (x_i, y_i) jeweils mit gleicher Masse versehen denken, so stellt $(\bar{x}, \bar{y})$ den Schwerpunkt des Systems (1.1) dar. Es ist merkwürdig und hängt mit einer mechanischen Interpretation zusammen, daß eine Ausgleichungslinie nach den obigen den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ stets enthalten muß.

2. Die angedeuteten Ergebnisse legen den Gedanken nahe, eine solche Art der linearen Ausgleichung zu finden, welche alle drei klassischen Rechnungsmethoden als Spezialfälle umfaßt, also als eine gemeinsame *Verallgemeinerung* derselben anzusehen ist. Diese Zielsetzung ist umso mehr motiviert, weil die Richtung der in den Summen (1.4)—(1.5) vorkommenden Strecken eigentlich willkürlich ist, nämlich von der Wahl des zugrunde gelegten Koordinatensystems abhängt.

Daher beschäftigen wir uns im weiteren mit den folgenden Problemen:

(I) Es seien ein ebenes, rechtwinkliges $\xi\eta$-System und in ihm ein endliches Punktsystem (ξ_i, η_i) $(i = 1, 2, \ldots, n;\ n > 2)$ vorgegeben, so daß $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i = 0$ ist, d. h. der zugehörige »Schwerpunkt« mit dem Anfangspunkt 0 des Koordinatensystems zusammenfällt. Angenommen sei noch eine durch 0 gehende Gerade g, die mit der ξ-Achse einen festen Winkel φ $(0 \leq \varphi < \pi)$ einschließt; man bezeichne mit s_i die Länge derjenigen zu g parallelen Strecke, welche den Punkt (ξ_i, η_i) mit einer vorläufig unbestimmten, durch eine Gleichung der Form $\eta = T \cdot \xi$ $(T \neq \mathrm{tg}\,\varphi)$ charakterisierten Geraden verbindet. Wie hat man die Richtungstangente T zu wählen, damit die Quadratsumme

$$[ss] = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \tag{2.1}$$

möglichst klein wird?[2]

(II) Der letztgenannte Wert von T ist als Funktion von $\tau = \mathrm{tg}\,\varphi$ näher zu diskutieren, und die vorausgeschickten klassischen Ausgleichungstypen sollen in den so erhaltenen Rahmen eingebettet werden.

3. Um das Problem (I) zu untersuchen, bemerken wir vor allem, daß die gesuchte Ausgleichungsgerade im Falle, wo sämtliche Punkte (ξ_i, η_i) auf einer gemeinsamen Geraden G liegen, offenbar mit dieser Geraden G identisch ist. Denn es gilt ja stets $[ss] \geq 0$ und der kleinstmögliche Wert von $[ss]$, nämlich Null, ist gerade in der erwähnten Situation erreicht, wie auch g vorgegeben wurde.

Deshalb wird im folgenden der triviale Fall der Kollinearität von (ξ_i, η_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ immer ausgeschlossen, so daß die wohlbekannte *Cauchysche*

[2] Von hier an wird die Gaußsche Schreibweise $[uv] = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ benutzt.

Ungleichung

$$(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} u_i^2)(\sum_{i=1}^{n} v_i^2) \tag{3.1}$$

(wobei das Gleichheitszeichen nur für »proportionale« reelle Wertsysteme $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ gültig ist; s. z. B. [5], 44) die Bedingung

$$[\xi\eta]^2 < [\xi\xi][\eta\eta] \tag{3.2}$$

impliziert. Wir wollen die mit dem Richtungswinkel φ gekennzeichnete, durch 0 gehende Gerade g *Ordnungsgerade*, die bei der Bildung der Quadratsumme

$$Q = [ss] \tag{3.3}$$

benutzte Gerade $\eta = T\xi$ ($T \neq \operatorname{tg}\varphi$) *Approximationsgerade*, die Q minimisierende Gerade $\eta = t\xi$ die zu (ξ_i, η_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und φ (oder g) gehörige *Ausgleichungsgerade* nennen (Abb. 1).

Zunächst wird gezeigt:

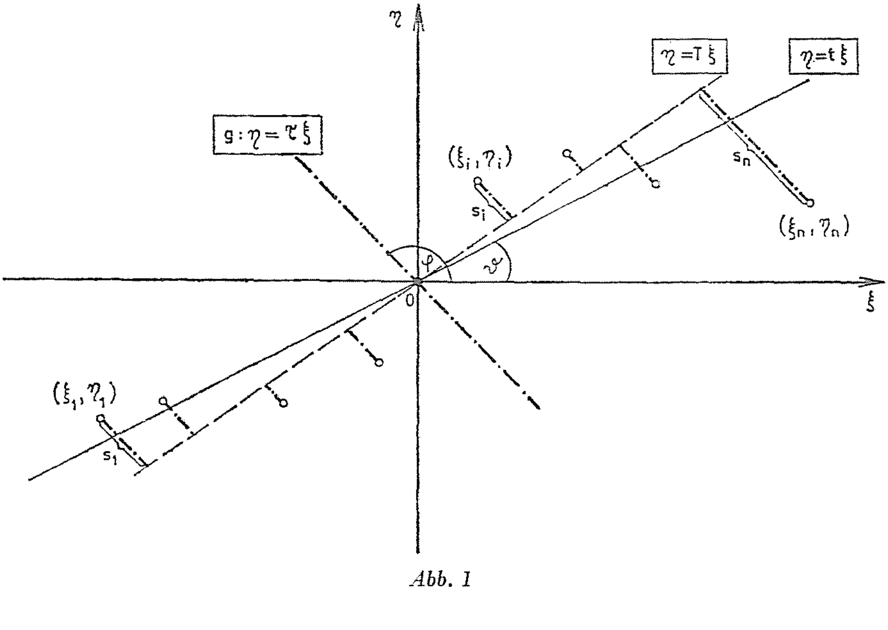

Abb. 1

Satz 1. Die zum Punktsystem (ξ_i, η_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und zum Winkel φ gehörige Ausgleichungsgerade existiert dann und nur dann, wenn $\varphi = \pi/2$ oder $\varphi \neq \pi/2$ und $\operatorname{tg}\varphi \neq [\xi\eta]/[\xi\xi]$ ist. Unter diesen Bedingungen wird die Richtungstangente der Ausgleichungsgeraden wie folgt dargestellt:

$$t = \frac{[\eta\eta]\cos\varphi - [\xi\eta]\sin\varphi}{[\xi\eta]\cos\varphi - [\xi\xi]\sin\varphi} \quad (0 \leq \varphi < \pi). \tag{3.4}$$

Beweis. Die Gleichung einer Geraden im $\xi\eta$-Koordinatensystem, welche den Punkt (ξ_i, η_i) enthält und mit der ξ-Achse den Winkel φ einschließt, läßt sich in der Form schreiben:

$$(\eta - \eta_i) \cos \varphi = (\xi - \xi_i) \sin \varphi;$$

und ihr Schnittpunkt (ξ_i^*, η_i^*) mit der Approximationsgeraden $\eta = T\xi$, deren Richtungswinkel von φ different vorausgesetzt wird, ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\xi_i^* = \frac{\eta_i \cos \varphi - \xi_i \sin \varphi}{T \cos \varphi - \sin \varphi}, \quad \eta_i^* = T \frac{\eta_i \cos \varphi - \xi_i \sin \varphi}{T \cos \varphi - \sin \varphi}. \tag{3.5}$$

Mithin ist der Abstand des Punktes (3.5) von (ξ_i, η_i)

$$s_i = \sqrt{(\xi_i - \xi_i^*)^2 + (\eta_i - \eta_i^*)^2} = \left| \frac{\xi_i T - \eta_i}{T \cos \varphi - \sin \varphi} \right| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und daher

$$\begin{aligned} Q = [ss] &= \frac{1}{(T \cos \varphi - \sin \varphi)^2} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i T - \eta_i)^2 = \\ &= (T \cos \varphi - \sin \varphi)^{-2}([\xi\xi]T^2 - 2[\xi\eta]T + [\eta\eta]). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Insbesondere erhält man für $\varphi = \pi/2$:

$$Q_{\pi/2} = [\xi\xi]T^2 - 2[\xi\eta]T + [\eta\eta], \tag{3.7}$$

während für die übrigen Fälle:

$$Q_\tau = \frac{1 + \tau^2}{(T - \tau)^2} ([\xi\xi]T^2 - 2[\xi\eta]T + [\eta\eta]) \tag{3.8}$$

mit $\varphi \neq \pi/2$, $\tau = \operatorname{tg} \varphi$.

Nun wird die Bedingung

$$\frac{dQ_{\pi/2}}{dT} = 2[\xi\xi]T - 2[\xi\eta] = 0$$

dann und nur dann erfüllt, wenn

$$T = \frac{[\xi\eta]}{[\xi\xi]}, \tag{3.9}$$

und dieser Wert minimalisiert $Q_{\pi/2}$ tatsächlich, da

$$\frac{d^2Q_{\pi/2}}{dT^2} = 2[\xi\xi] > 0.$$

Andrerseits ist die Ableitung von (3.8):

$$\frac{dQ_\varphi}{dT} = \frac{1+\tau^2}{(T-\tau)^3}\{-2[\xi\xi]T^2 + 4[\xi\eta]T - 2[\eta\eta] + (T-\tau)\cdot$$

$$\cdot(2[\xi\xi]T - 2[\xi\eta])\} = \frac{2(1+\tau^2)}{(T-\tau)^3}\{T([\xi\eta] - \tau[\xi\xi]) + (\tau[\xi\eta] - [\eta\eta])\} \left(\varphi \neq \frac{\pi}{2}\right)$$

und der letzte Ausdruck verschwindet gerade dann, wenn

$$T([\xi\eta] - \tau[\xi\xi]) = [\eta\eta] - \tau[\xi\eta]. \tag{3.10}$$

In dieser Gleichung verschwindet aber der Koeffizient von T gewiß nicht, weil man sonst aus $\tau = [\xi\eta]/[\xi\xi]$ und (3.10) auf $[\xi\xi][\eta\eta] = [\xi\eta]^2$ schließen könnte, in Widerspruch zur Annahme (3.2). Also kann (3.10) nur im Falle

$$\tau \neq \frac{[\xi\eta]}{[\xi\xi]} \tag{3.11}$$

gelten, und dann ist die Bedingung mit

$$T = \frac{[\eta\eta] - \tau[\xi\eta]}{[\xi\eta] - \tau[\xi\xi]} \tag{3.12}$$

gleichgültig.

Setzt man den letzten Wert von T in der zweiten Derivierten

$$\frac{d^2Q_\varphi}{dT^2} = \frac{2(1+\tau^2)}{(T-\tau)^4}\{2T(\tau[\xi\xi] - [\xi\eta]) + (\tau^2[\xi\xi] - 4\tau[\xi\eta] + 3[\eta\eta])\}$$

ein, so entsteht die Summe

$$\frac{2(1+\tau^2)([\xi\eta] - \tau[\xi\xi])^4}{\{[\eta\eta] - \tau([\xi\eta] + 1)^4} \sum_{i=1}^{n} (\tau\xi_i - \eta_i)^2,$$

welche wegen der Nicht-Kollinearität der Punkte (ξ_i, η_i) und (3.11) bestimmt positiv ist.

Insgesamt ersieht man: Q kann dann und nur dann minimisiert werden, wenn entweder $\varphi = \pi/2$, oder $\varphi \neq \pi/2$ und $\tau \neq [\xi\eta]/[\xi\xi]$ ist; und in diesen Fällen wird das Minimum für (3.9) bzw. (3.12) erreicht. Beachtet man noch die Bedeutung von τ, so folgt eben die Behauptung.

4. Betrachten wir jetzt Problem (II) und diskutieren vor allem den Zusammenhang zwischen den Richtungstangenten t und $\tau = \operatorname{tg}\varphi$. Dazu ist es zweckmäßig, auch für den Richtungswinkel der Ausgleichungsgeraden eine Sonderbezeichnung ϑ mit $0 \leq \vartheta < \pi$ einzuführen und $t = \operatorname{tg}\vartheta$ $(\vartheta \neq \pi/2)$ zu setzen. (Vgl. Abb. 1.)

Es ist klar, daß die einfachsten Spezialfälle von (3.4):

$$t = \frac{[\xi\eta]}{[\xi\xi]} \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \tag{4.1}$$

$$t = \frac{[\eta\eta]}{[\xi\eta]} \quad \text{für} \quad \varphi = 0 \tag{4.2}$$

sind, also die klassischen Fälle (1.9) einer mit der η-Achse bzw. mit der ξ-Achse übereinstimmenden Ordnungsgeraden.

Wählt man aber g *senkrecht zu der Ausgleichungsgeraden*, d.h. nimmt man $\varphi = \vartheta \pm \pi/2$, also $\tau = -1/t$ an, so bekommt man aus (3.4):

$$t = \frac{[\eta\eta] - [\xi\eta](-1/t)}{[\xi\eta] - [\xi\xi](-1/t)} = \frac{[\eta\eta]t + [\xi\eta]}{[\xi\eta]t + [\xi\xi]},$$

$$[\xi\eta]t^2 + ([\xi\xi] - [\eta\eta])t - [\xi\eta] = 0. \tag{4.3}$$

Das ist genau die Gleichung (1.10) für die *Gerade der orthogonalen Regression.*

Auf Grund dieser Formeln läßt sich ϑ und damit die Ausgleichungsgerade selbst eindeutig bestimmen. Einerseits haben (4.1)—(4.2) die Darstellungen

$$\vartheta = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{[\xi\eta]}{[\eta\eta]} & \text{für} \quad \varphi = 0, \\[2ex] \operatorname{arc\,tg} \dfrac{[\xi\eta]}{[\xi\xi]} & \text{für} \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{4.4}$$

zur Folge, wobei natürlich die Beschränkung $0 \leq \vartheta < \pi$ in Betracht zu ziehen ist. Andrerseits gibt es stets eine einzige Gerade mit einem spitzwinkligen ϑ, für welche t die Gleichung (4.3) befriedigt, und diese wird eigentlich in der Literatur »Gerade der orthogonalen Regression« genannt. Ist nämlich $[\xi\eta] = 0$, so haben wir einfach $t = 0$ d.h. $\vartheta = 0$ zu nehmen. (Vgl. auch (4.1).) Ist aber $[\xi\eta] \neq 0$, so besitzt (4.3) offenbar eine positive und die negative Wurzel wegen

$$([\xi\xi] - [\eta\eta])^2 + 4[\xi\eta]^2 > ([\xi\xi] - [\eta\eta])^2;$$

und derjenige Winkel $\vartheta \in (0, \pi/2)$, welcher der erwannten positiven Nullstelle

$$t = \left\{\left(\frac{[\eta\eta] - [\xi\xi]}{2[\xi\eta]}\right)^2 + 1\right\}^{1/2} + \frac{[\eta\eta] - [\xi\xi]}{2[\xi\eta]} \tag{4.5}$$

entspricht, kennzeichnet eben die fragliche Gerade.

Übrigens kann man im letzten Fall auch so leicht zum Ziele kommen, daß man (4.3) mit Hilfe der Formel

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta} \tag{4.6}$$

folgendermaßen schreibt:

$$\operatorname{ctg} 2\vartheta = \frac{[\xi\xi] - [\eta\eta]}{2[\xi\eta]}, \tag{4.7}$$

und $\vartheta \in (0, \pi/2)$ hieraus berechnet. Bemerkt sei ferner: Für $[\xi\eta] \neq 0$ fällt die negative Wurzel der Gleichung (4.3) mit demjenigen Wert von τ zusammen, welcher bei der Geraden der orthogonalen Regression dem t-Wert (4.5) zugeordnet ist; d.h. diese Wurzel ist die negative Reziproke von (4.5). Denn es ist unmittelbar ersichtlich, daß t und $\tau = -1/t$ gleichzeitig der genannten Gleichung genügen.

Was die allgemeine Beziehung zwischen t und τ anbelangt, so liefert Satz 1 für $\varphi \neq \pi/2$ und $\tau \neq [\xi\eta]/[\xi\xi]$:

$$t = \frac{[\eta\eta] - \tau[\xi\eta]}{[\xi\eta] - \tau[\xi\xi]}, \tag{4.8}$$

oder

$$([\xi\xi]t - [\xi\eta])([\xi\xi]\tau - [\xi\eta]) = [\xi\eta]^2 - [\xi\xi][\eta\eta]. \tag{4.9}$$

Die Parameter t und τ sind also gebrochene lineare Funktionen voneinander; es handelt sich sogar um eine völlig symmetrische Beziehung dieser Größen.

Wenn wir (4.8) auf die Gestalt

$$t = \frac{[\xi\eta]}{[\xi\xi]} + \frac{[\xi\eta]^2 - [\xi\xi][\eta\eta]}{[\xi\xi]} \; \frac{1}{[\xi\xi]\tau - [\xi\eta]} \tag{4.10}$$

bringen und derivieren, so entspringt:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{[\xi\xi][\eta\eta] - [\xi\eta]^2}{([\xi\xi]\tau - [\xi\eta])^2} \quad \left(\tau \neq \frac{[\xi\eta]}{[\xi\xi]}\right), \tag{4.11}$$

wobei die rechte Seite wegen (3.2) überall positiv ist. Dies bedeutet, daß die Funktion (4.8) sowohl vor als nach der Sprungstelle $[\xi\eta]/[\xi\xi]$ streng monoton wächst.

Zusammenfassend kann man sagen:

Satz 2. Die Richtungstangenten τ und t der Ordnungs- und Ausgleichungsgeraden sind zueinander in gebrochener linearer Beziehung, die im τt-Koordinatensystem durch eine gleichschenklige Hyperbel dargestellt werden kann.

Die Asymptoten dieser Hyperbel sind die Geraden $t = [\xi\eta]/[\xi\xi]$ bzw. $\tau = [\xi\eta]/[\xi\xi]$, und die Hyperbelzweige rechts und links von letzteren Geraden nehmen gleichfalls monoton zu. Die Gerade $t = \tau$ bildet eine Symmetrieachse der Kurve.

Die Verhältnisse sind für den Fall $[\xi\eta] > 0$ in Abb. 2 veranschaulicht.

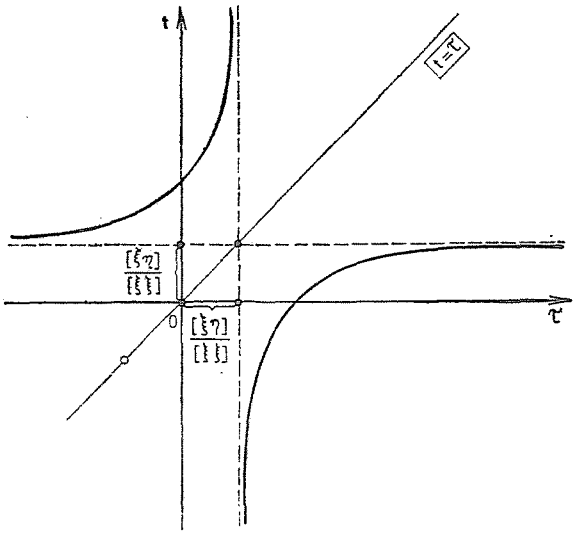

Abb. 2

5. Schließlich geben wir ein Resultat an, das besagt: die Gerade der orthogonalen Regression zeichnet sich unter allen Ausgleichungsgeraden dadurch aus, daß sie eine gewisse Extremumeigenschaft besitzt. Genauer formuliert, gilt

Satz 3. Es sei das Minimum der Quadratsumme (3.3), das für eine Ausgleichungsgerade erreicht wird, als Funktion der Richtungstangente t betrachtet. Alle möglichen lokalen Extrema dieser Funktion liegen an den Nullstellen der für die Gerade der orthogonalen Regression charakteristischen Gleichung (4.3).

Beweis. Führen wir für die fragliche Funktion die Bezeichnung $q = q(t)$ ein. Man erhält leicht aus der Darstellung (3.8) für die Quadratsumme (3.3), wenn man t anstatt T schreibt und τ mit Hilfe der Formel (vgl. (4.8))

$$\tau = \frac{[\eta\eta] - t[\xi\eta]}{[\xi\eta] - t[\xi\xi]} \tag{5.1}$$

eliminiert,[3] folgenden Ausdruck von $q(t)$:

$$q = \frac{(t[\xi\xi] - [\xi\eta])^2 + (t[\xi\eta] - [\eta\eta])^2}{t^2[\xi\xi] - 2t[\xi\eta] + [\eta\eta]} \tag{5.2}$$

[3] Hierbei ist selbstverständlich $\vartheta \neq \pi/2$ und $t \neq (\xi\eta]/[\xi\xi]$ vorauszusetzen.

Daraus bekommt man nach Differentiation und zweckmäßigen Umformungen:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2([\xi\xi][\eta\eta] - [\xi\eta]^2)}{(t^2[\xi\xi] - 2t[\xi\eta] - [\eta\eta])^2} \{t^2[\xi\eta] + t([\xi\xi] - [\eta\eta]) - [\xi\eta]\}. \quad (5.3)$$

Der Zähler auf der rechten Seite von (5.3) ist laut (3.2) eine positive Konstante, so daß dq/dt nur dann verschwinden kann, wenn t einer Wurzel der Gleichung (4.3), d.h. im Falle $[\xi\eta] = 0$ der Null, sonst einem der Werte

$$t_{1,2} = \frac{[\eta\eta] - [\xi\xi]}{2[\xi\eta]} \pm \sqrt{\left(\frac{[\eta\eta] - [\xi\xi]}{2[\xi\eta]}\right)^2 + 1} \quad (5.4)$$

gleich ist.

Nun kann man sich einfach davon überzeugen, daß die Funktion $q = q(t)$ für $[\xi\eta] = 0$ im Punkte $t = 0$, für $[\xi\eta] \neq 0$ an den Stellen $t = t_1 > 0$ und $t = t_2 < 0$ je ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) besitzt. Denn im ersten Fall entartet die linke Seite von (4.3) zu $([\xi\xi] - [\eta\eta])t$, im zweiten Falle ist aber

$$[\xi\eta]t^2 + ([\xi\xi] - [\eta\eta])t - [\xi\eta] = [\xi\eta](t - t_1)(t - t_2),$$

so daß dq/dt nach (5.3) an den genannten Stellen sicher das Vorzeichen wechselt. Dies impliziert auf Grund der Obigen sofort die Behauptung.

Literatur

1. HAZAY, I.: Ausgleichungsrechnung.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
2. HIRVONEN, R. A.: Adjustment by Least Squares in Geodesy and Photogrammetry. F. Ungar Publ. Co., New York, 1971.
3. HULTZSCH, E.: Ausgleichsrechnung mit Anwendungen in der Physik. Akad. Verlagsgesellschaft Geest-Portig K.-G., Leipzig, 1966.
4. ЛИННИК, Ю. В.: Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Физматгиз, Москва, 1958.
5. MIKOLÁS, M.: Reelle Funktionen und Orthogonalreihen.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
6. MIKOLÁS, M.: Exakter mathematischer Inhalt von Korrelationsbeziehungen und die lineare oder nichtlineare Regression.* Statisztikai Kiadó, Budapest, 1979, 406—413.
7. REISSMANN, G.: Die Ausgleichungsrechnung (III. Auflage). VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1971.
8. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. F. Dümmlers Verlag, Bonn, 1968.

Prof. Dr. Miklós MIKOLÁS, H-1521, Budapest.

* In ungarischer Sprache.