PROBLEME DER QUALITÄTSKONTROLLE VON ERZEUGNISSEN

L. SEBESTYÉN—S. SZABÓ

Lehrstuhl für Mathematik, Fakultät für Bauingenieurwesen, TU Budapest, H-1521

(Eingegangen am 12. Juni 1981)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. Reimann

Summary

PROBLEMS OF PRODUCT QUALITY CONTROL — Quality control is generally expected to show whether, after testing one or several characteristics, a set of products can be accepted or not. Acceptance of a shipment may be decided over according to different sampling plans, of which some, likely to be expedient, will be presented below. The so-called acceptance plan type $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ underlying decision according to function $V(p)$ (acceptance probability) will be expounded.

Finally, the number of sample elements needed for the given (or assumed) acceptance plan type $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ will be determined, provided certain conditions have been met.

Zusammenfassung

Die Qualitätskontrolle hat im allgemeinen den Zweck, festzustellen, ob eine Erzeugnisgesamtheit nach der Prüfung eines oder mehrerer Kennwerte des Erzeugnisses abgenommen werden darf. Über die Abnahme eines Postens kann anhand verschiedene Abnahmepläne eine Entscheidung getroffen werden. Im Beitrag werden zweckmäßig erscheinende Abnahmepläne beschrieben. Der sog. Abnahmeplan vom Typ $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$, nach dem die Entscheidung mit Hilfe der einer Ausschußziffer p entsprechenden Funktion $V(p)$ (Abnahmewahrscheinlichkeit) getroffen wird, wird eingehend erörtert.

Schließlich wird die zu dem vorgegebenen (bzw. angenommenen) Abnahmeplan von $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$-Typ erforderliche Elementenzahl der Probe für den Fall, daß gewisse Bedingungen erfüllt werden, bestimmt.

1. Bei der Qualitätskontrolle einer Gesamtheit von Erzeugnissen soll im allgemeinen entschieden werden, ob es gewisse Anforderungen erfüllt, d.h. es muß die Frage mit »Ja« oder »Nein« beantwortet werden, ob das Erzeugnis zur Abnahme geeignet ist. Die Erzeugnisse sind in der Regel postenweise gruppiert, und ein Posten kann nur im Ganzen übernommen oder abgelehnt werden. Die Qualität des Erzeugnisses wird durch den Wert eines seiner Parameter bestimmt. Solche Parameter sind z. B. Länge, Lebensdauer, Festigkeit usw. Innerhalb desselben Postens ändert sich der Wert des Parameters von einem Einzelerzeugnis zum anderen, d.h. der geprüfte Parameterwert ist eine Zufallsgröße. Zu jedem Posten kann der geprüfte Parameter eines aus dem Posten zufallsbestimmt ausgewählten Erzeugnisses zugeordnet werden. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ der in dieser Weise interpretierten Zufallsgröße ξ

ergibt das Verhältnis des die Bedingung $\xi < x$ erfüllenden Erzeugnisses zu dem ganzen Posten.

Abnahme oder Nichtabnahme eines Warenpostens werden durch das unbekannte Verhältnis des Ausschusses im Posten bestimmt. Über die Abnahme eines Warenpostens kann (unter anderem) nach folgenden Überlegungen eine Entscheidung getroffen werden:

a) Ein Warenposten wird abgenommen, wenn die (unbekannte) Ausschußziffer p einen im voraus angesetzten Wert p_0 unterschreitet, im entgegengesetzten Falle wird er nicht abgenommen.

b) Der Posten wird abgenommen, wenn $p < p_0$, und zurückgewiesen, wenn $p > p_1$, wobei p_1 einen im voraus angenommene Ausschußziffer über p_0 ist. Im Falle $p_0 \leqq p \leqq p_1$ wird aber der Posten mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\frac{p_1 - p}{p_1 - p_0}$$

abgenommen.

c) Die Wahrscheinlichkeit der Abnahme eines Postens wird mit der Ausschußziffer p, d.h. einer monoton abnehmenden Funktion $V(p)$ angegeben für die $V(0) = 1$, $V(1) = 0$, und bei im voraus angesetzten, kleinen positiven ε_0 und ε_1 die Zusammenhänge gültig sind:

$$V(p_0) \geqq 1 - \varepsilon_0, \quad V(p_1) < \varepsilon_1.$$

Unter *a)*, *b)* und *c)* sind sog. Abnahmepläne beschrieben. Von diesen wird der Plan unter *c)* Plan von $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$-Typ genannt.

In Abb. 1 sind die den Abnahmeplänen *a)*, *b)* und *c)* entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, d.h. das Bild der entsprechenden Funktion $V(p)$ zu sehen.

Durch den Abnahmeplan $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ werden die Posten mit Ausschußziffern unter p_0 und über p_1 »sortiert«, durch die Zahlen ε_0, ε_1 wird die Irrtumswahrscheinlichkeit angegeben. Es kann auch gesagt werden, daß mit einer Wahrscheinlichkeit, die ε_0 nicht übersteigt, gute Posten abgelehnt, und mit einer Wahrscheinlichkeit, die nicht höher als ε_1 ist, schlechte Posten abgenommen werden.

2. Im weiteren werden Fälle behandelt, wo die zu prüfenden Kenngrößen der Posten sog. Zufallsgrößen exponentieller Verteilung, mit dem Parameter λ, mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{bei} \quad x \leqq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{bei} \quad x > 0 \end{cases}$$

sind. Der Wert des Parameters λ kann je Posten verschieden sein, es gilt aber, daß die Zufallsgrößen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, die sich für die untersuchte Variable

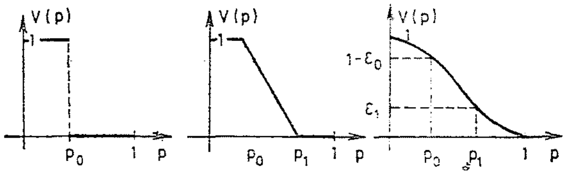

Abb. 1

aufgrund einer aus einem bestimmten Posten entnommenen Probe mit n Elementen ergeben, exponentiell verteilte Zufallsgrößen mit dem gleichen Parameter λ sind.

Die Toleranzgrenze wird im allgemeinen aufgrund technischer und anderer Bedingungen angesetzt, d.h. das geprüfte Stück des Erzeugnisses wird als Ausschuß betrachtet, wenn der untersuchte Parameter einen Wert über dem vorgegebenen T oder unter einem vorgegebenen t annimmt. Es sei bemerkt, daß in der Praxis die Variable nur aus der Sicht der oberen Toleranzgrenze untersucht werden muß.

Das Erzeugnis ist also (aus der Sicht der oberen Toleranzgrenze) eine Ausschußware, wenn die betreffende Zufallsgröße einen Wert über T hat. Die Wahrscheinlichkeit $P(\xi > T) = p$ dieses Ereignisses $(\xi > T)$ ist gleich der Ausschußziffer, daher ist

$$p = P(\xi > T) = 1 - F(T) = e^{-\lambda T}. \tag{1}$$

Die Ausschußziffer ist also die monoton abnehmende Funktion von λ, und würde λ bekannt sein, so könnte p bestimmt und der Posten mit der Wahrscheinlichkeit $V(p)$ abgenommen werden.

Um λ zu bestimmen, werden von dem Posten zufällig gewählte n Erzeugnisse geprüft, und nach den Meßwerten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ wird der Wert $1/\lambda$ geschätzt; unter Anwendung desselben sind diese Variablen ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Zufallsgrößen mit gleicher Verteilungsfunktion. Der Erwartungswert der Zufallsgröße $\bar{\xi} = (1/n)(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ ist nämlich

$$M(\bar{\xi}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i) = \frac{1}{n}\,n\,\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \tag{2}$$

also der Schätzwert von $1/\lambda$, und sein Streuungsquadrat ist

$$D^2(\bar{\xi}) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D^2(\xi_i) = \frac{1}{n^2}\,n\,\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}. \tag{3}$$

Nehmen wir nun den Posten mit der Wahrscheinlichkeit $V(p)$ ab, wenn $\bar{\xi} < k$, wo k eine später geeignet zu wählende, bestimmte Zahl ist, und prüfen wir die Wahrscheinlichkeit der Abnahme des Postens (d.h. die Funktion $V(p)$) in der Annahme, daß die tatsächliche Ausschußziffer des Postens p sei (die zu der Ausschußziffer p gehörende Abnahmewahrscheinlichkeit ist nach der Interpretation $V(p)$). Wird das Ereignis, daß die Ausschußziffer des Postens p ist, durch A bezeichnet, dann ist die auf A bezügliche bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses k (der Posten wird im Falle $\bar{\xi} < k$ mit der Wahrscheinlichkeit $V(p)$ abgenommen):

$$P(\bar{\xi} < k|A) = V(p).$$

Ist die Zufallsgröße exponentiell verteilt und ist p die Ausschußziffer des Postens, dann ist nach (1) $p = e^{-\lambda T}$ und $1/\lambda = -1/T \log p$, also nach (2) und (3)

$$M(\bar{\xi}) = \frac{1}{\lambda} = -\frac{T}{\log p}, \quad D(\bar{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{n}\,\lambda} = -\frac{T}{\sqrt{n}\log p},$$

angenommen, daß das Ereignis A eingetreten ist (d.h. die Ausschußziffer tatsächlich p ist). Unter Anwendung des Gesagten erhält man

$$V(p) = P(\bar{\xi} < k|A) = P\left(\frac{\bar{\xi} - M(\bar{\xi})}{D(\bar{\xi})} < \frac{k - M(\bar{\xi})}{D(\bar{\xi})}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{\xi} + \dfrac{T}{\log p}}{-\dfrac{T}{\sqrt{n}\log p}} < \frac{k + \dfrac{T}{\log p}}{-\dfrac{T}{\sqrt{n}\log p}}\right).$$

Da $\bar{\xi}$ eine Zufallsgröße von Gammaverteilung ist, läßt sich ihre Verteilung bei hinlänglich großem n mit einer Normalverteilung gut annähern. Also:

$$V(p) = \Phi\left(\frac{k + \dfrac{T}{\log p}}{-\dfrac{T}{\sqrt{n}\log p}}\right) = \Phi\left(\frac{(-\sqrt{n})(k\log p + T)}{T}\right).$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktion $V(p)$ eine monoton abnehmende Funktion von p ist, und auch die Bedingung $V(0) = 1$ erfüllt wird, da

$$\lim_{p\to 0} V(p) = \lim_{p\to 0} \Phi\left(\frac{(-\sqrt{n})(k\log p + T)}{T}\right) = 1.$$

Die Bedinung $V(1) = 0$ wird aber nur annähernd erfüllt, denn $V(1) = \Phi(-\sqrt{n}) \approx 0$, wenn n groß genug ist.

Da im Falle eines Abnahmeplanes $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ die Bedingung

$$V(p_0) \geq 1 - \varepsilon_0; \quad V(p_1) \leq \varepsilon_1$$

erfüllt werden muß, muß

$$\Phi\left(\frac{(-\sqrt{n})(k\log p_0+T)}{T}\right)\geqq 1-\varepsilon_0,\quad \Phi\left(\frac{(-\sqrt{n})(k\log p_1+T)}{T}\right)\leqq \varepsilon_1$$

sein.

Es seien u_{ε_0} und u_{ε_1} die die Bedingungen $\Phi(u_{\varepsilon_0})=1-\varepsilon_0$, $\Phi(u_{\varepsilon_1})=1-\varepsilon_1$ erfüllenden Zahlen. Die Funktion Φ ist streng monoton wachsend, daher gilt

$$(4)\qquad \frac{(-\sqrt{n})(k\log p_0+T)}{T}\geqq u_{\varepsilon_0},\quad \frac{(-\sqrt{n})(k\log p_1+T)}{T}\leqq -u_{\varepsilon_1}.$$

Mit Hilfe der die Ungleichung (4) befriedigenden Zahlen n und k können Funktionen $V(p)$ bestimmt werden, die dem Abnahmeplan Typ $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ entsprechen.

3. Im weiteren soll die Elementenzahl der zu dem Abnahmeplan vom gegebenen Typ $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ notwendigen Probe bestimmt werden. Für diesen Zweck ist von der Auflösungsgesamtheit des Ungleichungssystems (4) die Lösung (k, n) zu wählen, bei der n minimal und eine natürliche Zahl ist. Es ist also eine nichtlineare Programmierungsaufgabe zu lösen, die eine diskrete Variable (n) und eine stetige Variable (k) enthält. Im vorliegenden Falle läßt sich diese Aufgabe auch mit elementaren Mitteln lösen. Die Gesamtheit der zulässigen Lösungen ist in Abb. 2 zu sehen, wo die Punkte, welche die Bedingungen

$$\frac{(-\sqrt{n})(k\log p_0+T)}{T}=u_{\varepsilon_0}\ \text{bzw.}\ \frac{(-\sqrt{n})(k\log p_1+T)}{T}=-u_{\varepsilon_1}$$

erfüllen, mit gestrichelter bzw. voller Linie verbunden sind.

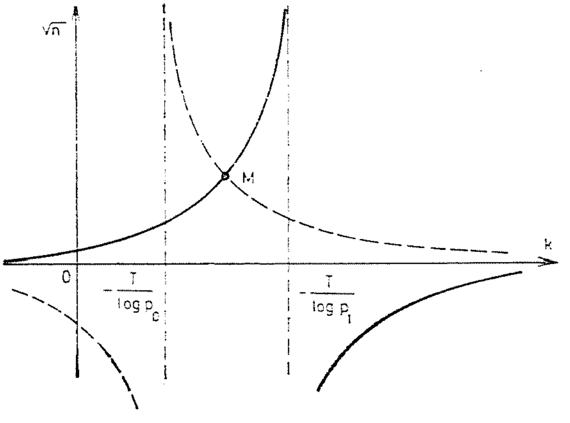

Abb. 2

Die möglichen Lösungen sind jene Punkte des in der Abbildung gestrichelten Bereiches, deren zweite Koordinate die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl ist. Unter diesen ist der Punkt auszuwählen, dessen zweite Koordinate die kleinste ist.

Nun wird diese Programmierungsaufgabe in der Weise gelöst, daß die Koordinaten des Punktes M bestimmt werden. Diese sind

$$k = \frac{-(u_{\varepsilon_0} + u_{\varepsilon_1})T}{u_{\varepsilon_0} \log p_1 + u_{\varepsilon_1} \log p_0}, \tag{5}$$

$$\sqrt{n} = \frac{u_{\varepsilon_0} \log p_1 + u_{\varepsilon_1} \log p_0}{\log p_1 - \log p_0}. \tag{6}$$

Schließlich wird die Lösung gesucht, die dem Punkt M am nächsten liegt. Aus der Gleichheit (6) ergibt sich, daß die Anzahl n der zu einem Abnahmeplan Typ $(p_0, p_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1)$ erforderlichen Proben die erste natürliche Zahl ist, die den Wert

$$\left(\frac{u_{\varepsilon_0} \log p_1 + u_{\varepsilon_1} \log p_0}{\log p_1 - \log p_0}\right)^2$$

nicht unterschreitet. Der Wert von k kann auch der in (5) angegebene sein, es ist aber in Abb. 2 zu sehen, daß der Wert für k in einem kleinen Intervall wählbar ist.

Adjunkt Dr. Lukács SEBESTYÉN
Adjunkt Dr. Sándor SZABÓ, } H-1521, Budapest