SPEKTRALE UNTERSUCHUNG DER ABBILDUNG $\mathfrak{N}: \mathbf{X} \to \mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T$

Magdolna BÉZI

Lehrstuhl für Mathematik, Fakultät für Bauingenieurwesen, TU Budapest, H-1521

(Eingegangen am 12. Juni 1981)

Vorgelegt von Prof. Dr. J. Reimann

Summary

SPECTRAL ANALYSIS OF MAPPING $\mathfrak{N}: \mathbf{X} \to \mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T$ — Description is given of the spectral analysis of mapping $\mathfrak{N}: \mathbf{X} \to \mathbf{N}_q\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q$ interpreted in the space of $p \times q$-type matrices of complex elements where $\mathbf{N}_p = [\delta_{i,j-1}]$, $i, j = 1, \ldots, p$, is a nilpotent matrix of order p, and $\mathbf{N}_q^T$ is the transposed of $\mathbf{N}_q$. $\mathfrak{N}$ is shown to be a nilpotent operator with the exponent $p + q - 1$, hence its eigenvectors are solutions of matrix equation $\mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T = 0$ For linearly independent eigenvectors $\mathbf{X}_0^{(t)} = [(-1)^{i+1} \delta_{i+j,t+1}]$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ a *Jordan*'s chain of principal vectors is produced, demonstrating them to be of maximum length.

Zusammenfassung

Im Beitrag wird die spektrale Untersuchung der im Raum der Matrizen mit komplexen Elementen vom Typ $p \times q$ interpretierten Abbildung $\mathfrak{N}: \mathbf{X} \to \mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T$ behandelt, wo $\mathbf{N}_p = [\delta_{i,j-1}]$, $i, j = 1, \ldots, p$ eine nilpotente Matrix p-ter Ordnung ist, und durch $\mathbf{N}_q^T$ die Transponierte von $\mathbf{N}_q$ bezeichnet wird. Es wird bewiesen, daß $\mathfrak{N}$ ein nilpotenter Operator mit Index $p + q - 1$ ist, so sind seine Eigenvektoren die Lösungen der Matrizengleichung $\mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T = 0$. Zu den linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{X}_0^{(t)} = [(-1)^{i+1}\delta_{i+j,t+1}]$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$ wird im Beitrag eine *Jordan*sche Kette von Hauptvektoren hergestellt, sodann wird bewiesen, daß die Hauptvektorketten von maximaler Länge sind.

1. Auf vielen Gebieten der Mathematik, so in Verbindung mit der Stabilität der Auflösung linearer Differentialgleichungssysteme ([1], [7]) bei der numerischen Integration gewisser partieller Differentialgleichungen nach der Methode der endlichen Differenzen ([3], [9]) bei der Lösung von Integrale mit entartetem Kern enthaltenden Integralgleichungen [8] kommt die Matrizengleichung der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}^* = \mathbf{C} \tag{1.1}$$

vor, wo $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix m-ter, $\mathbf{B}$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung, $\mathbf{C}$ eine Matrix vom Typ $m \times n$ mit komplexen Elementen ist, und $\mathbf{B}^*$ die transponierte Konjugierte von $\mathbf{B}$ bezeichnet. In Spezialfällen dient

Gl. (1.1) zur Bestimmung von mit einer gegebenen Matrix auswechselbaren Matrizen.

Zu den genannten mathematischen Aufgaben führen viele Probleme der Physik (Quantenmechanik [6]) sowie der technischen Wissenschaften. Die schwingungstheoretischen Beziehungen der linearen Differentialgleichungssysteme, die Bedeutung des elliptischen und biharmonischen partiellen Differentialgleichungen z. B. in der Theorie der Stahlbetonkonstruktionen ([4], [5]) sind wohlbekannt. Gewisse Bemessungsverfahren gekrümmter Kragträger, Bogengewichtsmauern ([11], [12]) führen zu Integralgleichungen des genannten Typs.

Nach dem Gesagten ist es leicht zu verstehen, daß die Gl. (1.1) seit dem Ende des vergangenen Jahrhunderts bis zum heutigen Tag die Mathematiker beschäftigt. Die Existenz- und Unizitätsuntersuchungen haben viele Teilergebnisse gebracht, und es wurden zahlreiche Methoden angewandt, um eine explizite Lösung zu finden.

Eine der grundlegenden Untersuchungsverfahren besteht darin, die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in *Jordan*sche Form zu transformieren (s. z. B. GANTMACHER [7], RUTHERFORD [14] und MA [10]). Die Auflösung der Gl. (1.1) nach diesem Verfahren führt zur Untersuchung der speziellen homogenen linearen Matrizengleichung

$$\mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T = 0. \tag{1.2}$$

In dieser Gleichung ist

$$\mathbf{N}_p = [\delta_{i,j-1}] \quad i, j = 1, \ldots, p \tag{1.3}$$

wobei δ das *Kronecker*-Symbol ist. $\mathbf{N}_p$ ist also die nilpotente Matrix p-ter Ordnung, in deren erster schräger Zeile über der Hauptdiagonalen Einser, an den übrigen Stellen Nullen stehen. $\mathbf{N}_q^T$ bezeichnet die Transponierte von $\mathbf{N}_q$.

Die Lösung von Gl. (1.2) ist im wesentlichen bekannt (s. z. B. [7], [13]). Unter Anwendung dieser Ergebnisse ergibt sich, daß Gl. (1.2) linear unabhängige Lösungen der Zahl $\min(p, q)$ hat; die allgemeine Lösung hat im Falle $q \leq p$ die Form

$$\mathbf{X} = \sum_{t=1}^{q} c_t \mathbf{X}_0^{(t)} \tag{1.4}$$

wo c_t beliebige Konstanten, $\mathbf{X}_0^{(t)}$ $(t = 1, \ldots, q)$ das volle System der linear unabhängigen Lösungen sind. Die Lösungen $\mathbf{X}_0^{(t)}$ können in Form

$$\mathbf{X}_0^{(t)} = [(-1)^{i+1}\delta_{i+j,t+1}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, p \\ j = 1, \ldots, q \end{array} \tag{1.5}$$

gewählt werden, also

$$\mathbf{X}_0^{(t)} = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & -1 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ (-1)^{t+1} & & & & \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Es sei bemerkt, daß sich im Falle $q > p$ die allgemeine Lösung in der Gl. (1.4) ähnlicher Form ergibt, und die linear unabhängigen Lösungen die Transponierten der Matrizen (1.6) sind.

Bei der Untersuchung der Eigenfunktionen gewisser Integraloperatoren kam Witowa [15] direkt zur spezialen Matrizengleichung der Form (1.2). Dadurch wurde sie zu der spektralen Untersuchung [16] der im Raum der Matrizen mit komplexen Elementen vom Typ $p \times q$. interpretierten Abbildung

$$\mathfrak{N} : \mathbf{X} \to \mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T \tag{1.7}$$

veranlaßt. Es ist offensichtlich, daß die Bestimmung des zum Eigenwert 0 der Abbildung $\mathfrak{N}$ gehörenden Eigenvektorsystems eine mit der Auflösung von Gl. (1.2) identische Aufgabe ist. Auf die Erkenntnis dieser Beziehung gestützt, stellte Witowa — von den Eigenvektoren der Form (1.5) ausgehend — ein linear unabhängiges System der Hauptvektoren her. Dieses System ist jedoch nicht vollständig, die Hauptvektorketten sind nicht von maximaler Länge.

In der gegenwärtigen Arbeit sollen die spektrale Untersuchung des Operators $\mathfrak{N}$, die Ergänzung und Weiterentwicklung der von Witowa erhaltenen Ergebnisse behandelt werden.

2. In diesem Abschnitt werden einige vorbereitende Bemerkungen gemacht, Definitionen gegeben und einige Sätze angeführt, die im weiteren angewandt werden sollen.

Da der Operator (1.7) linear ist, wird im weiteren der Einfachheit halber die Bezeichnung

$$\mathfrak{N}\mathbf{X} = \mathbf{N}_p\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{N}_q^T \tag{2.1}$$

benutzt werden.

Es läßt sich leicht nachweisen [16], daß es genügt, sich auf den Fall $q \leq p$ zu beschränken, weil der Fall $q > p$ auf diesen zurückgeführt werden kann. Daher wird bei den weiteren Untersuchungen stets angenommen, daß $q \leq p$.

Es seien im weiteren durch K der komplexe Zahlkörper und durch $K_{p\times q}$ der lineare Raum der Matrix vom Typ $p \times q$ mit komplexen Elementen bezeichnet. Eine Basis dieses Raumes wird durch die Matrixeinheiten $\mathbf{E}_{ij}$ gebildet:

$$(2.2) \qquad (\mathbf{E}_{ij})_{\mu,\nu} = \delta_{\mu i}\,\delta_{\nu j} \qquad \begin{matrix} \mu, i = 1, \ldots, p, \\ \nu, j = 1 \ldots, q. \end{matrix}$$

Bei der Behandlung sind folgende Definitionen notwendig.

Definition 2.1. Eine Matrix $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ vom Typ $m \times n$ wird *l-te Nebendiagonalmatrix* genannt, wenn im Falle bei $i + j \neq l + 1$:

$$v_{ij} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, m + n - 1).$$

Es sei nun $q \leqq p$.

Definition 2.2. Eine Nebendiagonalmatrix vom Typ $p \times q$ wird im Falle von $l \leqq q$ *obere Nebendiagonalmatrix*, im Falle von $l \geqq p$ *untere Nebendiagonalmatrix* genannt $(l = 1, \ldots, p + q - 1)$.

Da die Summe der l-ten Nebendiagonalmatrizen und auch ihr Produkt mit einer Zahl wieder l-te Nebendiagonalmatrizen sind, ist es offenbar, daß deren Menge M_l den Unraum des Raumes $K_{p\times q}$ bildet. In ähnlicher Weise bilden die Mengen F_t bzw. A_t der oberen bzw. unteren Diagonalmatrizen die Unräume von $K_{p\times q}$ $(t = 1, \ldots, q)$.

Ist $l \leqq q$, dann definieren wir

$$F_l = M_l$$

und ist $l \geqq p$, dann definieren wir

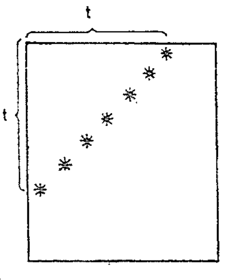
$$A_l = M_{p+q-l}.$$

Die Basis von F_t ist $\mathbf{E}_{t+1-\mu,\mu}$ $(\mu = 1, \ldots, t)$. Das bedeutet, daß

$$(2.3) \qquad \mathbf{V}^{(t)} \in F_t \Leftrightarrow \mathbf{V}^{(t)} = \sum_{\mu=1}^{t} v_\mu \mathbf{E}_{t+1-\mu,\mu},$$

wo $v_\mu \in K$.

Die schematische Form von $\mathbf{V}^{(t)} \in F_t$ ist:



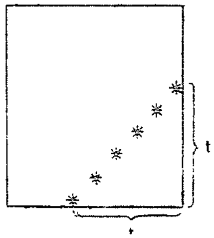
Die Basis von A_t ist $\mathbf{E}_{p+1-\mu,q+\mu-t}$

$$(\mu = 1, \ldots, t).$$

Daher gilt

$$V^{(t)} \in A_t \Leftrightarrow V^{(t)} = \sum_{\mu=1}^{t} v_\mu \mathbf{E}_{p+1-\mu,\, q+\mu-t}. \tag{2.4}$$

Die schematische Form von $V^{(t)} \in A_t$ ist:



Es wird bemerkt, daß im Falle $q > p$ die Unräume F_t bzw. A_t in ähnlicher Weise definiert werden können, und ihre Vektoren die Transponierten der Matrizen der Formen (2.3) und (2.4) sind.

Nun wird die beliebige Potenz mit nichtnegativen ganzzähligen Exponenten des Operators $\mathfrak{N}$ unter Anwendung des folgenden Satzes hergestellt.

Satz 2.1. ([13], II. 6. Satz 11, S. 342). Ist $\mathbf{Z}_0$ eine Matrix vom Typ $m \times n$, und sind $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ quadratische Matrizen m-ter bzw. n-ter Ordnung, so kann das r-te Glied der durch die Rekursion

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{P}\mathbf{Z}_{k-1} - \mathbf{Z}_{k-1}\mathbf{Q} \tag{2.5}$$

definierten Matrizenserie mit Hilfe von $\mathbf{Z}_0$ in der Form

$$\mathbf{Z}_r = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \mathbf{P}^{r-\nu}\mathbf{Z}_0\mathbf{Q}^\nu \quad (r = 0, 1, \ldots) \tag{2.6}$$

ausgedrückt werden.

Wenden wir die Rekursion (2.5) auf den Ausdruck (2.1) bei der Wahl von

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{V} \in K_{p\times q}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{N}_p, \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{N}_q^T$$

an. Dann läßt sich die k-te Potenz des Operators $\mathfrak{N}$ in der Form

$$\mathbf{Z}_k = \mathfrak{N}^k\mathbf{V} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \mathbf{N}_p^{k-\nu}\mathbf{V}(\mathbf{N}_q^T)^\nu \tag{2.7}$$

herstellen ($k = 0, 1, \ldots$).

Der nächste Satz bezieht sich auf die Invertierbarkeit einer aus binomialen Koeffizienten bestehenden Matrix, die in Abschnitt 4 eine wichtige Rolle spielen wird.

Satz 2.2 [2]. Es seien die Elemente der Matrix

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \tag{2.8}$$

die binomialen Koeffizienten

$$a_{ij} = \binom{n}{m+j-i} \quad i, j = 0, \ldots, s.$$

Hier sind n und m beliebige nichtnegative Ganzen unter der Bedingung $n \geqq m$, und der Definition gemäß

$$\binom{n}{m+j-i} = 0, \text{ wenn } n < m+j-i \text{ oder } m+j-i < 0.$$

Dann ist die Matrix $\mathbf{A}$ *nichtsingulär.*

Es wird bemerkt, daß dieser Satz die Invertierbarkeit formmäßig verschiedener Matrizen ausspricht. Dementsprechend nämlich, ob $m < s$ bzw. $n - m < s$, stehen in den linken unteren bzw. rechten oberen Diagonalen der Matrix (2.8) Nullelemente; sind also beide Bedingungen erfüllt, dann ist (2.8) eine Bandmatrix, jedoch im Falle von $m \geqq s$, $n - m \geqq s$ ist keines der Elemente gleich Null.

3. Untersuchen wir, wie der Operator (2.1) auf die Matrizen $\mathbf{V} \in K_{p \times q}$ wirkt. Durch die Multiplikation mit $\mathbf{N}_p$ von links werden die Elemente von $\mathbf{V}$ um eine Zeile aufwärts, durch die Multiplikation mit $\mathbf{N}_q^T$ von rechts um eine Stelle nach links verschoben. Daraus folgt, wenn

$$\mathbf{V} \in M_l,$$

dann

$$\mathfrak{N}\mathbf{V} \in M_{l-1},$$

also

$$\mathfrak{N}: M_l \to M_{l-1},$$

und

$$\mathfrak{N}^k : M_l \to M_{l-k} \quad (k \leqq l-1).$$

Untersuchen wir nun die Wirkung des Operators $\mathfrak{N}^k$ auf die Matrixeinheiten $\mathbf{E}_{ij}$. Setzen wir in (2.7) $\mathbf{V} = \mathbf{E}_{ij}$ ein:

$$\mathfrak{N}^k \mathbf{E}_{ij} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \mathbf{N}_p^{k-\nu} \mathbf{E}_{ij} (\mathbf{N}_q^T)^\nu.$$

Da

$$\mathbf{N}_p^{k-\nu} \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{i-k+\nu, j},$$

$$\mathbf{E}_{ij} (\mathbf{N}_q^T)^\nu = \mathbf{E}_{i, j-\nu},$$

ergibt sich

$$\mathfrak{N}^k \mathbf{E}_{ij} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \mathbf{E}_{i-k+\nu, j-\nu}. \tag{3.1}$$

Wenden wir den Zusammenhang (2.7) auf die in Form (2.4) hergestellte Matrix $\mathbf{V}^{(t)} \in A_t$ an; es ergibt sich

$$\mathfrak{N}^k \mathbf{V}^{(t)} = \sum_{\mu=1}^{t} v_\mu \mathfrak{N}^k \mathbf{E}_{p+1-\mu,\, q+\mu-t} = \sum_{\mu=1}^{t} v_\mu \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \mathbf{E}_{p+1-k-\mu+\nu,\, q-t+\mu-\nu}. \tag{3.2}$$

Für die weiteren Ausführungen ist der nächste Satz wichtig.

Satz 3.1. Ist $\mathbf{V}^{(t)} \in A_t$, dann gilt

$$\mathfrak{N}^{p+q-2t}\mathbf{V}^{(t)} \in F_t.$$

Nachweis. Wenden wir die Formel (3.2) auf $k = p + q - 2t$ an:

$$\mathfrak{N}^{p+q-2t}\mathbf{V}^{(t)} = \sum_{\mu=1}^{t} v_\mu \sum_{\nu=0}^{p+q-2t} \binom{p+q-2t}{\nu} \mathbf{E}_{2t+1-q-\mu+\nu,\, q-t+\mu-\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{t} v_\mu \sum_{\nu=0}^{p+q-2t} \binom{p+q-2t}{\nu} \mathbf{E}_{t+1-(q-t+\mu-\nu),\, q-t+\mu-\nu}.$$

Die Bezeichnung $\varkappa = q - t + \mu - \nu$ eingeführt, ist es klar zu erkennen, daß die Matrizen

$$\mathbf{E}_{t+1-\varkappa,\varkappa}$$

in den Gliedern der Summe die Basisvektoren von F_t sind, die nur im Falle $1 \leqq \varkappa \leqq t$ von Null verschieden sind, daher genügt es, die Summierung innerhalb dieser Grenzen vorzunehmen. Dann erhält man:

$$\mathfrak{N}^{p+q-2t}\mathbf{V}^{(t)} = \sum_{\varkappa=1}^{t} \left(\sum_{\mu=1}^{t} \binom{p+q-2t}{q-t+\mu-\varkappa} v_\mu \right) \mathbf{E}_{t+1-\varkappa,\varkappa}. \tag{3.3}$$

Durch den Vergleich mit (2.3) ist die Behauptung nachgewiesen.

4. Im weiteren wird zuerst ein Satz bewiesen, der für die spektrale Untersuchung des Operators (2.1) von grundlegender Bedeutung ist, jedoch auch an sich ein interessantes Ergebnis darstellt.

Satz 4.1. $\mathfrak{N}$ ist ein nilpotenter Operator von Index $p + q - 1$.

Nachweis. Untersuchen wir die Formel (2.7) mit der die k-te Potenz des Operators $\mathfrak{N}$ hergestellt wird. Da $\mathbf{N}_p$ und $\mathbf{N}_q$ nilpotente Matrizen mit Index p bzw. q sind, verschwindet bei der Wahl von

$$k \geqq p + q - 1$$

in jedem Glied der Summe auf der rechten Seite von (2.7) einer die nilpotenten Faktoren, also erhält man

$$\mathfrak{N}^{p+q-1}\mathbf{V} \equiv 0 \tag{4.1}$$

für jedes $\mathbf{V} \in K_{p\times q}$.

Nach der Identität (4.1) ist der Index des Operators $\mathfrak{N}$ höchstens gleich $p + q - 1$. Nun sieht man ein, daß er auch nicht kleiner sein kann. Da $\mathfrak{N}$ ein Operator mit nichtnegativen Elementen ist, genügt es, seine Wirkung auf eine aus lauter positiven Elementen bestehende Matrix $\mathbf{V}$ zu betrachten, denn dann ist

$$(4.2) \qquad (\mathfrak{N}^k \mathbf{V})_{ij} \geq 0 \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, p, \\ j = 1, \ldots, q \end{matrix}$$

also ist (2.7) die Summe nichtnegativer Glieder.

Nehmen wir an, daß bei $k < p + q - 1$ für ein beliebiges $\mathbf{V}$ — also z. B. auch für die Matrix

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \mathbf{E}_{ij}$$

— $\mathfrak{N}^k \mathbf{V} = 0$ gilt; daraus folgt wegen der Annahme (4.2) bezüglich $\mathbf{V}$, daß in (2.7) alle Glieder gleich Null sein werden.

Aber so

$$\binom{k}{k - p + 1} \mathbf{N}_p^{p-1} \mathbf{V} (\mathbf{N}_q^T)^{k-p+1} \neq 0.$$

Daraus folgt $\mathfrak{N}^k \mathbf{V} \neq 0$, gerieten wir zu Widerspruch.

Folge. Da der Operator $\mathfrak{N}$ nilpotent ist, sind alle seine Eigenwerte gleich Null. Deshalb kann die Lösung der homogenen linearen Matrizengleichung

$$\mathbf{N}_p \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{N}_q^T = 0$$

als die Bestimmung der zu der Eigenwertaufgabe

$$\mathfrak{N} \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$$

gehörenden Eigenvektoren aufgefaßt werden.

Nach den vorigen Ausführungen bilden die Matrizen (1.6) $\mathbf{X}_0^{(t)}$ ($t = 1, \ldots, q$) ein linear unabhängiges Eigenvektorsystem des Operators $\mathfrak{N}$. Da $\mathbf{X}_0^{(t)} \in F_t$, läßt es sich nach (2.3) in der Form

$$(4.3) \qquad \mathbf{X}_0^{(t)} = \sum_{\varkappa=1}^{t} (-1)^{t-\varkappa} \mathbf{E}_{t+1-\varkappa, \varkappa}$$

herstellen.

Satz 4.2. Zu jeder Matrix $\mathbf{X}_0^{(t)}$ existiert eine Matrix $\mathbf{V}^{(t)} \in A_t$, daß

$$(4.4) \qquad \mathfrak{N}^{p+q-2t} \mathbf{V}^{(t)} = \mathbf{X}_0^{(t)}$$

gilt, d.h., daß die Matrizen

$$(4.5) \qquad \mathbf{V}^{(t)}, \mathfrak{N} \mathbf{V}^{(t)}, \ldots \mathfrak{N}^{p+q-2t} \mathbf{V}^{(t)}$$

eine *Jordan*sche Kette bildende *Hauptvektoren* des Operators $\mathfrak{N}$ sind ($t = 1, \ldots q, q \leq p$).

Nachweis. Wir sahen, daß $\mathbf{X}_0^{(t)} \in F_t$, dabei gilt auch nach dem Satz 3.1

$$\mathfrak{N}^{p+q-2t}\mathbf{V}^{(t)} \in F_t.$$

Man muß einsehen, daß die Elemente v_μ der nach (2.4) hergestellten Matrix $\mathbf{V}^{(t)}$ so gewählt werden können, daß (4.4) erfüllt sei.

Setzen wir in Gleichheit (4.4) die Ausdrücke (3.3) und (4.3) ein.

$$(4.6) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{t} \left(\sum_{\mu=1}^{t} \binom{p+q-2t}{q-t+\mu-\varkappa} v_\mu \right) \mathbf{E}_{t+1-\varkappa,\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{t} (-1)^{t+\varkappa} \mathbf{E}_{t+1-\varkappa,\varkappa}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Herstellung mit Hilfe der Basisvektoren bedeutet die Gleichheit (4.6) die Bedingung

$$(4.7) \qquad \sum_{\mu=1}^{t} \binom{p+q-2t}{q-t+\mu-\varkappa} v_\mu = (-1)^{t+\varkappa} \quad k = 1, \ldots, t$$

also ist es notwendig, die Auflösbarkeit der Gleichungssysteme der Form (4.7) zu prüfen ($t = 1, \ldots, q$).

Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems lautet:

$$(4.8) \qquad \mathbf{A} = [a_{ij}] = \left[\binom{p+q-2t}{q-t+j-i} \right] \quad i, j = 1, \ldots, t.$$

Nach *Satz* 2.2 ist die Matrix (4.8) bei keinem der in Frage kommenden Werte von t singulär, so hat das Gleichungssystem (4.7) für jedes t eine eindeutige Lösung, und damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Im weiteren ist nachzuweisen, daß die hergestellten Hauptvektorketten von maximaler Länge sind. Um dies zu beweisen, genügt es einzusehen, daß die in der Form (4.5) hergestellten Hauptvektoren die Basis des Raumes $K_{p \times q}$ bilden.

Satz 4.3. Die Hauptvektoren der Form (4.5) ($t = 1, \ldots, q$) bilden ein vollständiges, linear unabhängiges System.

Nachweis. Die Zahl der Hauptvektoren des Operators $\mathfrak{N}$ ist nach Satz 4.2

$$\sum_{t=1}^{q} (p+q-2t+1) = q(p+q+1) - 2\,\frac{q(q+1)}{2} = pq,$$

was mit der Dimensionszahl des Raumes $K_{p \times q}$ übereinstimmt.

Es muß noch nachgewiesen werden, daß die Hauptvektoren (4.5) linear unabhängig sind. Es liegt auf der Hand, daß jene Hauptvektoren linear unabhängig sind, deren von Null verschiedene Elemente sich verschiedene

Nebendiagonalen entlang befinden. Daher genügt es einzusehen, daß für irgendein k die Vektoren

$$\mathfrak{N}^{k-1}\mathbf{V}^{( )}, \mathfrak{N}^{k-2}\mathbf{V}^{(2)}, \ldots \mathfrak{N}^{k-r}\mathbf{V}^{(r)} \tag{4.9}$$

linear unabhängig sind, wo

$$r \leqq k, \; r \leqq q,$$

ferner

$$k \leqq p + q - 1.$$

Bezeichnen wir im weiteren die Matrizen (4.9) durch $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_r$. Da

$$\mathfrak{N}^{p+q-2t+1}\mathbf{V}^{(t)} = 0 \quad (t = 1, \ldots, q),$$

existiert ein Index s, bei dem

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}^{s}\mathbf{V}_1 = 0, \quad \mathfrak{N}^{s-1}\mathbf{V}_1 \neq 0 \\ &\mathfrak{N}^{s-1}\mathbf{V}_2 = 0, \quad \mathfrak{N}^{s-2}\mathbf{V}_2 \neq 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathfrak{N}^{s-r+1}\mathbf{V}_r = 0, \quad \mathfrak{N}^{s-r}\mathbf{V}_r \neq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nehmen wir an, daß für irgendein $l \leqq r$ die Vektoren $\mathbf{V}_l, \mathbf{V}_{l+1}, \ldots, \mathbf{V}_r$ linear abhängig sind, d.h.

$$\sum_{\nu=l}^{r} c_\nu \mathbf{V}_\nu = 0, \quad \text{wo} \sum_{\nu=l}^{r} c_\nu^2 \neq 0.$$

Dann ist

$$\mathfrak{N}^{s-l}\left(\sum_{\nu=l}^{r} c_\nu \mathbf{V}_\nu\right) = \sum_{\nu=l}^{r} c_\nu(\mathfrak{N}^{s-l}\mathbf{V}_\nu) = 0.$$

In dieser Summe ist wegen (4.10)

$$\mathfrak{N}^{s-l}\mathbf{V}_\nu = 0 \quad \nu = l+1, \ldots, r,$$

jedoch

$$\mathfrak{N}^{s-l}\mathbf{V}_l \neq 0.$$

Daraus folgt, daß $c_l = 0$. Das bedeutet, daß

$$\sum_{\nu=l+1}^{r} c_\nu \mathbf{V}_\nu = 0,$$

d.h., daß auch $\mathbf{V}_{l+1}, \ldots, \mathbf{V}_r$ schon linear abhängig sind.

Wird nun der lineare Zusammenhang der Vektoren (4.9) angenommen, d.h. wird angenommen, daß

$$\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \mathbf{V}_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu^2 \neq 0,$$

dann folgt daraus im Sinne der vorigen Ausführungen, daß

$$c_\nu = 0; \quad \nu = 1, \ldots, r.$$

Man kommt zu einem Widerspruch, die Vektoren (4.9) sind also linear unabhängig.

Ein interessantes Ergebnis der *Satze* 4.2 und 4.3 ist, wenn die Eigenvektoren $\mathbf{X}_0^{(t)}$ als Nebendiagonalmatrix der Form (1.6) gewählt werden, dann läßt sich zu diesen eine aus Nebendiagonalmatrizen bestehende Hauptvektorkette konstruieren. Aus Satz 4.2 ist auch ersichtlich, daß die mögliche Länge der Ketten $p+q+1-2t$ $(t=1,\ldots,q)$ ist.

Das auf die elementaren Teile unformulierte Ergebnis lautet:
Die elementaren Teiler des nilpotenten Operators $\mathcal{N}\mathbf{X}=\mathbf{N}_p\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{N}_q^T$ haben die Form

$$\lambda^{p+q+1-2t} \quad (t=1,\ldots,q).$$

Die Exponenten der elementaren Teiler ändern sich also einer arithmetischen Progression gemäß. Man erhält im Falle $t=1$ den höchsten Exponenten und dieser ist $p+q-1$, was damit übereinstimmt, daß der Nilpotenzgrad des Operators $\mathcal{N}$ $p+q-1$ ist. So darf die interessante Feststellung gemacht werden, daß der Operator $\mathcal{N}$ dann und nur dann einen linearen elementaren Teiler hat, wenn $q=p$.

Literatur

1. BARNETT, S.—STOREY, C.: Matrix Methods in Stability Theory, Nelson, London, 1970
2. BÉZI, M.: Untersuchung der Invertierbarkeit einer aus binomialen Koeffizienten bestehenden Matrix*. Matematikai Lapok 1—3 (1980), 147—151
3. BLEICH, E.—MELAN, E.: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik, Springer, Berlin, 1927
4. BOSZNAY, A.: Technische Schwingungslehre.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962
5. FRANK, PH.—MISES, R.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* I.—II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967
6. ФРИДРИХС, К. О.: Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, Мир, Москва, 1969.
7. GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung I.—II., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966
8. КАКИЧЕВ, В. А.—КОВАЛЕНКО, Н. В.: К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами, Укр. Мат. Ж., т. 25. 3. (1973), 302—312.
9. KANTOROVICS, L. V.—KRÜLOV, V. I.: Näherungsverfahren der höheren Analysis*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953
10. MA, E. C.: A Finite Series Solution of the Matrix Equation $\mathbf{AX}-\mathbf{XB}=\mathbf{C}$. SIAM J. Appl. Math. 14 (1966), 490—495
11. МОРОЗОВ, В. А.: Применение метода регуляризации к решению одной некорректной задачи, Вестник, М. Г. У. 4 (1965), 13—21.
12. РОЗИН, Л. А.: Метод расчленения в теории оболочек, Прикл. Матем. и. Мех. 25 (1961), 921—926.
13. RÓZSA, P.: Lineare Algebra und ihre Anwendungen.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974
14. RUTHERFORD, D. E.: On the Solution of the Matrix Equation $\mathbf{AX}+\mathbf{XB}=\mathbf{C}$, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A., 35 (1932), 53—59
15. ВИТОВА, Л. З.: Функц., анализ., Межвуз. сб. вып. 5 (1975).
16. ВИТОВА, Л. З.: Собственные и присоединенные матрицы одного линейного оператора, действующего в векторном пространстве матриц, Сборник «Соврем. Алг.» вып. 4 (1976).

Adjunkt Dr. Magdolna BÉZI, H-1521, Budapest

* In ungarischer Sprache