# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ И КРУГЛОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ*

Г. М. РЕЙТМАН

Московский инженерно-сторительный институт

(Поступило: 18 июня 1981 г.)

Представлено: проф. Рейманн Й., Кафедра математики, СТР. БТУ

**Summary**

CONTACT PROBLEM OF STRIPES AND CIRCULAR PLATES ON ELASTIC BEDDING — An approximate method has been presented for the in-plane design of stripes, and for the axisymmetrical design of circular plates, both on elasto-plastic bedding, taking the effect of contact pressure distribution on forces and reactions in the stripe in the plastic range, and in the circular plate in the elastic range of the bedding into consideration. An algebraic equation system has been suggested for the inverse problem of determining the external load intensity parameters in the ultimate plastic range of the bedding from known values.

**Резюме**

В статье приводится приближенное решение плоской задачи расчета полосы и осесимметричной задачи расчета круглой плиты, лежащих на упруго-пластическом основании. При этом учитывается влияние распределения контактных давлений в зонах пластических деформаций основания на работу полосы и круглой плиты в зонах упругих деформаций основания. Рассмотрена обратная задача: по известным величинам краевых пластических зон в основнии определить соответствующие этим зонам параметры интенсивности внешней нагрузки. Задача сведена к решению системы алгебраических уравнений.

## 1. Введение

Теория расчёта балок и плит, лежащих на основаниях, описываемых линейными моделями, как правило, приводит к большим концентрациям напряжений у краёв конструкций. В действительности же вблизи краёв в грунтовом основании возникают пластические деформации, в связи с чем контактные давления перераспределяются.

Решение смешанной задачи теории упругости и теории предельно-напряжённого состояния сложно и трудоёмко. Проблеме приближённого решения плоской контактной задачи для штампа и полосы на упруго-пластическом основании посвящён ряд работ [1, 3, 5—8]. При этом в работе [1] не учитывается влияние контактных напряжений, возникающих в зонах пласти-

* Статья публикуется в рамках договора о сотрудничестве МИСИ и БТУ.

ческих деформаций грунта, на величину осадок поверхности основания в упругой зоне. В работах [3, 5, 7] произведен учёт пригрузки основания в зонах пластических деформаций нагрузкой, полученной из эпюры контактных напряжений. Однако, в большинстве работ на эту тему изучается контактная задача для абсолютно жёсткого штампа.

В предлагаемой работе рассматривается плоская задача расчёта гибкой фундаментной полосы и осесимметричная задача расчёта круглой плиты, лежащих на упруго-пластическом основании.

## 2. Плоская задача изгиба полосы, лежащей на упруго-пластическом основании

При решении задачи приняты следующие допущения [3]: а) массив грунта представляет собой линейно-деформируемое однородное полупространство, что хорошо согласуется с экспериментальными данными для средней части полосы в зоне упругих деформаций основания;

б) на краях, в зонах неупругих деформаций основания, закон распределения контактных напряжений принимается согласно формулам теории статики сыпучей среды [4];

в) трение между полосой и основанием не учитывается.

Рассматривается следующая обратная задача: известны величины краевых пластических зон в основании $\alpha l$, задан закон изменения нагрузки $Q(x)$, приложенной к полосе с погонной жёсткостью $E$, $I$, шириной $2l$. Требуется определить интенсивность нагрузки $Q(x)$, при которой размеры пластических зон равны заданным.

Вывод основных зависимостей произведен для случая, когда к полосе приложена симметричная нагрузка $Q(x)$, являющаяся функцией одного параметра.

Из условий симметрии следует, что длины краевых пластических зон равны и выражение для реактивного давления $p$ основания является чётной функцией. В дальнейшем выражение для реактивного давления в зоне упругих деформаций основания представлено в виде степенного ряда по чётным степеням независимой переменной $\xi = \dfrac{x}{l}$

$$p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \xi^{2n}, \tag{1}$$

а реактивное давление в зонах пластических деформаций задаётся в соответствии с формулами статики сыпучей среды

$$p(\xi) = p_0 + A(1 - \xi), \tag{2}$$

где $p_0$ и $A = p_1\gamma l$ — параметры, определяемые в зависимости от коэффициента $\kappa$ сцепления грунта, его угла внутреннего трения $\varrho$ и объёмного веса $\gamma$ [4].

Изгиб полосы описывается системой интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{E_1 I}{l^4} W^{IV}(\xi) = Q(\xi) - p(\xi) \tag{3}$$

$$y(\xi) = -\frac{2l(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \int_{-1}^{1} \ln|\xi - \eta| p(\eta) d\eta + l, \tag{4}$$

где $w(\xi)$ — прогиб полосы,

$y(\xi)$ — осадка точек поверхности основания,

$E_0, \mu_0$ — соответственно модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта основания,

$E_1 I$ — жёсткость полосы,

$Q(\xi)$ — нагрузка на полосу,

$p(\xi)$ — контактное давление, которое выражается по формуле (1) в зоне упругих деформаций при $-(1-\alpha) \leq \xi \leq 1-\alpha$, и по формуле (2) в зонах пластических деформаций при $-1 \leq \xi \leq -(1-\alpha)$, $1-\alpha \leq \xi \leq 1$,

$\alpha l$ — величина краевых пластических зон.

Закон распределения напряжений $p(\xi)$ в средней части в зоне упругих деформаций находится так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) Условие равновесия. Если закон распределения нагрузки на полосу задан в виде $Q(\xi) = \sum_{n=0}^{m} b_{2n}\xi^{2n}$, причём нагрузка зависит от одного параметра, то есть $b_{2n} = f(b_0)$, то равнодействующая нагрузки $Q_1 = \int_{-1}^{1-\alpha} \sum_{n=0}^{m} b_{2n}\xi^{2n} d\xi$, и условие равновесия принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{m} b_{2n}\xi^{2n} d\xi = 2p_0\alpha + A\alpha^2 l + \int_{-(1-\alpha)}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\xi^{2n} d\xi \tag{5}$$

**2.** Условие равенства контактных напряжений на границе зон упругих и пластических деформаций основания

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(1-\alpha)^{2n} = p_0 + A\alpha \tag{6}$$

**3.** Условие равенства относительных прогибов полосы и относительных осадок поверхности основания в зоне $-(1-\alpha) \leq \xi \leq 1-\alpha$

$$w(\xi) - w(0) = y(\xi) - y(0) \tag{7}$$

Определим осадку поверхности основания в соответствии с уравнением (4), задавая нагрузку $p(\xi)$ по формулам (1) при $(\xi) \leq 1 - \alpha$ и (2) при $1 - \alpha \leq \leq (\xi) \leq 1$

$$y(\xi) = -\frac{2l(1-\mu_0^2)}{\pi E_0}\left(\int_0^{1+\xi} \ln \varrho p(\xi - \varrho) d\varrho + \int_0^{1-\xi} \ln \varrho p(\xi + \varrho) d\varrho\right) + C =$$

$$= -\frac{2l(1-\mu_0^2)}{\pi E_0}\left(\int_0^{1-\alpha+\xi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(\xi-\varrho)^{2n} \ln \varrho d\varrho + \int_{1-\alpha+\xi}^{1+\xi} \big(p_0 + A(1+\xi-\varrho)\big) \ln \varrho d\varrho + \right.$$

$$\left. + \int_0^{1-\alpha-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(\xi+\varrho)^{2n} \ln \varrho d\varrho + \int_{1-\alpha-\xi}^{1-\xi} \big(p_0 + A(1-\xi-\varrho)\big) \ln \varrho d\varrho\right) + C, \tag{8}$$

где $\eta = \xi + \varrho$ при $\xi \leq \eta \leq 1$; $\eta = \xi - \varrho$ при $-1 \leq \eta \leq \xi$.

Проинтегрировав и разложив в степенной ряд логарифмические функции, получим выражение для относительных осадок поверхности в виде:

$$y(\xi) - y(0) = -\frac{4l(1-\mu_0^2)}{\pi E_0}\left[\frac{\xi^2}{2(1-\alpha)}\left(p_0\frac{(1-\alpha)-1}{1} - A\big(\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\big) + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{1-2n} a_{2n}\right) +$$

$$+ \frac{\xi^4}{2\cdot 2(1-\alpha)^3}\left(p_0\frac{(1-\alpha)^3-1}{3} - \frac{A}{2\cdot 3}\big((1-\alpha)^3 - 1 + 3\alpha\big) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{3-2n} a_{2n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{\xi^{2\varkappa}}{2\varkappa(1-\alpha)^{2\varkappa-1}}\left(p_0\frac{(1-\alpha)^{2\varkappa-1}}{2\varkappa-1} - \right.$$

$$- \frac{A}{(2\varkappa-2)(2\varkappa-1)}\big((1-\alpha)^{2\varkappa-1} - 1 + (2\varkappa-1)\alpha\big) +$$

$$\left.\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2\varkappa-2n-1} a_{2n}\right) + \ldots\right] \tag{9}$$

Из уравнения (3) получим выражение для относительных прогибов полосы при действии на неё нагрузки $Q(\xi) = \sum_{n=0}^{m} b_{2n}\xi_{2n}$

$$w(\xi) - w(0) = -\frac{l^4}{E_1 I}\left(-\frac{E_1 I}{l^3}\varphi_0\xi + \frac{M_0}{2l^2}\xi^2 + \frac{Q_0}{6l}\xi^3 + \right.$$

$$+ \sum_{\varkappa=0}^{m}\frac{a_{2\varkappa} - b_{2\varkappa}}{(2\varkappa+1)(2\varkappa+2)(2\varkappa+3)(2\varkappa+4)}\xi^{2\varkappa+4} + \tag{10}$$

$$\left. + \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty}\frac{a_{2\varkappa}}{(2\varkappa+1)(2\varkappa+2)(2\varkappa+3)(2\varkappa+4)}\xi^{2\varkappa+4}\right),$$

где $\varphi_0$ и $Q_0$ — угол поворота поперечного сечения полосы и поперечная сила в начале координат (равны нулю),

$M_0$ — изгибающий момент, который вычисляется по формуле

$$M_0 = p_0\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)+A\frac{\alpha^2}{2}\left(1-\frac{2}{3}\alpha\right)+\sum_{\varkappa=0}^{m}\frac{a_{2\varkappa}(1-\alpha)^{2\varkappa+2}-b_{2\varkappa}}{2\varkappa+2}+$$
$$+\sum_{\varkappa=m+1}^{\infty}\frac{a_{2\varkappa}(1-\alpha)^{2\varkappa+2}}{2\varkappa+2}$$

Согласно условию (7) выражения (9) и (10) должны быть тождественно равны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\xi$ в (9) и (10), получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_{2n}$ и параметра нагрузки $Q(\xi)$

$$\frac{4l(1-\mu_0^2)}{2\pi E_0(1-\alpha)}\left[p_0\frac{(1-\alpha)-1}{1}-A(\alpha-(1-\alpha)\ln(1-\alpha))+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{1-2n}a_{2n}\right]=$$
$$=\frac{l^4}{E_1 I}\frac{M_0}{2l^2}$$

$$\frac{4l(1-\mu_0^2)}{4\pi E_0(1-\alpha)^3}\left[p_0\frac{(1-\alpha)^3-1}{3}-\frac{A}{2\cdot 3}((1-\alpha)^3-1-3\alpha)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{3-2n}a_{2n}\right]=$$
$$=\frac{l^4}{E_1 I}\frac{a_0-b_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{4l(1-\mu_0^2)}{2\varkappa\pi E_0(1-\alpha)^{2\varkappa-1}}\left[p_0\frac{(1-\alpha)^{2\varkappa-1}-1}{2\varkappa-1}-\right.$$
$$-\frac{A}{(2\varkappa-2)(2\varkappa-1)}\left((1-\alpha)^{2\varkappa-1}-1+(2\varkappa-1)\alpha\right)+ \tag{11}$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2\varkappa-2n-1}a_{2n}\right]=\frac{l^4}{E_1 I}\frac{(a_{2\varkappa-4}-b_{2\varkappa-4})(2\varkappa-4)!}{(2\varkappa)!}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

К этой системе необходимо добавить уравнения (5) и (6). Произведенные пробные расчёты показывают, что можно получить достаточную точность, ограничившись полиномом десятой степени для $p(\xi)$.

Если в системе (11) положить $\alpha = 0$, то получим решение М. И. Горбунова-Посадова для полосы, лежащей на упругом основании [1]. В случае абсолютно жёсткого штампа приведенное решение является приближённым решением задачи в постановке И. Я. Штаермана [5].

### 3. Заргужение полосы равномерно распределённой нагрузкой

Рассмотрим в качестве примера полосу, загруженную равномерно распределённой нагрузкой $q$ и лежащую на основании, обладающем свойствами идеально связной среды ($A = 0$). Обозначим через $t$ отвлечённую величину, называемую гибкостью полосы

$$t = \frac{\pi E_0 l^3}{4 E_1 I (1 - \mu_0^2)}$$

Если ограничиться в выражении для контактного давления $p(\xi)$ полиномом десятой степени, то система уравнений (6), (11) запишется в следующем виде:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{5} (1 = \alpha)^{2n} a_{2n} = p_0$$

$$\left(1 + t\frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2}\right) a_0 - \sum_{n=1}^{5}\left(\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2n-1} + t\frac{(1-\alpha)^{2n+2}\left(n-(2n-1)\alpha\right)}{(2n+1)(2n+2)}\right) a_{2n} =$$
$$= p_0\alpha + p_0 t\frac{\alpha(1-\alpha)^2}{2}$$

$$\left(0{,}3333 - t\frac{\alpha(1-\alpha)^3}{2\cdot 3}\right) a_0 - \sum_{n=1}^{5}\left(\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2n-3} - t\frac{(1-\alpha)^{2n+4}}{2\cdot 2n(2n+1)}\right) a_{2n} =$$
$$= -p_0\frac{(1-\alpha)^3 - 1}{3} - p_0 t\frac{\alpha(1-\alpha)^3}{2\cdot 3}$$

$$0{,}2000\, a_0 + \left(\frac{(1-\alpha)^2}{3} - t\frac{(1-\alpha)^5}{3\cdot 4\cdot 5}\right) a_2 - \sum_{n=2}^{5}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2n-5} a_{2n} = -p_0\frac{(1-\alpha)^5 - 1}{5}$$

$$0{,}1429\, a_0 + \frac{(1-\alpha)^2}{5} a_2 + \left(\frac{(1-\alpha)^4}{3} - t\frac{(1-\alpha)^7}{5\cdot 6\cdot 7}\right) a_4 - \sum_{n=3}^{5}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2n-7} a_{2n} =$$
$$= p_0\frac{(1-\alpha)^7 - 1}{7} \qquad (12)$$

$$0{,}1111\, a_0 + \frac{(1-\alpha)^2}{7} a_2 + \frac{(1-\alpha)^4}{5} a_4 + \left(\frac{(1-\alpha)^6}{3} - t\frac{(1-\alpha)^9}{7\cdot 8\cdot 9}\right) a_6 +$$
$$+ \sum_{n=4}^{5}\frac{(1-\alpha)^{2n}}{2n-9} a_{2n} = -p_0\frac{(1-\alpha)^9 - 1}{9}$$

В результате решения предложенным методом задач о загружении полос с показателями гибкости $t = 0;\ 5;\ 10$; равномерно распределённой нагрузкой $q$ для случая идеально связного грунта ($p_0 \neq 0,\ A = 0$) составлены графики зависимости параметра интенсивности равномерно распределённой нагрузки $\frac{q}{p_0}$ приложенной к полосе, от величины зон пластических деформаций $\alpha$ (См.

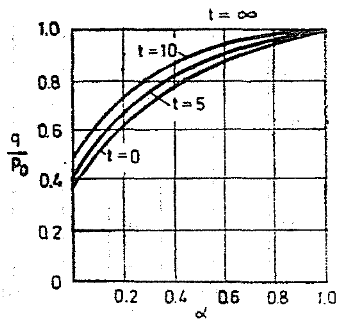


*Рис. 1*

рис. 1). Каждая привая соответствует определённому показателю гибкости полосы $t$. Зная в определённой задаче величину нагрузки на полосу $q$ и параметр $p_0$, зависящий от физических характеристик основания, по кривым рис. 1 можно приближённо определить величины зон пластических деформаций в основании.

Рассмотрим теперь основания, обладающие свойствами идеально-сыпучей среды ($p_0 = 0$). В этом случае в системе уравнений (5), (6), (11) будут отсутствовать члены, зависящие от $p_0$. В системе уравнений (12) правые части уравнений останутся такими же, изменятся лишь свободные члены. Матрица — столбец свободных членов будет иметь следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} A\alpha \\ A\big(\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\big) + At\,\dfrac{\alpha^3(3-4\alpha)(1-\alpha)}{12} \\ \dfrac{A}{3\cdot 2}\big((1-\alpha)^3 - 1 + 3d\big) - At\,\dfrac{\alpha^2(1-\alpha)^3}{3\cdot 4} \\ \dfrac{A}{5\cdot 4}\big((1-\alpha)^5 - 1 + 5\alpha\big) \\ \dfrac{A}{7\cdot 6}\big((1-\alpha)^7 - 1 + 7\alpha\big) \\ \dfrac{A}{9\cdot 8}\big((1-\alpha)^9 - 1 + 9\alpha\big) \end{Vmatrix} \qquad (13)$$

На рис. 2 представлены кривые зависимости параметра интенсивности равномерно распределённой нагрузки $\dfrac{q}{A}$ от величины зон пластических деформаций $\alpha$ в случае идеально сыпучего грунта.

Если основание обладает свойствами и связности и сыпучести ($p_0 \neq 0$, $A \neq 0$), то ординаты кривых, приведенных на рис. 1, 2, вычисленные в каждой конкретной задаче для определённых значений $p_0$ и $A$, следует сложить и построить график $q = f(\alpha)$.

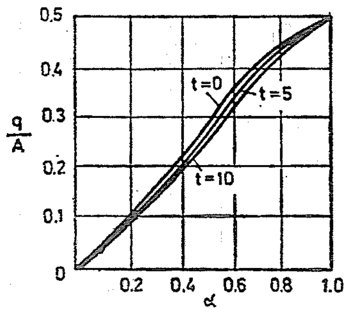


*Рис. 2*

### 4. Осесимметричная задача изгиба круглой плиты на упруго-пласмическом основании

При рассмотрении осесимметричной задачи расчёта круглой плиты радиуса $R$ приняты следующие допущения [2]:

а) в зоне упругих деформаций основания его работа описывается моделью упругого полупространства;

б) в зоне пластических деформаций у края плиты основание работает как идеально связная среда;

в) трение между плитой и основанием отсутствует.

Рассматривается действие на плиту равномерно распределённой нагрузки $q$. Закон контактных напряжений в зоне упругой работы основания $0 \leq r \leq \beta R$ задаётся в виде степенного ряда по чётным степеням независимой переменной $\frac{r}{R}$:

$$p(\varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\varrho^{2n} \quad \text{при} \quad 0 \leq \varrho \leq \beta. \tag{14}$$

Считается, что зона пластических деформаций основания достаточно удалена от центра плиты и в ней возникают равномерно распределённые по кольцу реактивные давления основания

$$p(\varrho) = p_0 \quad \text{при} \quad \beta \leq \varrho \leq 1. \tag{15}$$

Осесимметричная задача изгиба круглой плиты при указанных выше допущениях сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{d^4w}{d\varrho^4} + \frac{2}{\varrho}\frac{d^3w}{d\varrho^3} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{d^2w}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^3}\frac{dw}{d\varrho} = \frac{R^4}{D}\left(q - p(\varrho)\right)$$

$$v(\varrho) = \frac{4(1-\mu_0^2)R}{\pi E_0}\left(\frac{1}{\varrho}\int_0^{\varrho}\left(p(\bar\varrho)\bar\varrho\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\bar\varrho}{\varrho}\right)^2\sin^2\alpha}}\right)d\bar\varrho +\right.$$

$$\left. + \int_{\varrho}^{1}\left(p(\bar\varrho)\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\varrho}{\bar\varrho}\right)^2\sin^2 x}}\right)d\bar\varrho \right) \tag{16}$$

где $w(\varrho)$ — прогиб плиты,
$v(\varrho)$ — осадка точек поверхности основания,
$E_0$, $\mu_0$ — модуль деформации и коэффициент Пуассона грунта,
$D$ — цилиндрическая жёсткость плиты,
$q$ — нагрузка на плиту,
$p(\varrho)$ — контактное давление, выражаемое по формулам (14) и (15),
$\varrho$ — приведенное расстояние от центра плиты до точки, осадка в которой определяется,
$\bar\varrho$ — приведенное расстояние от центра плиты до элемента нагрузки.

Для определения неизвестных коэффициентов ряда $a_{2n}$ приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях $\varrho$ в выражениях для прогиба плиты и перемещений поверхности основания при $\varrho \le \beta$, то есть в зоне упругих деформаций основания. К полученной бесконечной системе алгебраических уравнений добавляются уравнения, полученные из условий равновесия и непрерывности эпюры реактивных давлений основания на границе зон упругих и пластических деформаций.

При действии на плиту равномерно распределённой нагрузки $q$ задача приводится к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений относительно $a_{2n}$ и $\beta$

$$\frac{2(1-\mu_0^2)D}{E_0R^3}\left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\right)^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\frac{\beta^{2n-2m+1}}{2n-2m+1} - p_0\frac{1-\beta^{1-2m}}{2m-1}\right) =$$

$$= \frac{a_{2m-4}}{\lambda_{2m-4}}, \quad m > 2 \tag{17}$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\frac{\beta^{2n+2}}{n+1} + p_0 - p_0\beta^2 \tag{18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\beta^{2n} = p_0, \tag{19}$$

где $\lambda_{2m-4} = 16\ \mathrm{m}^2\,(m-1)^2$

При $m = 1$ правая часть уравнения (17) имеет вид

$$\frac{1}{16}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\gamma_{2n} + p_0\delta\right),$$

где

$$\gamma_{2n} = \frac{(2+n)\big(m_1(7-3n)-8\ln\beta(m_1+1)(n+1)+5(1-n)\big)+(m_1+1)(n+1)^2\beta^2}{4(m_1+1)(n+2)(n+1)^2}\,\beta^{2n-2}$$

$m_1 = \dfrac{1}{\mu_1}$, $\mu_1$ — коэффициент Пуассона для плиты,

$$\delta = \frac{2\ln\beta(m_1+1)+(m_1-1)(1-\beta)+4}{4(m_1+1)}\,\beta^2$$

При $m = 2$ правая часть имеет вид $\dfrac{q - a_\theta}{64}$

## Литература


1. ГОРБУНОВ-ПОСАДОВ, М. И.: Расчёт конструкций на упругом основании, Гостехиздат, Москва, 1953, 515с.
2. КОРЕНОВ, Б. Г., РЕЙТМАН, Г. М. и др.: Некоторые теории плит на упругом основании, «Прочность и пластичность», Доклады 4 Всесоюзной конференции по прочности и пластичности, Наука, Москва, 1971, с. 410—416.
3. РЕЙТМАН, Г. М.: К расчёту полосы, лежащей на упруго-пластическом основании, «Основания, фундаменты и механика грунтов», 1965, № 1, с. 9—10.
4. СОКОЛОВСКИЙ, В. В.: Статика сыпучей среды, Гостехиздат, Москвы, 1960.
5. ШТАЕРМАН, И. Я.: Распределение давления под фундаментом при наличии пластической зоны, Сб. трудов МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1956, № 14, с. 32—57.
6. МЕДНИКОВ, И. А.: Изгиб плиты на упруго-пластическом основании с учётом просадки грунта при действии нагрузки и температуры, «Труды Московского автомобильно-дорожного института», 1978, № 149, с. 54—70.
7. Schultze, E.: Distribution of Stress beneath a Rigid Foundation. Proc. of the 5th Intern. Conf. on Soil Mech. and Foundation Engg. Vol. I. Paris, 1961
2. Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C., Lewis, R. W.: A Unified Approach to Soil Mechanics Problems (including Plasticity and Viscoplasticity). Finite Elem. Geomech., London. 1977, 151—177


РЕЙТМАН, Т. М., доцент,
МИСИ, Москва, Шлюзовая наб. 8, СССР