

# OPTIMALE PLANUNG VON INGENIEURFESTPUNKTNETZEN

F. SÁRKÖZY

Lehrstuhl für Vermessungskunde, Geodätisches Institut, TU Budapest

Eingegangen am 28. November, 1978

## 1. Probleme der optimalen Planung (Netzplanung) erster Ordnung

Unsere Ausführungen über die Planung erster Ordnung der Festpunktnetze [1] sollen durch folgendes ergänzt werden.

Bei Festpunktnetzen für ingenieurmäßige Zwecke geht man als Zielfunktion oft von der Minimalisation der reziproken Gewichte einer oder mehrerer gewisser Größen aus. Für diesen Fall liefert die Projektionsgradientenmethode gute Ergebnisse: die Wahl der Zielfunktion ist technisch begründet und motiviert. Erfolgt aber die Planung erster Ordnung auf Grund des Fehlerbildes eines Lokalnetzes, und wird als Zielfunktion die verallgemeinerte Varianz (Grunddeterminante der Varianz-Kovarianz-Matrix) gewählt, besteht die erwähnte Eindeutigkeit bei weitem nicht mehr. Die Schwierigkeiten ergeben sich daraus, daß

a) der Zusammenhang einerseits zwischen der Determinante der Varianz-Kovarianz-Matrix, andererseits den kritischen Fehlerkenngrößen der verschiedenen Absteckungs-, Deformationsmessungs- u.a. Aufgaben nicht bekannt ist;

b) eine Optimierung auf Grund der Minimalisation der verallgemeinerten Varianz nur dann möglich ist, wenn Netzelemente (Koordinaten) bestimmter Zahl als fehlerlos betrachtet werden, da im Gegenfall infolge der Singularität der Varianz-Kovarianz-Matrix ihre Determinante unabhängig von der Netzform gleich Null ist. Wird dagegen die optimale Form mit der Annahme von fehlerlosen Elementen geplant, so zieht sich das Netz um die als fehlerlos angenommenen Netzelemente zusammen. Das technische Gefühl kann jedoch diese Lösung nicht annehmen, da es in der Wirklichkeit keine fehlerlosen Elemente (Koordinaten) gibt und diese Fiktionen nur für das Rechenverfahren nötig sind.

Das Problem a) erfordert weitere Untersuchungen, deshalb soll die Frage von einer anderen Seite angenähert werden.

Die Behebung des Widerspruches b) soll auf zweierlei Art versucht werden. Zuerst wird aus der Annahme ausgegangen, daß die Determinante der Varianz-Kovarianz-Matrix die allgemeinste Zielfunktion repräsentiert, weil sie gleich dem Absolutwert des Koeffizienten höchsten Grades im charakteristischen Matrizenpolynom ist [2]. Da der Absolutwert des Koeffizienten nied-

rigsten Grades gleich der Spur der Matrix ist — die auch als Zielfunktion verwendet werden kann —, liegt die Feststellung auf der Hand, daß alle Koeffizienten verwendet werden können, deren Allgemeinheit mit der Gradzahl wächst. Werden die Varianz-Kovarianz-Matrix mit  $\Sigma$ , der Vektor des Matrixeigenwertes mit  $\lambda$ , die Koeffizienten mit  $k_i$  bezeichnet, kann die charakteristische Gleichung aufgeschrieben werden:

$$\det (\Sigma - \lambda \mathbf{E}) = (-1)^n (\lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n). \quad (1)$$

Bei singulären Matrizen sind die Koeffizienten  $d$  der Zahl gleich dem Matrizendefekt gleich Null.

Der letzte Koeffizient noch nicht gleich Null ist  $k_{n-d}$ . Es liegt auf der Hand, als Zielfunktion

$$f = abs \quad (k_{n-d}) \quad (2)$$

zu wählen. Die Koeffizienten  $k_i$  können nach der Methode von Le Verrier bestimmt werden, die aber einen großen Rechenaufwand erfordert.

Die Planung erster Ordnung des freien Netzes kann zweitens nach folgender Überlegung durchgeführt werden: Damit die Matrix des Normalgleichungssystems des Lokalnetzes nicht singulär sei, ist es notwendig, daß im Falle einer reinen Richtungsmessung vier, im Falle eines kombinierten Netzes drei nicht in dieselbe Achse fallende Punktkoordinaten als fehlerfrei betrachtet werden können. Die als fehlerlos betrachteten Werte können beliebig gewählt werden. Bezeichnet man mit  $N$  die Anzahl der Unbekannten und mit  $d$  den Defekt, und wird die Optimierung für verschiedene Netze der Zahl

$$V = \frac{N!}{(N-d)! d!} - 2 \frac{\left(\frac{N}{2}\right)!}{\left(\frac{N}{2} - d\right) d!} \quad (3)$$

durchgeführt, so erhält man die optimale Form aus dem arithmetischen Mittel der ermittelten Punktorte. Es sei bemerkt, daß im Falle eines aus zehn Punkten bestehenden Netzes 900 selbständige Optimierungen durchzuführen sind; trotzdem ist aber diese Methode schneller, als das Optimieren unter Anwendung der Koeffizienten der charakteristischen Gleichung.

## 2. Planung der Meßanordnung

Wenn die Orte der Netzkpunkte festgelegt sind, z. B. die Terraingegebenheiten keine Änderung der Punktorte gestatten, dann läßt sich durch die Planung nur die Meßanordnung erfassen. Da stellt sich wieder die Frage,

auf Grund welcher Kriterien die Planung durchgeführt werden soll. Die Grundgleichung der Planung

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} = \hat{\Sigma}^{-1} = \mathbf{G} \quad (4)$$

ist aus der Ausgleichsrechnungstheorie bekannt. In (4) bedeuten  $\mathbf{A}$  die Formmatrix,  $\mathbf{P}$  die Gewichtsmatrix der Messungen,  $\mathbf{G} = \hat{\Sigma}^{-1}$  den inversen Wert der Varianz-Kovarianz-Matrix. Sind die Punktorte bestimmt und die Liste der *möglichen* Messungen bekannt, so verursacht die Aufstellung der Matrix  $\mathbf{A}$  keine besonderen Schwierigkeiten. (Es sei bemerkt, daß im Interesse der klaren Darstellung die *Winkel* und die Entfernungen als unabhängige Meßergebnisse betrachtet werden [4]). In Gl. (4) sind zwei unbekannte Matrizen: die geplante Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  der Messungen und die geplante Varianz-Kovarianz-Matrix  $\hat{\Sigma}$ .

Die Gütekriterien der Meßergebnisse sind nun, daß die durch die Ausgleichung der am wirtschaftlichsten durchgeführten Messungen erhaltene Varianz-Kovarianz-Matrix mit der geplanten übereinstimme und die Messungen am billigsten (raschesten) durchführbar seien. Es ist ersichtlich, daß die Kriteriensysteme der Planungen erster und zweiter Ordnung voneinander abweichen; auf die Überbrückung dieses Widerspruches werden wir noch zurückkommen.

Um die Aufgabe zu lösen, müssen zwei Fragen erörtert werden:

1. die Lösungsmöglichkeiten der Gl. (4).
2. die Aufstellung der geplanten Varianz-Kovarianz-Matrix.

### *Bestimmung der Meßgewichte*

Die numerische Lösung der Aufgabe erfolgt entweder durch unmittelbare Invertierung oder nach der simplexen Methode der linearen Programmierung. Welche Methode auch angewendet wird, müssen vorher die Meßgewichte aus (4) mit Hilfe einer wenig bekannten Matrizenoperation, des sogenannten *Khatri—Rao-Produkts*  $\odot$  ausgedrückt werden. Dieses Produkt ist definitionsmäßig

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (5)$$

$n, m \quad n, m \quad \frac{n(n+1)}{2}, m$

wo

$$c_{i,j} = a_{k,j} b_{l,j}$$

$$i = \sum_{v=1}^{k-1} (n - v + 1) + l - k + 1$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$v = k, k + 1, \dots, n.$$

Im Sinne der Produktdefinition ist

$$(\mathbf{A}' \odot \mathbf{A}')\mathbf{p} = \mathbf{U}\mathbf{p} = \mathbf{g} \quad (6)$$

wo

$$\mathbf{p} = (p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots, p_{nm})^T$$

den aus den unbekanntem Meßgewichten gebildeten Säulenvektor, und

$$\mathbf{g} = (g_{11}, g_{12}, g_{13}, \dots, g_{1n}, g_{22}, g_{23}, g_{24}, \dots, g_{2n}, \dots, g_{nn})^T$$

den aus der oberen Dreieckmatrix der Inversen der geplanten Varianz-Kovarianz-Matrix reihenkontinuierlich gebildeten Säulenvektor bedeuten.

Vor der direkten Lösung der Aufgabe müssen wir aber den Charakter des Gleichungssystems (6) analysieren. Das Gleichungssystem kann unbestimmt, bestimmt oder überbestimmt sein; das unbestimmte System kann entweder inkonsistent oder konsistent, das überbestimmte System aber nur inkonsistent sein.

Im Falle eines bestimmten Systems ist die die Koeffizienten des Gleichungssystems enthaltende Matrix  $\mathbf{U}$  defektlos und die Anzahl der Zeilen stimmt mit der Anzahl der unbekanntem Meßgewichte überein, d. h.

$$\frac{n(n+1)}{2} = m \quad (7)$$

und

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{g}. \quad (8)$$

Ist die Anzahl der unabhängigen Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekanntem, d. h.

$$\frac{n(n+1)}{2} - d < m \quad (9)$$

( $d$  ist die Anzahl der Defekte der Matrix  $\mathbf{U}$ ), können zwei Fälle unterschieden werden:

*a)* bei einem konsistenten Gleichungssystem gibt es unendlich viele Lösungen.

*b)* bei einem widersprüchlichen Gleichungssystem gibt es keine Lösung.

Im Falle *a)* kann die Lösung vereindeutigt werden, indem gefordert wird, daß die Quadratsumme der Meßgewichte minimal sei, d. h. es wird eine optimale Meßanordnung angestrebt. Solche Lösungen sind bekannt [5, 6]. Der Terminologie von [5] gemäß ist die Lösung mit Hilfe des sogenannten Normalinversen zu suchen. Die Lösung lautet:

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}^T(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{U}_n^-\mathbf{g}, \quad (10)$$

wo neben den gebräuchlichen Bezeichnungen  $( )^-$  das allgemeine Inverse und  $( )_n^-$  das Normalinverse bedeuten.

Der Fall *b*) liegt dann vor, wenn die Matrix  $\mathbf{U}$  eine oder mehrere Nullzeilen enthält. Dies ist der Fall, wenn ein Element der Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  gleich Null ist. Die Lösung kann formell mit Hilfe des sogenannten »stochastischen Kreisinversen« oder mit anderen Worten, des *Moore—Penrose*-Inversen gesucht werden. Dieses Inverse gibt nämlich bei einem beliebigen linearen Gleichungssystem eine Lösung, durch welche gesichert wird, daß einerseits die Quadratsumme der Lösungsvektorelemente, andererseits auch die Quadratsumme der Lösungsfehler minimal seien, d. h.

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = \min \quad (11)$$

und

$$(\mathbf{U} \mathbf{p} - \mathbf{g})^T (\mathbf{U} \mathbf{p} - \mathbf{g}) = \min.$$

Nach [5] ergibt sich die Lösung in folgender Form:

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}^T (\mathbf{U} \mathbf{U}^T)^- \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^- \mathbf{U}^T \mathbf{g}. \quad (12)$$

Wenn für das allgemeine Inverse in (12) ein solches gewählt wird, dessen Rang mit dem Rang der originalen Matrix übereinstimmt, dann sind

$$\mathbf{U}^- \mathbf{U} \mathbf{U}^- = \mathbf{U}^-$$

und

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^- \mathbf{U} = \mathbf{U} \quad (13)$$

und folgende Zusammenhänge sind evident:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \mathbf{U}^T)^- &= (\mathbf{U}^-)^T \mathbf{U}^- \\ \mathbf{U}^- &= \mathbf{U}^T (\mathbf{U}^-)^T \mathbf{U}^-. \end{aligned} \quad (14)$$

Unter Berücksichtigung von (14) kann (12) in folgende Form gebracht werden:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^+ \mathbf{U}^T \mathbf{g} \quad (12a)$$

(wo durch  $( )^+$  der Umstand ausgedrückt wird, daß das gewählte verallgemeinerte Inverse die Bedingungen in (13) befriedigt.

Die numerische Lösung des untersuchten Falles vereinfacht sich aber, wenn die nur Nullen enthaltenden Zeilen der Matrix  $\mathbf{U}$  und die dazugehörenden Elemente  $\mathbf{g}$  außer acht gelassen werden und die Lösung auf den Fall *a*) zurückgeführt wird.

Ist die Anzahl der unabhängigen Gleichungen größer als die der Unbekannten, also

$$\frac{n(n+1)}{2} - d > m,$$

dann ist das Gleichungssystem widersprüchlich und kann aufgrund von (12a) gelöst werden.

Schließlich soll erwähnt werden, daß im Falle, wenn der Rang der Matrix  $U^T U$  mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, das Inverse  $( )^+$  durch das wahre Inverse  $( )^{-1}$  zu ersetzen ist. (Durch den von dem Verfasser angewendeten Algorithmus wird dieses Ersetzen in Abhängigkeit von dem Rang der Matrix automatisch durchgeführt.)

Die dargelegte Methode hat auch mehrere Nachteile:

- a) der als Ergebnis erhaltene Gewichtsvektor kann auch negative Gewichte enthalten, dies kann aber in der Wirklichkeit nicht vorkommen;
- b) das Optimieren wird aufgrund der Minimalisation der Gewichtsquadratsumme verwirklicht: es wird gewissermaßen angenommen, daß die Gewichte und die Unkosten zueinander in linearer Beziehung sind.

Die geschilderten Nachteile sind teilweise vermeidbar, indem man als Grundlage der Lösung die Simplexmethode der linearen Programmierung wählt. Für die Behebung des ersten Nachteils, d.h. der negativen Gewichte, findet man Hinweise in der Literatur, z. B. in [4], dagegen erfordert die Berücksichtigung der realen Kostenfunktion weitere Untersuchungen. Die beim Messen eines kombinierten (Winkel- und Längenmessungen enthaltenden) Netzes anfallenden Unkosten setzen sich aus folgenden Elementen zusammen:

- a) aus den Kosten  $F_i$  der Standpunktausgestaltung (wo  $i$  die Nummer des Standpunktes bedeutet), welche den Ausbau des Standpunktes, den Aufmarsch mit den Instrumenten usw. enthalten;

- b) aus dem Anschaffungspreisanteil (Leihkostenanteil) des Distanzmessers; wenn ein solcher benutzt wird, soll dessen Wert  $F_i$  als einmaliger Kostenaufwand für die ganze Messung in Betracht genommen werden;

- c) aus dem Anschaffungspreisanteil (Leihkostenanteil) des Winkelmeßinstruments; auch dieser Wert  $F_{sz}$  ist in Bezug auf die ganze Messung als einmal anfallend zu betrachten, da aber  $F_{sz} \ll F_i$ , wird dieser Posten nur der Vollständigkeit halber in die Kostenfunktion einbezogen;

- d) beim Messen zwischen zwei Punkten ist die Richtung meistens durch Durchbau oder Punktmarkenbau wahrnehmbar zu machen. Es sei bemerkt, daß durch diese Kosten  $F_{i,j}$  jede Richtung nur einmal belastet wird und nur dann, wenn sie wenigstens in einer Entfernungs- oder Winkelmessung mit einem Gewicht über Null vorkommen. (Die Indexe  $i, j$  verweisen auf die zwei Richtungsendpunkte.)

e) durch Wiederholung der aus einzelnen Messungen entstehenden Kosten ( $c_i$ ).

Die Richtigkeit der Kostenfunktion erfordert, daß letztere statt der Gewichte die ganzen Werte der Messungswiederholungen enthalte. Im Falle kombinierter (Winkel- und Längenmessungen enthaltender) Netze sollen daher die Gewichte als die Produkte zweier Komponenten gebildet werden:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\underline{1}} \times \mathbf{P}_{\underline{w}} \quad (14)$$

wo  $\mathbf{P}_{\underline{1}}$  die relative Gewichtsmatrix einer einmaligen Messung,  $\mathbf{P}_{\underline{w}}$  die Matrix der Zahl der Wiederholungen bedeutet.

Beide sind Diagonalmatrizen. Bringen wir nun Gl. (4) in folgende Form:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\underline{2}} \times \mathbf{P}_{\underline{w}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.1)$$

so läßt sich der Ausdruck (6) durch Umformen der Diagonalmatrizen  $\mathbf{P}_{\underline{1}}$  und  $\mathbf{P}_{\underline{w}}$  in Vektoren in folgender Form schreiben:

$$(\mathbf{p}_i^T \odot \mathbf{A}^T \odot \mathbf{A}^T) \mathbf{P}_{\underline{w}} = \mathbf{U}_{mod} \mathbf{P}_{\underline{w}} = \mathbf{g}. \quad (6.1)$$

Die Zielfunktion der Optimierung kann dann folgenderweise aufgeschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^n F_i y_i + \sum_{i=1}^m C_i p_i \mathbf{P}_{\underline{w}} + F_i q + F_{sz} r + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n F_{ij} z_{ij} = \min \quad (15)$$

mit den Einschränkungen:

$$\mathbf{U}_{mod} \mathbf{P}_{\underline{w}} \geq \mathbf{g}; \mathbf{P}_{\underline{w}} \geq 0 \quad (16)$$

$$q = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ wenn } \sum_{i=(sz+1)}^m p_i > 0$$

$$r = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ wenn } \sum_{i=1}^{sz} p_i > 0 \quad (17)$$

$$y_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ wenn } \sum_{k=(i-1)\binom{n-1}{2}+1}^{i \cdot \binom{n-1}{2}} p_k > 0 \vee \sum_{k=n(n-1)+\frac{(i-1)(2n-i)}{2}+1}^{n(n-1)+\frac{i(2n-i-1)}{2}} p_k > 0 \wedge$$

$$\wedge \sum_{k=n(n-1)+\frac{(i-1)(2n-i)}{2}+1}^{n(n-1)+\frac{i(2n-i-1)}{2}} (p_k y_k) - m = 0 \quad (18)$$

$$\text{wo} \quad m = n(n-1) + \frac{(i-1)(2n-1)}{2} \quad (19)$$

$$z_{i,j} \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ wenn } \sum_{k \in d(i,j)} p_k > 0. \quad (20)$$

Die ersten Elemente  $p_1 \dots p_{s_2}$  des unbekanntes Gewichtsvektors sind Winkelgewichte, die weiteren Elemente  $p_{s_2+1} \dots p_m$  sind Entfernungsgewichte. Beim Algorithmieren des Ausdrucks (19) ist zu beachten, daß eine Richtung in mehreren,  $(n-2) \cdot 2$  Winkeln vorkommt, daher ist die Menge  $d$  aufzuschreiben, als die Gesamtheit der Laufzahlen der Winkel, in deren Bildung die Richtung  $i, j$  eine Rolle spielt. Die Allgemeinheit der Lösung wird durch die Annahme erhöht, daß sämtliche Richtungen prinzipiell meßbar sind; die in der Wirklichkeit nicht kommensurablen Richtungen können durch die Wahl eines entsprechend großen  $F_{i,j}$ -Wertes ausgeschaltet werden. Die Aufgabe kann mit Hilfe einer linearen, ganzwertigen Programmierungsmethode gelöst werden.

### 3. Ausgestaltung der Varianz-Kovarianz-Matrix

Die wissenschaftliche Festlegung der an die ingenieurgeodätischen Festpunktnetze gestellten Genauigkeitsbedingungen nahm ihren Anfang am Ende der fünfziger Jahre. Zu dieser Zeit merkten die Geodäten auf, daß die praktische Verwendbarkeit der Netze (auch bei Landes-, also nicht ingenieurgeodätischen Netzen) durch die relativen Fehlerkennwerte determiniert wird. Da der Algorithmus der Planung zweiter Ordnung die absolute Varianz-Kovarianz-Matrix verwendet, soll untersucht werden, welche Bedingungen durch die gewünschten relativen Genauigkeitskennwerte an die Bildung der geplanten absoluten Varianz-Kovarianz-Matrix gestellt werden.

Zur Charakterisierung der relativen Fehler der Netzpunkte können am zweckmäßigsten die relativen Fehlerellipsen benutzt werden. Es wird gefordert, daß

- a) die relativen Fehlerellipsen Kreise seien;
  - b) die Halbmesser der relativen Fehlerkreise sich mit zunehmender Entfernung zwischen den Punkten nur wenig ändern,
  - c) diese Änderungen die Eigenschaften der kleinen Netze spiegeln.
- Die Bedingung a) wird mathematisch wie folgt ausgedrückt:

$$\sigma_{x_i y_i} + \sigma_{x_k y_k} - \sigma_{x_i y_k} - \sigma_{y_i x_k} = 0. \quad (21)$$

Wird nun angenommen, daß auch die absoluten Fehlerellipsen des Netzes zu Kreisen werden, dann sind:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_i x_i} &= \sigma_{y_i y_i} = \sigma_{ii} \\ \sigma_{x_k x_k} &= \sigma_{y_k y_k} = \sigma_{kk} \\ \sigma_{x_i y_i} &= \sigma_{x_k y_k} = 0\end{aligned}\quad (22)$$

und der Halbmesser des relativen Fehlerkreises hat die Form:

$$r_{ik}^2 = \sigma_{ii} + \sigma_{kk} - \sigma_{x_i x_k} - \sigma_{y_i y_k} \quad (23)$$

Schließlich wird die willkürliche Annahme gemacht, daß die Quer- und Längskorrelationsfunktionen in der Zerlegung\* nach *Taylor—Kármán* gleich sind und demzufolge

$$\begin{aligned}\sigma_{x_i y_k} &= -\sigma_{y_i x_k} = 0 \\ \sigma_{x_i x_k} &= \sigma_{y_i y_k} = \sigma_{ik}.\end{aligned}\quad (24)$$

Unter Berücksichtigung der Netzeigenschaften soll die von den Forschern GRAFAREND [8] und BAARDA [9] gestellte strenge Bedingung, daß der Halb-

\* In der Taylor—Kármánschen Zerlegung gibt Grafarend [8] die Elemente der Varianz-Kovarianz-Matrix mit folgenden Ausdrücken an:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_i y_i} &= (\Phi_l(s_{ij}) - \Phi_m(s_{ij})) \frac{dx_{ij} dy_{ij}}{s_{ij}^2} \\ \sigma_{x_i x_j} &= \Phi_m(s_{ij}) + (\Phi_l(s_{ij}) - \Phi_m(s_{ij})) \frac{dx_{ij}^2}{s_{ij}^2} \\ \sigma_{y_i y_j} &= \Phi_m(s_{ij}) + (\Phi_l(s_{ij}) - \Phi_m(s_{ij})) \frac{dy_{ij}^2}{s_{ij}^2} \\ \sigma_{x_i x_i} &= \sigma_{y_i y_i} = \text{const.}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \frac{4d^2}{s^2} - 2K_0(s/d) - \frac{4d}{s} K_1(s/d) \\ \Phi_l &= -\frac{4d^2}{s^2} - 2K_0(s/d) + \frac{4d}{s} K_1(s/d) + \frac{2s}{d} K_1(s/d)\end{aligned}$$

wo die Bezeichnungen:

- $\Phi_m$  die Querkorrelationsfunktion,
  - $\Phi_l$  die Längskorrelationsfunktion,
  - $K_0$  die modifizierte Bessel-Funktion 0-ter Ordnung zweiten Rangs,
  - $K_1$  die modifizierte Bessel-Funktion erster Ordnung zweiten Rangs,
  - $s$  die Entfernung zwischen den zwei Punkten,
  - $d$  die für das Netz kennzeichnende Länge, mit welcher im Falle gleicher Seitenlängen der Wert der Querkorrektur gleich 0.5 ist,
- bedeuten.

messer des absoluten Fehlerkreises konstant sein müsse, gemäßigt werden. Bei Netzen großen Umfangs ist die Forderung eines konstanten Halbmessers zweifellos richtig. Bei kleinen Netzen ist aber die Forderung praktisch schwer zu verwirklichen. Es wird empfohlen, die Varianzen in folgender Form anzuschreiben:

$$\sigma_{ii} = \text{Konstante} + m_0^2 \left( \frac{n_{ic}}{n_{\max}} \right)^k \lg(1 + \delta n_{ic}) \quad (25)$$

wobei  $m_0$  der mittlere Fehler der Gewichtseinheit,  $n_{ic}$  die Entfernung des geometrischen Schwerpunkts des Netzes vom fraglichen Punkt, dividiert durch die durchschnittliche Seitenlänge,  $n_{\max}$  die Entfernung der entferntesten Netzpunkte dividiert durch die durchschnittliche Seitenlänge bedeuten,  $\delta$  gleich 1, oder 2 ist, je nach dem, ob es sich um einen äußeren oder inneren Punkt handelt; der Wert von  $k$  wird in Abhängigkeit von der an das Netz gestellten Steifheitsbedingung bestimmt (ist  $k = \infty$ , wird das zweite Glied von (25) gleich Null sein und die Varianz ist in sämtlichen Netzpunkten gleich).

Zur Begründung der Form des Kovarianzausdrucks soll in Gedanken ein Versuch vorgenommen werden. Nehmen wir an, daß zwei Netzpunkte sich sehr nahe aneinander befinden, jedoch nicht direkt kommensurabel sind. In diesem Falle wird der aus der Ausgleichung errechnete relative Fehler größer sein, als wenn dieser durch direkten Vergleich bestimmt worden wäre.

Wird die Entfernung zwischen den zwei Punkten kontinuierlich vergrößert, erreicht man eine durchschnittliche Entfernung  $cl_d$  bei der schon aus technischem Gesichtspunkt vorgeschrieben werden soll, daß die aus den abgeleiteten Werten bzw. aus dem angenommenen direkten Vergleich gewonnenen relativen Fehlerkennwerte gleich sind. Bei weiterer Vergrößerung der Entfernung bis zu einer gewissen Grenze wird der aus der Ausgleichung errechnete relative Fehler kleiner sein, als der relative Fehler der auf die Referenzentfernung bezogenen unmittelbaren Messung. Über dieser Grenze übersteigt der relative Fehler den relativen Fehler der auf die Referenzentfernung bezogenen unmittelbaren Messung und wächst immer langsamer.

Mathematisch kann die Kovarianzfunktion in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\sigma_{ik} = (\sigma_{ii} + \sigma_{kk})/2 - (f_1 - f_2). \quad (26)$$

(Zu bemerken ist, daß der gedankliche Versuch durch die Formel (26) nur im Falle  $k = \infty$  genau modelliert wird.)

Die Funktion  $f_1$  spiegelt die von MEISSL geklärte Gesetzmäßigkeit (zitiert in [9]), wonach sich im allgemeinen die relative Genauigkeit mit zunehmender relativer Entfernung logarithmisch vermindert. Diese Gesetzmäßigkeit wurde durch Untersuchung vorhandener Netze festgestellt, ohne die Eigenschaften

der Netze mit relativ kleiner Seitenzahl zu beachten. Im vorliegenden Falle ist

$$f_1 = a \lg \left( \frac{10^{\frac{\sigma_{ii} + \sigma_{kk}}{2a}} - 1}{c l_d} n l_d + 1 \right) \quad (27)$$

wo  $a$  gleich  $(0,25 \approx 1) \cdot (\sigma_{ii} + \sigma_{kk})/2$  ist. Die Funktion  $f_2$  (12) ist dazu bestimmt — die durch die lokalen Netze gegebenen Möglichkeiten ausnutzend — die höheren Genauigkeitsforderungen der Planung zur Geltung zu bringen. Analytisch kann die Funktion durch Spline zweiter und dritter Ordnung beschrieben, oder mit der Funktion

$$f_2 = a' x^b l'^x - g x^z \quad (28)$$

angenähert werden.

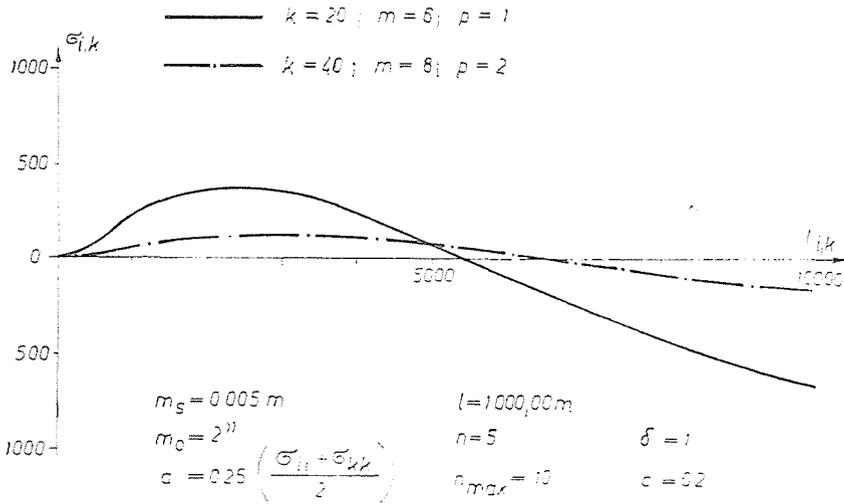


Bild 1. Durch exponentielle Annäherung gebildete Kovarianzfunktionen

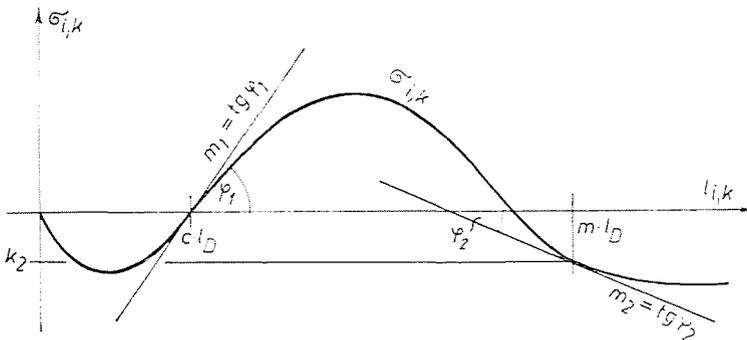


Bild 2. Mit einer Spline-Funktion gebildete Kovarianzfunktion

Zur Berechnung der Koeffizienten im Ausdruck (28) sollen angegeben werden: die durchschnittliche Referenzentfernung  $cl_d$ , der Bereich  $(m - c)l_d$  mit  $f_2 > 0$ , und die maximale Amplitude von  $f_2$ . In Bild 1 sind zwei Kovarianzkurven dargestellt, wo die exponentielle Annäherung nach (28) für den Wert  $f_2$  angewendet wurde. Im Beispiel wurde angenommen, daß  $f_{2\max} = \frac{f_1}{p}$ , wo der Wert  $f_1$  am Ort des Maximums von  $f_2$  gedeutet ist.

Bei Anwendung der Spline-Funktion werden anstelle der maximalen Amplitude die zu den Punkten mit den Abszissen  $cl_d$  und  $ml_d$  gehörenden Funktionswerte und deren Tangenten angegeben.

In unserem Falle besteht die Kovarianzfunktion aus drei Abschnitten (Bild 2).

Der erste Abschnitt im Intervall  $0, cl_d$  kann durch eine Funktion zweiter Ordnung beschrieben werden:

$$f_2 = \alpha_1 l^2 + \beta_1 l, \quad l \in (0, cl_d) \quad (29)$$

wo

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{cl_d}$$

$$\beta_1 = \operatorname{tg} \varphi_1.$$

$\varphi_1$  kann zwischen  $-30^\circ$  und  $-60^\circ$  gewählt werden. (Je größer abs ( $\varphi_1$ ) ist, desto steifer ist das Netz.)

Der zweite Abschnitt kann durch ein Polynom dritter Ordnung beschrieben werden:

$$f_2 = \alpha_2 l^3 + \beta_2 l^2 + \gamma_2 l + \delta_2; \quad l \in (cl_d, ml_d) \quad (30)$$

wo die Koeffizienten die folgenden sind:

$$\alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{(m - c)^2 l_d^2} - \frac{2k_2}{(m - c)^3 l_d^3}$$

$$\beta_2 = \frac{3(m + c)2k_2}{2(m - c)^3 l_d^2} - \frac{(\operatorname{tg} \varphi_2 + 2 \operatorname{tg} \varphi_1)m + (\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2)c}{(m - c)^2 l_d}$$

$$\gamma_2 = \frac{2cm(\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2) + m^2 \operatorname{tg} \varphi_1 + c^2 \operatorname{tg} \varphi_2}{(m - c)^2} - \frac{6k_2 cm}{(m - c)^3 l_d^2}$$

$$\delta_2 = -\alpha_2 c^3 l_d^3 - \beta_2 c^2 l_d^2 - \gamma_2 c l_d$$

und

$$k_2 = \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{kk}}{2} - a \operatorname{lg} \left( \frac{10^{\frac{\sigma_{ii} - \sigma_{kk}}{2a}} - 1}{c} m + 1 \right). \quad (31)$$

Schließlich wird im dritten Abschnitt die Funktion durch einen Wurzelausdruck ersetzt:

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \alpha_3 \sqrt{l - \beta_3} + \gamma_3; & l \in (ml_d; n_{\max} l_d) \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_2} \\
 \beta_3 &= ml_d - \frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 \varphi_2} \\
 \gamma_3 &= k_2 - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^3 \varphi_2}
 \end{aligned} \tag{32}$$

wo  $k_2$  auch weiterhin den Wert nach (31) bedeutet.

Leider sind die Planungsprobleme der Varianz-Kovarianz-Matrix mit der Aufstellung der Varianz-Kovarianz-Funktionen noch nicht gelöst. Bei lokalen Netzen wird nämlich die Ausgleichung nach der Methode der freien Ausgleichung durchgeführt und diese erfordert eine singuläre Varianz-Kovarianz-Matrix. Die mit Hilfe von (11) und (12) gebildete Matrix ist jedoch regulär. Bekanntlich sind im freien Netz sowohl die Koordinatenverbesserungen, wie auch die Matrix  $\Sigma$  Funktionen der vorläufigen Koordinaten.

Die Ausgleichung geht nämlich aus dem Grundsatz aus, daß — neben Erfüllung der Bedingung  $\Sigma pvr = \text{Minimum}$  — die Koordinatenverbesserungen ein auf die eigenen Gewichtslinien bezogenes System bilden sollen, d. h. es solle  $\Sigma \Delta x_i = \Sigma \Delta y_i = 0$  und  $\Sigma (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2) = \text{Minimum}$  sein.

Eine wesentliche Eigenschaft der Ausgleichung ist aber, daß die relativen Fehlerkennwerte von der Annahme der vorläufigen Koordinatenwerte unabhängig sind. Da nun in unserer ganzen Erörterung die Netzplanung aufgrund der relativen Fehlerkennwerte untersucht wurde, liegt die Folgerung auf der Hand, daß die im Interesse einer gebundenen Form der relativen Fehlerkennwerte vorgenommene Planung zweiter Ordnung auch mit der regulären Varianz-Kovarianz-Matrix durchgeführt werden kann, indem deren Format um die auf die gebundenen Netzelemente bezogenen Zeilen und Säulen vermindert wird. Das Problem besteht jedoch auch weiterhin bei der komplexen Planung erster und zweiter Ordnung, wenn diese mit Rücksicht auf die relativen Fehlerkennwerte unternommen werden soll.

#### 4. Komplexe Netzplanung. Anwendung der Methode der Straffunktion (Kuhn—Tucker-Methode)

Der Grundgedanke der Methode ist wie folgt: Das Ziel ist die Annäherung der geplanten Varianz-Kovarianz-Matrix mit womöglich kleinem Meßaufwand. Für diesen Zweck werden nicht nur die Gewichte, sondern unter gewissen Bedingungen auch die Form des Netzes geändert.

Aus der Zielsetzung geht eindeutig hervor, daß die Methoden der linearen Programmierung in diesem Fall nicht anwendbar sind, da die Bedingungen von den die veränderlichen Punktorte charakterisierenden Koordinaten nicht linear abhängen. Zur Herstellung eines wirtschaftlicheren (genaueren) Netzes wird also angestrebt, alle veränderlichen Größen einander zuzuordnen. Natürlich muß dafür auch etwas geopfert werden. Dies äußert sich einerseits in der Verminderung der Vollständigkeit der Kostenfunktion (15), anderseits in der größeren Rechenarbeit. Es ist ja offenbar, daß es im Falle veränderlicher Punktorte unmöglich ist, die Kosten für alle möglichen Richtungsschnitten (Markenbau) als stetige Funktion zu modellieren. Ist aber das Ziel die maximale Genauigkeit zu erreichen, dann unterliegt die Zweckmäßigkeit dieser Methode keinem Zweifel. Es soll daher die Zielfunktion

$$c(x, p) = \sum_{i=1}^m p_i = \max \quad (33)$$

befriedigt werden, wenn die Bedingungen

$$\mathbf{U}\mathbf{p} \leq \mathbf{g}, \mathbf{p} \geq 0 \quad (34)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega \quad (35)$$

erfüllt sind.

Durch die Bedingung (35) wird formell ausgedrückt, daß die Koordinaten dieser Punkte in einem gegebenen Bereich liegen müssen. Die Aufgabe kann mit Hilfe der sogenannten Straffunktionsmethode gelöst werden, deren Wesen wie folgt ist [10].

Um die bedingte Extremwertrechnung bedingungsloser Form durchzuführen, werden die Bedingungen zu Teilen der Zielfunktion gemacht. Falls die Bedingungen nicht erfüllt werden, ergibt sich eine große Abweichung von der Richtung des gesuchten Extremwertes. Der Lösungsvektor kann den Extremwert nur dann annähern, wenn zugleich auch die Bedingungen erfüllt werden.

Wir wollen die Lösungsschritte des Algorithmus kurz angeben.

1. Modifizieren wir den Ausdruck (33) derart, daß die Bedingungen (34) und (35) auf die Form  $A_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 0$  gebracht in die Zielfunktion eingebaut werden:

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{p}; r) = c(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + r \left( \sum_{i=1}^M \frac{1}{A_i(\mathbf{x}, \mathbf{p})} \right) \quad (36)$$

wo  $r > 0$  und  $M$  die Anzahl sämtlicher Bedingungen bedeutet.

2. Nehmen wir einen Wert  $r_1 > 0$  und einen Vektor  $(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{p}_1^0)$  an, für welchen  $A_i(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{p}_i^0) = 0$ , ( $i = 1, \dots, M$ ). Die Lösung wird durch stufenweise

Näherung erhalten, wobei für je einen festgelegten Wert  $r_n$  der optimale Vektor  $(\mathbf{x}_n^k, \mathbf{p}_n^k)$  gesucht wird.

3. Unter Anwendung der Gradientenmethode wird der optimale Vektor  $(\mathbf{x}_n^k, \mathbf{p}_n^k)$  bestimmt.

4. Es wird geprüft, ob

$$\|(\mathbf{x}_n^k, \mathbf{p}_n^k) - (\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{p}_{n-1})\| \leq \varepsilon.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird das Verfahren mit dem Schritt 5 fortgesetzt, ist sie erfüllt, so betrachten wir den Vektor  $(\mathbf{x}_n^k, \mathbf{p}_n^k)$  als die das Optimum am besten annähernde Lösung.

5. Wir wählen einen neuen Wert  $r_{n+1}$ , für welchen  $0 < r_{n+1} < r_n$  gilt, und setzen das Verfahren beim Schritt 3 mit  $(\mathbf{x}_n^k, \mathbf{p}_n^k)$  als Ausgangspunkt fort.

### Zusammenfassung

Es werden die bei der optimalen Planung spezieller ingenieurgeodätischer Netze erreichten theoretischen und praktischen Forschungsergebnisse überblickt.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Planung optimaler Netze und schildert zwei Konzeptionen für die Planung der optimalen Form für »freie Netze«.

Im zweiten Teil wird als neue Möglichkeit die optimale Meßanordnung aufgrund einer Zielfunktion behandelt, welche neben der Genauigkeitsforderung auch die Kosten für die Messungen (oder den Meßzeitaufwand) berücksichtigt und wo die Planung bei deren Minimalwerten durchgeführt wird.

Im dritten Teil werden zur Aufstellung der geplanten Varianz-Kovarianz-Matrix zwei neue, auf der Untersuchung der Genauigkeitskennwerte der ingenieurgeodätischen Netze beruhende Verfahren empfohlen. Im vierten Teil werden theoretische Fragen der komplexen Netzplanung erörtert, und es wird mit der Straffunktions- (Kuhn—Tuckerschen)-Methode ein Algorithmus für die komplexe Planung geodätischer Netze ausgearbeitet.

### Schrifttum

1. Шаркези, Ф.: Некоторые вопросы оптимального проектирования геодезических сетей. Periodica Polytechnica, строительство, Vol. 21. No. 1—2, Budapest 1977.
2. SÁRKÖZY, F.: Optimization of Geodetic Control Networks. Vortrag gehalten am XV. Internationalen Geodätenkongreß der Vermessungsingenieure (FIG). Stockholm 1977.
3. KIS, O.—KOVÁCS, M.: Numerische Methoden. (In ungarischer Sprache). Budapest, 1973.
4. SCHAFFRIN, B.—GRAFAREND, E.—SCHMITT, G.: Kanonisches Design geodätischer Netze I. Manuscripta geodaetica 2 (1977).
5. ВЈЕРНАММАР, А.: A New Approach to Theory of Errors. Stockholm, 1970.
6. Дроздов, Н. Д.: Линейная алгебра в теории уравнивания измерений. «Недра» Москва 1972.
7. BEN-ISRAEL, A.—GREVILLE, T. X. E.: Generalized Inverses, Theory and Applications. Wiley Interscience Publ. 1974.
8. SCHMITT, G.—GRAFAREND, E.—SCHAFFRIN, B.: Kanonisches Design geodätischer Netze II. Manuscripta geodaetica Vol. 3 (1978).
9. BAARDA, W.: Measures for the Accuracy of Geodetic Networks. Vortrag am IAG Symposium 1977. Sopron.
10. WAGNER HARVEY, M.: Principles of Operations Research. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

Dozent Dr. Ferenc SÁRKÖZY, Direktor, H-1521 Budapest