BERECHNUNG RECHTWINKLIGER ABSTECKUNGSNETZE

I. Bánhegyi

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, Geodätisches Institut, TU Budapest

Eingegangen am 2. Januar 1979

Vorgelegt von Prof. Dr. P. Biró

Einleitung

Als Absteckungsnetz für Industrieanlagen wird meistens ein rechtwinkliges Vierecknetz angelegt. Die Koordinatenachsen eines solchen Netzes sind zu den Hauptrichtungen des Bauwerkes parallel, daher ist sowohl die Berechnung der Einfluchtungsmaße als auch die Absteckung selbst viel einfacher als bei einem Netz allgemeiner Form.

Rechtwinklige Absteckungsnetze werden in folgenden Schritten abgesteckt:

1. Vorläufige Absteckung der Netzpunkte und die für die Koordinatenrechnung erforderlichen Messungen.
2. Berechnung der Koordinaten der vorläufig abgesteckten Punkte.
3. Endgültige Absteckung und Vermarkung der Netzpunkte.
4. Überprüfung des Netzes.

Mit dem Erscheinen der physikalischen Entfernungsmesser änderte sich die Zusammensetzung der für die Koordinatenberechnung erforderlichen Messungen. Die gemischten (Richtungs- und Streckenmeß-) Netze traten in den Vordergrund.

Die Koordinaten der vorläufig abgesteckten Punkte werden seit der Verbreitung der Rechenanlagen durch Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate — u. zw. zweckmäßig durch Koordinatenausgleichung — berechnet. Im Beitrag werden die verschiedenen Methoden der Ausgleichung behandelt.

Koordinatenberechnung durch Netzausgleichung

Bei der Koordinatenausgleichung werden im ersten Schritt der vorläufige Orientierungswinkel des Richtungsmeß-Aufstellungspunktes und die vorläufigen Koordinaten der Punkte berechnet.

Die vorläufigen Werte sind stets so anzusetzen, daß an deren Stellen bei der notwendigen Reihenentwicklung die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können.

Für die Ausgleichung von rechtwinkligen Absteckungsnetzen empfiehlt es sich selbstverständlich als vorläufige Koordinaten theoretische — im allgemeinen runde — Koordinaten zu wählen.

Als vorläufiger Wert für die Orientierungswinkel wird der aus der vorläufigen Orientierung der Aufstellungspunkte erhaltene mittlere Orientierungswinkel gewählt.

Im zweiten Schritt werden für jedes Richtungs- und Orientierungsergebnis in der bekannten Weise die Vermittlungsgleichungen, dann nach Reihenentwicklung und Umordnung die Verbesserungsgleichungen angeschrieben, u. zw. in allgemeiner Form:

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \; \underset{r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

Dabei bedeuten:

$\mathbf{v}$ den Vektor der zu n Messungen gehörenden Korrektionen;
$\mathbf{A}$ die aus den Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen hergestellte Matrix;
$\mathbf{x}$ den Vektor der r Unbekannten;
$\mathbf{l}$ den Vektor der zu n Meßergebnissen gehörenden reinen Glieder.

Da im Netz auch Richtungsmessungen und Entfernungsmessungen durchgeführt werden, ist es sehr wichtig, aus den vorläufigen mittleren Fehlern der Meßergebnisse das Gewichtsverhältnis der beiden verschiedenen Meßtypen festzustellen. Für den Ansatz des Gewichtsverhältnisses dient in der Annahme unabhängiger Messungen die Proportion:

$$p_i : p_t = \frac{c^2}{\mu_i^2} : \frac{c^2}{\mu_t^2}$$

wo p_i und p_t die Gewichte der Richtungs- und Streckenmessungen:

μ_i und μ_t die vorläufigen mittleren Fehler der Richtungs- und Streckenmessungen sind, und
c^2 eine beliebig angesetzte Konstante ist.

Die Diagonalmatrix $\mathbf{P}$ umfaßt die Gewichtswerte. Im nächsten Schritt wird das Normalgleichungssystem aufgestellt:

$$\underset{(r,r)}{(\mathbf{A}^* \, \mathbf{P} \, \mathbf{A})} \; \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{A}^* \, \mathbf{P} \, \mathbf{l}} = \underset{(r,1)}{0} \, .$$

Die Zusammenhänge

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{N}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{A}^* \, \mathbf{P} \, \mathbf{A}}$$

und

$$\underset{r,1)}{n} = \underset{(r,1)}{\mathbf{A}^* \, \mathbf{P} \, \mathbf{l}}$$

eingeführt, nimmt das Normalgleichungssystem folgende Form an:

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{N}} \quad \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{n}} = \underset{(r,1)}{\mathit{0}} \,.$$

Da kein bekannter Punkt im Netz ist, stellt die Matrix $\mathbf{N}$ im Prinzip eine singuläre Matrix dar, also:

$$\det(\mathbf{N}) = 0 \,.$$

Ein solches Netz ist beliebig verschiebbar und verdrehbar.

Der Singularitätsgrad wird durch den Defekt gespiegelt, der die Differenz zwischen Format und Rang der Matrix ist:

$$d(\mathbf{N}) = r(\mathbf{N}) - \varrho(\mathbf{N}) \,.$$

In der Formel sind

d ($\mathbf{N}$) der Defekt der Matrix
r ($\mathbf{N}$) das Format der Matrix
ϱ ($\mathbf{N}$) der Rand der Matrix.

Der Defekt hängt von dem Charakter des Netzes ab und stimmt mit dessen Freiheitsgrad überein. Der Defekt gemischter Netze ist 3.

Für die Berechnung der Unbekannten kann man in zweifacher Weise verfahren. Die Berechnung kann mit festgelegtem Anfangspunkt oder als freies Netz erfolgen.

Bei der Berechnung mit festgelegtem Anfangspunkt werden Unbekannte in dem Defekt entsprechender Anzahl gebunden, und dementsprechend werden die Verbesserungs- und Normalgleichungen aufgestellt. Die Unbekannten werden mit der Formel

$$\underset{(r-d,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r-d,r-d)}{-\mathbf{N}^{-1}} \quad \underset{(r-d,1)}{\mathbf{n}}$$

berechnet.

Für die Bestimmung der Zuverlässigkeits-Meßzahlen ist die Gewichtskoeffizientenmatrix der Unbekannten notwendig. Bei einer Berechnung mit festgelegtem Anfangspunkt ergibt sich diese aus der Formel:

$$\underset{(r-d,r-d)}{\mathbf{Q}(x)} = \underset{(r-d,r-d)}{\mathbf{N}^{-1}} \,.$$

Es ist bekannt, daß die Ausgleichung für die Unbekannten bzw. die Gewichtskoeffizienten verschiedene Zahlenwerte ergibt, wenn der Anfangspunkt an verschiedenen Orten angesetzt wird.

Die Unbekannten können auch aus einer Berechnung als freies Netz ermittelt werden; dann wird kein Anfangspunkt gewählt, sondern die Aufgabe wird mit Hilfe einer sog. Zielfunktion gelöst. Die Ausgleichung als freies Netz kann nach den Methoden von MEISSL—MITTERMAYER, von HELMERT—WOLF und unter Anwendung des Pseudoinversen unternommen werden.

In der Methode von MEISSL—MITTERMAYER ist jene die Zielfunktion, welche das Minimum der Quadratsumme der mittleren Koordinatenfehler ergibt. Für die Berechnung der Unbekannten wird die Matrix $\mathbf{N}\ \mathbf{N}$ dargestellt, aus der die Zeilen in den Defekten entsprechender Anzahl und die dazugehörigen Spalten gestrichen werden, und die Restmatrix invertiert wird; dann werden anstelle der weggelassenen Elemente Nullen geschrieben. So erhält man wieder die Matrix mit dem ursprünglichen Format. Die Unbekannten werden mit Hilfe der Formel

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = -\underset{(r,r)}{\mathbf{N}}\ \underset{(r,r)}{(\mathbf{N}\,\mathbf{N})^{-1}}\ \underset{(r,1)}{\mathbf{n}}$$

berechnet.

Zur Bestimmung der Gewichtskoeffizientenmatrix der Unbekannten dient die Gleichung:

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}(x)} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}}\ \underset{(r,r)}{(\mathbf{N}\mathbf{N})^{-1}}\ \underset{(r,r)}{\mathbf{N}}\ \underset{(r,r)}{(\mathbf{N}\mathbf{N})^{-1}}\ \underset{(r,r)}{\mathbf{N}}\ .$$

Nach der Methode von HELMERT—WOLF ist die Zielfunktion

$$\underset{(1,r)}{\mathbf{x}^*}\ \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \min$$

d. h. die Quadratsumme der Änderungen ist minimal.

Nach dieser Methode werden die Unbekannten in zwei Teile unterteilt.

Von den r unbekannten Änderungen sind Änderungen der Anzahl d unbestimmt, daher erhält man nur für $r-d$ Änderungen eine eindeutige Lösung. Die ersteren werden in dem Vektor $\mathbf{x}_2$, die letzteren in dem Vektor $\mathbf{x}_1$ zusammengefaßt.

Dementsprechend erhält die Verbesserungsgleichung die Form:

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,\,r-d)}{\mathbf{A}_1}\ \underset{(r-d,\,1)}{\mathbf{x}_1} + \underset{(n,d)}{\mathbf{A}_2}\ \underset{(d,1)}{\mathbf{x}_2} + \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}\ .$$

Führen wir für die Normalgleichungskoeffizienten die Bezeichnungen

$$\underset{(r-d,\,r-d)}{\mathbf{N}_{11}} = \underset{(r-d,\,n)}{\mathbf{A}_1^*}\ \underset{(n,n)}{\mathbf{P}}\ \underset{(n,\,r-d)}{\mathbf{A}_1}$$

und

$$\underset{(r-d,\,d)}{\mathbf{N}_{12}} = \underset{(r-d,\,n)}{\mathbf{A}_1^*}\ \underset{(n,n)}{\mathbf{P}}\ \underset{(n,d)}{\mathbf{A}_2} = \underset{(r-d,\,d)}{\mathbf{N}_{21}^*}$$

ein.

Zur Berechnung der Änderungen dienen die Formeln:

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{N}_{11}(\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{21})^{-1}\mathbf{A}_1^*\mathbf{P}\,\mathbf{l}$$

$$\mathbf{x}_2 = -\mathbf{N}_{21}(\mathbf{N}_{11}\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{21})^{-1}\mathbf{A}_1^*\mathbf{P}\,\mathbf{l}.$$

Bei der Ausgleichung eines freien Netzes nach der HELMERT—WOLFschen Methode ist die folgende Hypermatrix die Gewichtskoeffizientenmatrix der Unbekannten:

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{(x)}} = \begin{bmatrix} \underset{(r-d,\,r-d)}{\mathbf{Q}_{x_1x_1}} & \underset{(r-d,\,d)}{\mathbf{Q}_{x_1x_2}} \\ \underset{(d,\,r-d)}{\mathbf{Q}^*_{x_1x_2}} & \underset{(d,\,d)}{\mathbf{Q}_{x_2x_2}} \end{bmatrix}.$$

Die Werte der einzelnen Matrizen werden mit Hilfe von ziemlich langen Formeln berechnet, deren Mitteilung hier nicht begründet scheint.

Bei der Lösung durch eine Pseudoinverse dient zur Berechnung der Unbekannten die Gleichung:

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,r)}{-\mathbf{N}^+}\ \underset{(r,1)}{\mathbf{n}}.$$

Die Gewichtskoeffizientenmatrix der Unbekannten ist gleich der pseudoinversen Matrix, also:

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{(x)}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^+}.$$

Die pseudoinverse Matrix kann, zum Beispiel, nach dyadischer Zerlegung der Matrix $\mathbf{N}$ der Form $\mathbf{N} = \mathbf{F}\mathbf{G}$ mit Hilfe der Formel

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{N}^+} = \underset{(r,\,r-d)}{\mathbf{G}^*}\ \underset{(r-d,\,r-d)}{(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}}\ \underset{(r-d,\,r-d)}{(\mathbf{F}^*\mathbf{F})^{-1}}\ \underset{(r-d,\,r)}{\mathbf{F}^*}$$

hergestellt werden.

Die genannten drei Methoden zur Ausgleichung als freies Netz liefern praktisch ganz gleiche Ergebnisse für die Unbekannten und ihre Gewichtskoeffizienten.

Ergebnisse bei der Ausgleichung eines Versuchsnetzes

Die Prüfungsrechnung erfolgte an den Meßergebnissen eines aus 16 Punkten bestehenden Teils des rechtwinkligen Netzes für die Absteckung eines Wärmekraftwerkes. Die Messungen für die Berechnung der Koordinaten der vorher abgesteckten Punkte sind in Abb. 1 zu sehen.

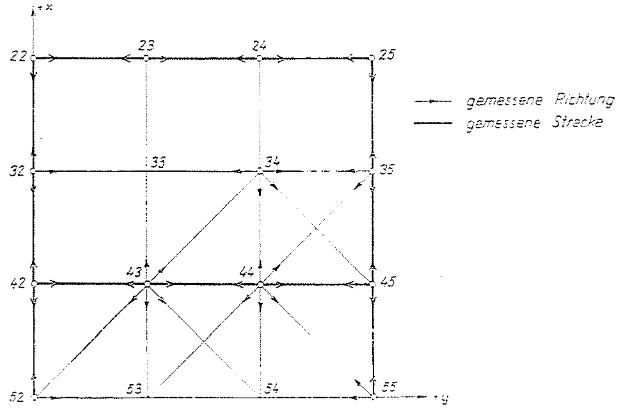

Abb. 1. Bestimmungsplan

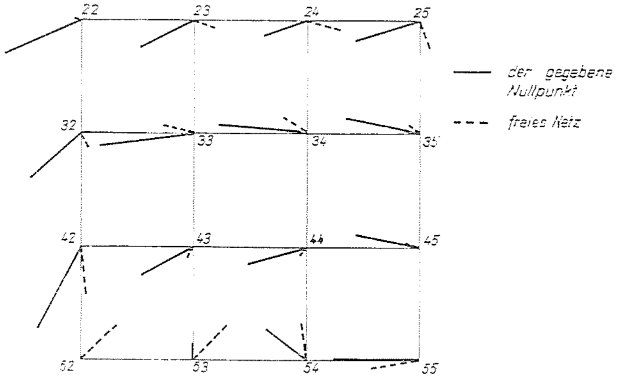

Abb. 2. Koordinatenänderungen

Die Ausgleichung wurde bei Festlegung an mehreren verschiedenen Orten gewählter Anfangspunkte durchgeführt, von denen hier die Ergebnisse nur einer einzigen Variante mitgeteilt werden.

In diesem Falle waren die festgelegten Koordinaten: y_{52}, x_{52} und x_{55}.

Das Netz wurde sowohl als freies Netz als auch nach dem MEISSL—MITTERMAYERschen Algorithmus berechnet. Abb. 2 zeigt die nach den beiden Verfahren erhaltenen Koordinatenänderungen.

Aus den Gewichtskoeffizienten der Unbekannten und den bekannten Zusammenhängen lassen sich die zum Zeichnen der Fehlerellipsen erforderlichen Angaben errechnen: der maximale und der minimale mittlere Fehler bzw. die zu diesen gehörenden Richtungswinkel. Die nach den beiden genannten Ausgleichungsverfahren erhaltenen Fehlerellipsen sind in Abb. 3 dargestellt.

Aus der Abbildung ist zu erkennen, daß die Fehlerellipsen — einerseits — mit der Entfernung von dem als fehlerfrei angenommenen, festgelegten

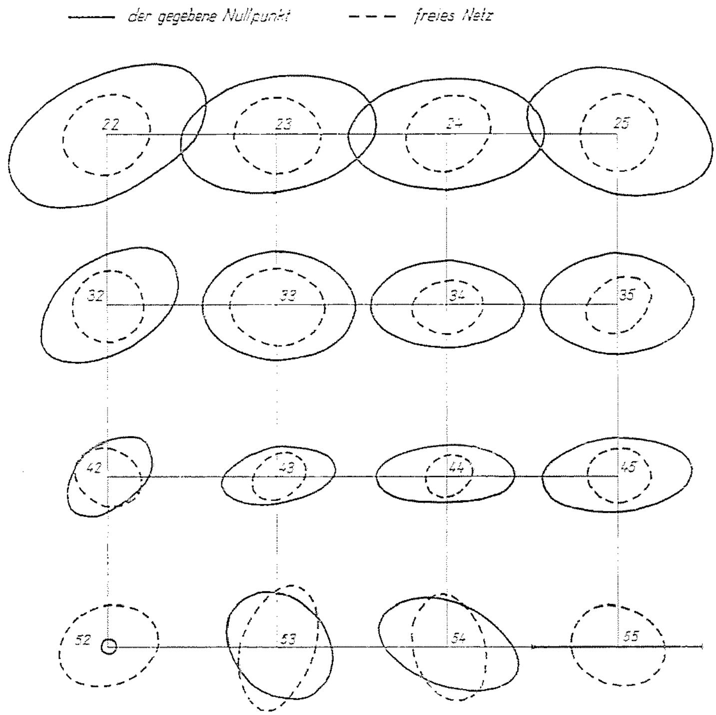

Abb. 3. Fehlerellipsen

Anfangspunkt wachsen, — anderseits — durch ihre Größe die Verteilungsdichte der Messungen im Versuchsnetz spiegeln.

Um die mittleren Koordinatenfehler zu ermitteln, muß die Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{M}(x)$ der Unbekannten bekannt sein. Diese wird aus der Gleichung

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{M}}(x) = \mu_0^2 \underset{(r,r)}{\mathbf{Q}}(x)$$

berechnet, wo

μ_0 der Gewichtseinheitsfehler ist.

Bei einer Ausgleichung mit festgelegtem Anfangspunkt ändert sich die Anzahl der Unbekannten in der Gleichung:

$$\underset{(r-d,\, r-d)}{\mathbf{M}(x)} = \mu_0^2 \underset{(r-d,\, r-d)}{\mathbf{Q}(x)} .$$

Die Größe der mittleren Koordinatenfehler ist von dem Ausgleichungsverfahren abhängig. Daher sind die aus diesen berechneten verschiedenen mittleren Fehler (Punktfehler, quadratischer Punktfehler) für den Zuverlässigkeitsvergleich verschiedener Netze nicht geeignet.

Um den mittleren Fehler der aus den ausgeglichenen Koordinaten berechneten Strecken zu bilden, muß erst die Gewichtskoeffizientenmatrix $\mathbf{Q}_{(T)}$ der Strecken bestimmt werden. Diese erhält man mit Hilfe des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

$$\underset{(s,\,s)}{\mathbf{Q}_{(T)}} = \underset{(s,\,r)}{\mathbf{T}^*} \; \underset{(r,\,r)}{\mathbf{Q}_{(x)}} \; \underset{(r,\,s)}{\mathbf{T}}$$

dabei ist $\mathbf{T}^*$ die Matrix, welche die partielle Ableitung von s Strecken nach den Unbekannten enthält.

Bei einer Ausgleichung mit festgelegtem Anfangspunkt ändert sich die Anzahl der Unbekannten in der Gleichung:

$$\underset{(s,\,s)}{\mathbf{Q}_{(T)}} = \underset{(s,\,r-d)}{\mathbf{T}^*} \; \underset{(r-d,\,r-d)}{\mathbf{Q}_{(x)}} \; \underset{(r-d,\,s)}{\mathbf{T}} \, .$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{M}_{(T)}$ der aus den ausgeglichenen Koordinaten berechneten Strecken erhält man aus der Formel:

$$\underset{(s,\,s)}{\mathbf{M}_{(T)}} = \mu_0^2 \, \underset{(s,\,s)}{\mathbf{Q}_{(T)}} \, .$$

Der mittlere Fehler der Entfernung zwischen aus dem obigen Zusammenhang beliebig ausgewählten zwei Punkten kann rechnerisch ermittelt werden.

Der mittlere Fehler der aus den ausgeglichenen Koordinaten berechneten Strecken ist von dem Ausgleichungsverfahren unabhängig, daher eignet er sich für den Zuverlässigkeitsvergleich verschiedener Netze.

Zusammenfassung

Im Beitrag werden durch Herstellung und Ausgleichung selbständiger Netze — insbesondere eines Netzes besonderer Form, eines rechtwinkligen Netzes — erhaltene Zuverlässigkeitsmeßzahlen untersucht.

Durch die Berechnungen wurde die Feststellung unterstützt, daß die genannten drei Ausgleichungsverfahren als freies Netz für alle Unbekannten und deren Gewichtskoeffizienten praktisch gleiche Ergebnisse liefern.

Eine andere wichtige Feststellung ist, daß bei an verschiedenen Orten angesetzten Anfangspunkten bzw. bei der Ausgleichung als freies Netz für die Unbekannten — unter diesen für die Koordinaten — unterschiedliche Werte erhalten werden, das bedeutet jedoch lediglich eine Verschiebung, Verdrehung des Netzes, ohne daß sich dessen Form änderte. Daher sind die aus den ausgeglichenen Koordinaten berechneten entsprechenden Strecken und inneren Winkel bei allen Untersuchungen gleich.

Die aus den Berechnungen gezogenen Schlußfolgerungen gelten nicht nur für rechtwinklige Netze, sondern auch für solche allgemeiner Form.

Schrifttum

1. HAZAY, I.: Ausgleichungsrechnungen.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
2. MITTERMAYER, E.: Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen. H. 9, 1971.
3. WOLF, H.: Helmerts Lösung zum Problem der freien Netze mit singulärer Normalgleichungsmatrix. Zeitschrift für Vermessungswesen. H. 5, 1972.
4. DETREKŐI, Á.: Ausgleichungsrechnungen.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973. Manuskript.
5. V. HETÉNYI, M.: Über die Ausgleichung selbständiger Netze.* Geodézia és Kartográfia, H. 4, 1973.
6. GRAFAREND, E.—SCHAFFRIN, B.: Unbiased Free Net Adjustment. Survey Review, 1974.
7. V. HETÉNYI, M.: Ausgleichung gemischter Netze als freies Netz.* Geodézia és Kartográfia, H. 6, 1975.
8. BÁNHEGYI, I.: Berechnung rechtwinkliger Absteckungsnetze.* Manuskript. Wissenschaftliches Forum junger Lehrender und Forscher. TU Budapest, 1978.

István BÁNHEGYI, H-1521 Budapest

* In ungarischer Sprache.