EMPLOI DE LA MÉTHODE «OPMIN» DANS LA GÉODÉSIE

Par

O. L'Auné

Université Technique de Budapest
Institut de Geodésie, Chaire de Géodésie

Accepté le 22 novembre 1978

Le principe de la méthode OPMIN est de faire les calculs avec une précision fixée, en exécutant le nombre minimum d'opérations. C'est à cela que la dénomination fait aussi allusion. *Op* est l'abréviation du mot «opération», *min* celui du mot minimum. L'idée première et la dénomination viennent de *Radin-Zablov*. Elle est en rapport étroit avec la méthode «minimax» de A. Wald [1], mais là ce sont les frais dus à l'erreur maximale possible qui sont minimes, ici pour une petite erreur moyenne l'économie est maximale.

Mais pour réaliser cet objectif, les conditions suivantes doivent être remplies:

1. La méthode exacte n'est pas absolument exacte.
2. La nouvelle méthode «approchée» n'est pas trop approchée.

Par l'exactitude sous 1 on entend une exactitude de principe, non pas l'exactitude de calcul.

Dans l'article ci-dessous nous avons appliqué cette méthode à 4 problèmes de la géodésie.

1. Calculs géodésiques.
2. Mesures de déformation.
3. Théorie des erreurs.
4. Calcul de compensation.

Pour les études sous 3 et 4 nous avons utilisé le fait que — de son côté — la méthode des moindres carrés, employée dans les calculs classiques, n'est non plus exacte. Regardons les avis à ce sujet des statisticiens modernes.

Vincze [2] souligne «. . . que la méthode des moindres carrés n'est qu'un expédient technique — tant soit très utile — du calcul des probabilités et de la statistique mathématique.»

Selon Rényi [3]: «Pour la définition de la notion de la dispersion je souligne que cette définition contient un certain arbitraire apparent qui ne se laisse pas justifier par des considérations théoriques (pallier tout au plus) et que ce n'est que la pratique qui justifie finalement que cette notion est adéquate. C'est le même problème qui se pose pour la compensation des erreurs par la méthode nommée des moindres carrés.»

L'attitude prise par BOGÁRDI [4] est encore plus énergique: «Il faut remarquer qu'on a choisi comme mesure de la compensation la somme carrée des déviations par des préoccupations utilitaires. Par le passé on appuyait normalement le principe des moindres carrés par des considérations théoriques, p.e. par l'hypothèse de la loi de la répartition normale des erreurs d'observation. Mais il y a doute si ces considérations théoriques sont réellement valables dans la statistique pratique? C'est pourquoi les statisticiens recommandent aujourd'hui de se servir de la méthode des moindres carrés parce qu'elle est simple et pratique plutôt qu'à cause de son caractère théoriquement justifié.»

Enfin H. POINCARÉ [5], expert éminent de la question, se prononce de manière analogue sur la loi normale lorsqu'il prétend que les mathématiciens acceptent la loi normale parce qu'ils croient que c'est une réalité physique, et les physiciens l'emploient parce qu'ils croient que c'est une loi mathématique.

On voit de ces quatre citations que les bases de principe des calculs classiques ne sont non plus absolument fermes, si l'on peut donc arriver à un résultat à des conditions moins strictes — mais par une voie plus courte — il y a intérêt à la choisir. Pour voir combien ces nouvelles conditions sont moins strictes, il faut examiner à quel point la méthode Opmin est approchée? Pour le comprendre, on doit connaître quelques notions de la théorie d'estimation. La bonne estimation d'un paramètre a les propriétés suivantes:

1. Elle est sans distorsion, elle ne comporte donc point d'erreurs systématiques.

2. Elle est consistante, c.-à-d. l'erreur de l'estimation diminue avec le nombre des répétitions.

3. Une estimation est efficace, si elle est meilleure qu'une estimation du même paramètre comportant une erreur plus grande.

4. Une estimation est suffisante si elle contient toutes les informations sur un paramètre [6, 1].

La méthode des moindres carrés est une méthode d'estimation qui a toutes les quatre propriétés. Mais il faut le payer cher. Si l'on réduit les quatre conditions ci-dessus et n'exige que la première et la dernière, on économisera beaucoup de travail.

On peut contrôler si l'estimation est suffisante, en préscrivant l'erreur moyenne du procédé et en ne permettant pas de la dépasser, tout en s'appliquant à obtenir le résultat au prix du travail minimum. Malheureusement, il n'y a pas de méthode unitaire pour atteindre ce but; c'est toujours le problème qui dicte la possibilité.

L'avis de H. POINCARÉ sur la méthode des moindres carrés et sur l'ensemble des mathématiques est par excellence valable pour cette méthode: «Il n'est pas vrai ou faux, il est commode» [7].

Le principe de cette méthode peut s'écrire comme suit:

$$[p\ v\ v] + k\hat{O} = F$$

où $[pvv]$ est la somme carrée, $\hat{O}$ le nombre des opérations, et l'on cherche l'inconnue k pour laquelle $\hat{O} = \min \frac{dF}{d\hat{O}} = 0$, de là on peut déterminer $\hat{O}$. C'est une valeur extrême fixe, où k est le multiplicateur de Lagrange (proportionnel à la quantité correlative de Gauss).

1. Calculs géodésiques

(Détermination d'une surface dessinée par calcul)

Dans la pratique de l'ingénieur il faut souvent déterminer la surface d'un segment de cercle en fonction de la longueur de corde et de la flèche. La formule exacte de la surface est:

$$T = \frac{r^2}{3}(\varphi - \sin\varphi)\,; \quad r = \frac{s^2 + 4m^2}{8\,m}\,; \quad \varphi = 2 \arcsin \frac{s}{2r}$$

où r est le rayon appartenant au segment de cercle,
s est la longueur de la corde et
m la flèche. On calcule T à l'aide d'un tableau.

$T = f(s, m)$ est une fonction tabulaire résultant du recoupement des trois formules. On peut travailler aussi par approchement à l'aide de la formule (du segment de parabole du second degré) $T = \frac{2}{3} s \cdot m$, mais, généralement, celle-ci n'est pas assez précise. L'erreur est de 15% environ, ce qui ne peut pas être accepté car l'erreur moyenne du planimétrage est de beaucoup petite. On cherche une méthode à la précision de loin supérieure (de 0,5 à 1%) et demandant un minimum de travail, puisque c'est l'essence de la méthode *Opmin*. On procède de la manière suivante [8]. On approche le segment de cercle aux paramètres s et m par un arc de parabole et de l'approchement on détermine le degré de la parabole. On obtient

$$n = \frac{2}{1 - \left(\frac{2m}{s}\right)^2}\,.$$

On sait que la formule de la surface du segment de la parabole de n^e degré est

$$T = \frac{n}{n+1} sm\,.$$

En substituant la valeur de n dans la formule de T, on a

$$T = \frac{2}{3 - 2\left(\frac{m}{s}\right)^2} sm .$$

Cette formule offre les avantages suivantes:

1. Elle ressemble de manière extraordinaire à celle du segment de parabole du second degré, elle est donc facile à retenir.
2. Elle est d'une haute précision (0,5 à 1%).
3. Elle se laisse calculer en faisant environ un tiers des opérations nécessaires pour la formule exacte, on économise donc 70% des opérations.

2. Calcul des déformations

On peut déterminer le déplacement d'un point par deux visées successives (non simultanées), en déterminant les coordonnées du point en question [9].

$$y_P = y_B + \frac{-(y_B - y_A)\operatorname{cotg}\beta + (x_B - x_A)}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} ;$$

$$x_P = x_B + \frac{-(x_B - x_A)\operatorname{cotg}\beta - (y_B - y_A)}{\operatorname{cotg}x + \operatorname{cotg}\beta} .$$

Désignons pour la simplicité y_P:

$$y_p = f_y(\alpha, \beta) .$$

Soit l'y du point se déplaçant

$$y'_p = f_y(\alpha', \beta')$$

avec $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$ et $\beta' = \beta + \Delta\beta$ ($\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sont des rotations angulaires). Le déplacement est

$$\Delta y = f_y(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - f_y(\alpha, \beta) .$$

Puisque la rotation angulaire est petite, on peut écrire la série de Taylor de Δy:

$$\Delta y = \frac{\partial f_y}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f_y}{\partial\beta}\Delta\beta .$$

On peut déduire de la même façon

$$\Delta x = \frac{\partial f_x}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f_x}{\partial\beta}\Delta\beta .$$

On est donc arrivé à calculer le déplacement en forme linéaire au lieu d'intersections compliquées. Si l'on veut simplifier le calcul encore d'avantage, on peut employer le nomogramme de d'Ocagne. Celui-ci est facile à construire: Il se compose de 3 droites parallèles à la longueur égale et à la graduation linéaire. En joignant les rotations angulaires $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ sur deux de ces droites à l'aide d'une règle, on obtient sur la droite Δy la grandeur de la déformation. Cette méthode est de la même précision que la méthode classique, mais elle ne comporte que le dixième d'opérations. On économise donc 90% des opérations.

3. L'évaluation de l'erreur moyenne et de l'intervalle de confiance

(Théorie des erreurs)

L'erreur moyenne de la valeur la plus probable est $\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$. Si l'on écrit les valeurs $x - \mu_x$ et $x + \mu_x$, celles-ci définissent sur la droite numérique réelle un intervalle, nommé intervalle de confiance [10]. Cet intervalle couvre avec une certaine probabilité la valeur exempte d'erreurs qu'on ne pourrait jamais déterminer par des mesures. En représentant par a la valeur exempte d'erreurs, on peut écrire la probabilité P de la couverture:

$$P = P(x - t\mu_x < a < x + t\mu_x)\ .$$

Ayant exécuté un grand nombre de mesures, on peut poser un rapport entre la probabilité de couverture et le multiplicateur $t = \frac{v}{\mu}$:

$$P = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \left(\frac{v^2}{2\mu^2}\right) dv\ .$$

Après avoir exécuté l'intégration, on aura

$$P = 68{,}3\%, \quad \text{si } t = 1\ .$$

Si le nombre des mesures n est restreint — et dans les sciences s'occupant de mesures c'est toujours le cas, en général $n = \leqq 20$ — la fonction P prendra une autre forme et P et t varieront aussi en fonction de n:

$$P = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\,\pi\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt$$

Γ étant la fonction dite gamma, l'extension de la fonction factorielle sur les facteurs non entiers. Selon la théorie classique la distribution de t suit la loi normale, en cas d'un nombre restreint de mesures ($n \leq 20$) celle de Student. Si le nombre des mesures s'augmente au delà de toutes limites, la distribution de Student devient normale.

La méthode *Opmin* permet une bonne évaluation de l'erreur moyenne ou de l'intervalle de confiance. Le rapport entre la correction v et la probabilité de correction $P(v)$ est connu [11]:

$$P(v) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_{-v_{\max}}^{+v_{\max}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\mu^2}\right) dv\,.$$

La probabilité du fait que dans une série une erreur supérieure à v se produise est $1 - P(v)$; la probabilité du fait que dans une série de n membres au moins une erreur soit supérieure à $v_{\max}$, est

$$n[1 - P(v)] \geqq 1\,.$$

De là on peut calculer n:

$$n \geqq \frac{1}{1 - P(v)}$$

ou de manière détaillée

$$n \geqq \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-v_{\max}}^{+v_{\max}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\mu^2}\right) dv}\,.$$

En simplifiant:

$$n \geqq F\left(\frac{v}{\mu}\right)$$

et de là on obtient l'inverse:

$$\frac{v}{\mu} \leqq f(n)$$

d'où

$$\mu \geqq \frac{v}{f(n)}\,,$$

$f(n)$ se calcule à l'aide d'un tableau, intégré selon différentes valeurs entières de n. (La substitution se fait à la place $v = v_{\max}$.)

Cette formule est une formule d'erreur moyenne approchée qui est d'autant meilleure que n est plus petit.

$$\mu \geqq \frac{v_{\max}}{f(n)}\,.$$

Puisque 2. $v_{max} = \Delta$ dont on désigne l'étendue des résultats de mesure (la différence entre la plus grande et la plus petite mesure):

$$\mu \geqq \frac{\Delta}{2f(n)} .$$

En approximant la fonction $\frac{1}{2f(n)}$ qui n'est pas algébraïque, mais tabulaire, on obtient

$$\mu \geqq \frac{\Delta}{\sqrt[3]{4(n-1)}} .$$

Elle peut être affinée par simulation, en comparant l'erreur moyenne exacte, calculée des mesures simulées, avec l'erreur moyenne estimée ci-dessus. En multipliant μ par la moyenne du quotient des deux, le signe d'inégalité disparaît. Le quotient des deux, l'erreur moyenne exempte d'erreur, divisée par l'erreur moyenne approchée, donne 1.1, de manière que l'erreur moyenne corrigée est

$$\mu = \frac{\Delta}{\sqrt[3]{4(n-1)}} 1{,}1 = \frac{\Delta}{\sqrt[3]{3(n-1)}} .$$

Cette formule donne un résultat acceptable dans l'intervalle $2 \leqq n \leqq 20$. Son erreur ne surpasse pas l'erreur moyenne σ de l'erreur moyenne:

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} .$$

On peut approximer également la fonction tabulaire des valeurs de t, figurant dans le tableau de Student, par une équation qui «s'ajuste» à la formule ci-dessus, cela veut dire que les opérations ne s'accumulent pas. On obtient de cette façon pour $P = 68{,}3\%$ la valeur de t

$$t = \sqrt[3]{\frac{n-1}{n-2}}$$

d'où

$$t\mu = \frac{\Delta}{\sqrt[3]{3(n-2)}} \qquad t\mu = \frac{9}{7}\Delta$$

$$\text{si} \quad 3 \leqq n \leqq 20 \qquad\qquad \text{si} \quad n = 2 .$$

Le grand avantage de ces formules réside dans leur simplicité et dans le fait que — quoiqu'elles soient approchées — elles sont pourtant plus exactes que la formule de dispersion classique, puisqu'elles tiennent compte de la distribution de Student. Elles ont l'intérêt qu'elles furent réalisées sur la base de considérations de la théorie opérationnelle, c.-à-d. qu'elles représentent — à côté d'un «quasi-minimum» d'erreurs — un minimum d'opérations.

Pour l'erreur moyenne ou l'intervalle de confiance, l'erreur moyenne est inférieure à 5%, et l'on a une économie d'opérations de 96%.

4. Calcul de compensation

En se basant sur une analogie hypergéométrique, on peut construire un autre calcul de compensation qui donne approximativement le même résultat que la méthode des moindres carrés, mais par une voie beaucoup plus courte [14]. La compensation basée sur la dualité se sert du fait que dans le plan le point et la droite sont les binaires l'un de l'autre. Cela permet d'interchanger le point et la droite. Dans le pratique on divise les coefficients des équations linéaires intermédiaires selon le coefficient à la dispersion maximale en deux groupes et on prend la moyenne de chaque groupe de coefficients. On classe les valeurs voisines par ordre de grandeur dans un groupe. En général, celui ne sera pas identique pour les deux coefficients, et c'est la série à plus grande dispersion qui décide du voisinage. Enfin on obtient deux équations moyennes, et la résolution de ce système d'équations assure le résultat définitif, présentant l'erreur moyenne «quasi-minimale».

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n x + b_n y + c_n &= 0\,. \end{aligned}$$

Les équations moyennes sont

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\mathrm{I}}\, x + \bar{b}_{\mathrm{I}}\, y + \bar{c}_{\mathrm{I}} &= 0 \\ \bar{a}_{\mathrm{II}} x + \bar{b}_{\mathrm{II}} y + \bar{c}_{\mathrm{II}} &= 0\,. \end{aligned}$$

Si le nombre des inconnues est égal à m, ont prend la moyenne de m groupes, p.e. de la manière suivante:

$$\bar{a}_{\mathrm{I}} = \frac{[a]_{\mathrm{I}}}{\frac{n}{m}}\,.$$

On voit qu'au lieu des coefficients du type $[aa]$ ce sont les coefficients plus simples du type $[a]$ qui figurent dans la méthode *Opmin*.

Ici la dualité signifie qu'au lieu du centre de masse de l'intersection de droites passant par beaucoup de points on détermine l'équation d'une droite approchant beaucoup de points. En d'autres termes: Au lieu des coordonnées de points on emploie des coordonnées de lignes. Si m est supérieur à 3, on ne parle plus de droites et de points, mais d'hyperplans, malgré cela la méthode reste complètement identique. L'erreur moyenne est de 5 à 10% et l'économie de 70% parce que le nombre des opérations n'est qu'un tiers de celui de la méthode classique.

Exactitude et économie de la méthode Opmin

Emplois de la méthode *Opmin*	Erreur moyenne %	Nombre d'opérations économisées %
Calcul géodésique	1	70
Calcul de déformations	0	90
Théorie des erreurs	5	96
Calcul de compensation	5—10	70

Résumé

L'article présente un procédé dont l'objectif est de chercher pour un problème donné et en cas d'une exactitude donnée le calcul exigeant le minimum de travail. Ici on ne recherche pas l'erreur moyenne minimum mais le « minimum d'opérations » pour une erreur moyenne suffisamment petite.

L'article décrit quatre domaines d'application dans la géodésie: calculs géodésiques, calculs de déformation, théorie des erreurs et calculs de compensation. Tous les quatre domaines d'application exigent une grande dépense de calculs si l'on fait les calculs selon les méthodes classiques. En ayant recours à la méthode décrite, ont fait une économie d'opérations allant de 70 à 96% en fonction de l'application; l'erreur moyenne admissible est de 1% ou de 10%, respectivement.

Littérature

1. ÉLTETŐ—ZIERMANN: Statistique mathématique.* Tankönyvkiadó, 1964.
2. VINCZE, L.: Statistique mathématique.* Műszaki Könyvkiadó, 1968.
3. RÉNYI, A.: Calcul de probabilité.* Tankönyvkiadó, 1954.
4. BOGÁRDI, J.: Le calcul de correlation et son emploi dans l'hydrologie.* Akadémiai Kiadó, 1952.
5. FREUDENTHAL, A. M.: Le travail de recherche technique et ses objectifs.* MTA Közleményei, Vol. 31 (1962) N° 1—4.
6. GNEDENKO, B. V.—BELIAEV, I. K.—SOLOVEV, S. D.: Les méthodes mathématiques de la théorie de la sécurité.* Műszaki Könyvkiadó, 1970.
7. FASCHING, A.: La nouvelle géodésie.* Athenaeum Kiadó, 1925.
8. L'AUNÉ, O.: Une nouvelle méthode de calcul approchée du segment de cercle.* Mélyépítéstudományi Szemle, N° 2. 1951.

* En langue hongroise

9. L'AUNÉ. O.: Ein neues Berechnungsverfahren für die Prüfung von Horizontalbewegungen. Periodica Polytechnica. C.E. Vol. 19. (1975) No. 1—2.
10. L'AUNÉ. O.: Estimation de la sécurité en cas d'un nombre restreint d'observations.* Geodézia és Kartográfia. N° 2 et 3. 1958.
11. L'AUNÉ. O.: A formula for estimating the mean error based on measurement simulation. Periodica Polytechnica. C.E. Vol. 14 (1970) N° 1.
12. METROPOLIS. N.—ULAM. S.: The Monte Carlo Method. J. Amer. Statist. Assoc. 44. 1949.
13. L'AUNÉ. O.: Les méthodes Monte-Carlo dans la géodésie.* Geodézia és Kartográfia. 1965. N° 6.
14. L'AUNÉ. O.: La compensation basée sur la dualité géométrique.* ÉKME Tudományos Közlemények. 1965. Vol. XI. N° 5.

Ottó L'AUNÉ, Chargé de cours, H-1521 Budapest

* En langue hongroise