

EINE DIFFERENTIALGLEICHUNG DES LINEAREN BETONKRIECHENS

Von

J. SZALAI

Lehrstuhl für Stahlbetonkonstruktionen, TU Budapest

(Eingegangen am 16. September 1977)

1. Zielsetzung des Aufsatzes

Durch die theoretischen und experimentellen Untersuchungen [16], [18] der letzten Jahre wurde auf die Widersprüche der verschiedenen Kriechtheorien und der auf diesen beruhenden Rechenverfahren hingewiesen. Diesem Umstand ist zuzuschreiben, daß in der Berechnung der Wirkung des Kriechens heute Unsicherheit herrscht, obwohl die theoretischen Fragen seitdem bereits geklärt sind. Es steht kein Rechenverfahren zur Verfügung, das sich praktisch leicht handhaben ließe und beruhigende Ergebnisse liefern könnte.

Verfasser setzte sich zum Ziele, unter Berücksichtigung der neuesten Forschungsergebnisse

1) eine von Vernachlässigungen freie Differentialgleichung des Betonkriechens aufzuschreiben und

2) in deren Kenntnis eine für die praktische Anwendung geeignete Näherungsgleichung abzuleiten.

2. Annahmen, Bezeichnungen

Das Kriechen des Betons wird als bekannt vorausgesetzt.

Es wird angenommen, daß die durch Dauerlast herbeigeführte kriecherzeugende Spannung 50 bis 60% der Bruchfestigkeit nicht übersteigt, daher wird die übliche Annahme der linearen Kriechtheorien angewandt.

Das E -Modul des Betons wird als konstant betrachtet, und die Zeit wird von der Betonherstellung an in Jahren gezählt.

Es werden die in der Literatur am meisten eingebürgerten Bezeichnungen benutzt:

t_0 Alter zur Zeit der Anfangsbelastung;

τ Zeitpunkt der Lastwechsel;

t Beobachtungszeitpunkt;

$\sigma_{b0}, \sigma_b(t) = \sigma_b$ Betonspannung in den Zeitpunkten t_0 und t ;

E_{b0} Elastizitätsmodul des Betons, ein der 28tägigen Würfelfestigkeit entsprechender Wert;

$\varepsilon_0, \varepsilon(t) = \varepsilon$	spezifische Längenänderungen;
$\varphi = \varphi(t-t_0)$	die zu der Anfangsspannung σ_{b0} gehörende Kriechfunktion;
φ_V, φ_N	Kriechzahlen;
φ_∞	Endkriechzahl;
$\varepsilon_s(t-t_0)$	Schwindfunktion;
ε_{s0}	Grundmaß des Schwindens;
$\varepsilon_{s\infty}$	Endschwindmaß.

3. Vorgeschichte

Von den Widersprüchen der verschiedenen Kriechtheorien wird am einfachsten ein Bild erhalten, wenn man kurz überschaut, wie in den einzelnen Theorien die beiden Grenzfälle des Kriechens berücksichtigt wurden, u. zw.

1) das eigentliche Kriechen bei unbehinderten Formänderungen des Betonkörpers und

2) die Relaxation im Falle, wenn die Formänderungen des Betonkörpers unter Dauerlast vollkommen gehindert sind.

Im ersteren Falle wird der Betonkörper in einem Zeitpunkt t_0 mit der aus einer äußeren Last herrührenden Spannung σ_{b0} beansprucht, und in einem späteren Zeitpunkt vollständig entlastet. Es werden unter Last und nach der Entlastung lediglich die Formänderungen $\varepsilon_{\dot{\varphi}}$ aus dem Kriechen beobachtet.

Im zweiten Falle wird die Spannungsrelaxation, die Änderung der Anfangsspannung untersucht.

Die *Boltzmannsche* Theorie der elastischen Nachwirkung berücksichtigt die Kriechverformungen nach Abb. 1a, während sich die Spannungsrelaxation nach Kurve 1 in Abb. 2 entwickelt.

Nach dieser Theorie wird die Alterung des Betons vernachlässigt, außerdem werden die Kriechverformungen nach Entlastung als völlig umkehrbar vorausgesetzt. Die Annahmen dieser Theorie sind nur für in sehr hohem Alter belastete Betone gültig.

In der Annahme der *Dischingerschen* Alterungstheorie verlaufen die Formänderungen nach Abb. 1a und die Spannungsrelaxation gemäß Kurve 2 in Abb. 2.

Diese Theorie läßt die Wirkung der Kriechschonzeit des Betons außer acht. Sie ergibt bei Spannungsrelaxation einen sehr großen Spannungsverlust.

Die tatsächliche Formänderung des Betons verläuft nach Abb. 1c, seine Spannungsrelaxation gemäß Kurve 3 in Abb. 2.

Die *Arutuniansche* Theorie des elastisch-kriechenden Körpers, deren Weiterentwicklung sowie die *CEB-FIP*-Empfehlung wollten vor allem die Widersprüche der vorigen beiden Theorien beseitigen. Neben anderen hochwertigen Ergebnissen gelang es nicht, dies zu realisieren, da die Berechnungen

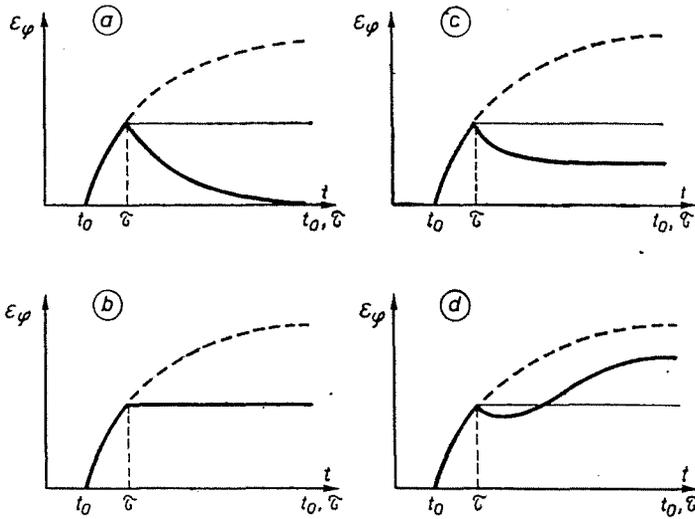


Abb. 1

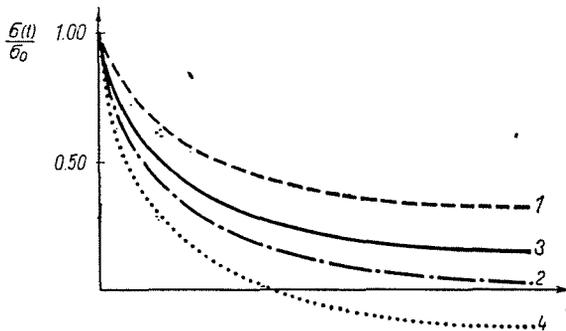


Abb. 2

nach Abb. 1d und der Kurve 4 in Abb. 2 in gewissen Fällen zu offensichtlich fehlerhaften Ergebnissen führten [16], [18].

Die Widersprüche werden dadurch verursacht, daß diese Theorien in der Kriechfunktion die Alterung und die Wirkung der Kriechschonzeit des Betons unrichtig berücksichtigen.

Die Streitfragen wurden von Prof. RÜSCH und Mitarb. in [16] geklärt und die von Widersprüchen befreiten Kriech- und Schwindfunktionen graphisch dargestellt.

Im weiteren sollen diese Funktionen als Grunddaten betrachtet werden.

4. Kriech- und Schwindfunktionen

4.1 Kriechfunktion

Die Kriechfunktion spielt in der Kriechberechnung eine sehr wichtige Rolle. Es kommen in ihr zahlreiche Wirkungen zum Ausdruck, von denen das Kriechmaß abhängig ist (s. näher in [16]).

Die in [16] vorgeschlagenen und graphisch angegebenen Kriechfunktionen lassen sich mit

$$\varphi = \varphi(t - t_0) = \varphi_1(t - t_0) + \varphi_2)t - t_0 \quad (1)$$

gut annähern, wo

$$\varphi_1(t - t_0) = \varphi_v k_0 \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\lambda_v}} \right), \quad (2)$$

$$\varphi_2(t - t_0) = \varphi_N \sum_{i=1}^{i=2} k_{i0} \nu_i \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\lambda_i}} \right). \quad (3)$$

$$k_0 = 1, 0, \quad k_{10} = e^{-\frac{t_0-c}{\lambda_1}}, \quad k_{20} = e^{-\frac{t_0-c}{\lambda_2}}. \quad (4)$$

$$\varphi_v = 0, 4, \quad c = \frac{28}{360} \text{ Jahr}, \quad \sum \nu_i = 1, 0. \quad (5)$$

Der Endwert der Kriechfunktion ergibt sich bei $t \rightarrow \infty$ zu:

$$\varphi_\infty = \varphi_v + \varphi_N \sum_{i=1}^{i=2} \nu_i k_{i0}. \quad (6)$$

Der Wert der Kriechfunktion ist auch von der wirksamen Dicke des Betonkörpers abhängig. Die Werte der Konstanten ν_i und λ_i in Abhängigkeit von der wirksamen Dicke e_w sind in Tabelle I, die Werte der Kriechzahlen φ_N nach Rüschi in Tabelle II zusammengestellt. Von der wirksamen Dicke unabhängig darf λ_v mit 1/10 Jahren angesetzt werden.

Die wirksame Dicke des Betons ist nach [16]:

$$e_w = \beta_w \frac{2F_b}{U} \quad (7)$$

wo F_b die Betonquerschnittsfläche,
 U der Austrocknung ausgesetzten Umfang des Querschnittes einschließlich eventueller innerer belüfteter Begrenzungen,
 β_w ein von den klimatischen Bedingungen abhängiger Beiwert ist.

Tabelle I

e_w cm	ν_1	ν_2	λ_1 (Jahr)	λ_2 (Jahr)	bei $t_0 = 0$, φ_∞/φ_N
≤ 5	0,220	0,780	1/20	2	$\frac{0,4}{\varphi_N} + 1,85$
10	0,185	0,815	1/20	2	$\frac{0,4}{\varphi_N} + 1,70$
20	0,140	0,860	1/20	2	$\frac{0,4}{\varphi_N} + 1,55$
40	0,100	0,900	1/20	2	$\frac{0,4}{\varphi_N} + 1,40$
80	0,180	0,820	1/11	3	$\frac{0,4}{\varphi_N} + 1,26$
≥ 160	0,100	0,900	1/11	3	$\frac{0,4}{\varphi_N} + 1,13$

Konstanten von $\varphi(t)$.

Tabelle II

Lage des Bauteiles	Rel. Luftfeuchte in %	φ_N	ϵ_{s0}	β_w
In Wasser		0,8	$+10 \cdot 10^{-5}$	30,0
An sehr feuchter Luft, z. B. unmittelbar über Wasser	90	1,3	$-10 \cdot 10^{-5}$	5,0
Im allgemeinen im Freien	70	2,0	$-25 \cdot 10^{-5}$	1,5
An trockener Luft, z. B. in trockenem Innenraum	40	3,0	$-40 \cdot 10^{-5}$	1,0

Von den Umweltbedingungen abhängige Faktoren.

Die φ_N - und ϵ_{s0} -Werte beziehen sich auf plastischen Beton. Für erdfeuchten Beton ist eine Verminderung um 25%, für weichen Beton eine Erhöhung um 25% vorzunehmen.

Das Betonalter von der Herstellung bis zur Erhärtung darf nur dann als gleich der tatsächlichen Tagezahl betrachtet werden, wenn der mit Portlandzement hergestellte Beton unter natürlichen Bedingungen bei durchschnittlich 20 °C erhärtet. Anderenfalls ist der einer natürlichen Erhärtung entsprechende Zeitwert zu ermitteln:

$$t = \beta_z \sum \frac{T_0 + 10^\circ}{30^\circ} \Delta t \tag{8}$$

wo t die der natürlichen Erhärtungszeit gleichwertige Zeit in Tagen (das wirksame Alter),

- Δt die Anzahl der Tage mit annähernd gleicher mittlerer Betontemperatur T_0 ,
 β_z ein von der Zementsorte abhängiger Beiwert sind. Für Portlandzement ungarischer Herstellung ist $\beta_z = 1,0$; für schnellbindende Betone ist $\beta_z > 1,0$ (s. [16]).

In einem je früheren Alter der Beton belastet wird, umso empfindlicher ist er gegen Kriechen. Daher ist die Bestimmung des wirksamen Alters sehr wichtig.

Der Wert der Kriechfunktionen(1)-(3) bezieht sich auf die im Zeitpunkt t_0 eingetragene Anfangsbelastung. Bei einer späteren Änderung der Dauerlast in einem Zeitpunkt τ gilt eine ähnliche Beziehung, mit dem Unterschied, daß t_0 durch τ ersetzt wird.

$$\varphi(t - \tau) = \varphi_1(t - \tau) + \varphi_2(t - \tau), \quad (9)$$

$$\varphi_1(t - \tau) = \varphi_v k_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_v}}\right),$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t - \tau) &= \varphi_N \nu_1 e^{-\frac{\tau-c}{\lambda_1}} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}}\right) + \varphi_N \nu_2 e^{-\frac{\tau-c}{\lambda_2}} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_2}}\right) = \\ &= \varphi_2(t - t_0) - \varphi_2(\tau - t_0). \end{aligned} \quad (10)$$

4.2 Schwindfunktion

$$\dot{\varepsilon}_s(t - t_0) = \varepsilon_{s0} \sum_{i=1}^{i=2} k_{j0} \nu_j \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\lambda_j}}\right), \quad (11)$$

mit

$$k_{j0} = k_{sw} e^{-\frac{t_0-c}{\lambda_j}}, \quad c = \frac{28}{360} \text{ Jahr}, \quad \sum \nu_j = 1, 0. \quad (12)$$

Die Werte der Konstanten sind in Abhängigkeit von der wirksamen Dicke in Tabelle III enthalten. Das Betonalter wird mit Gl. (8) berechnet, wobei jedoch immer β_z von der Zementsorte unabhängig einen Wert gleich der Einheit hat.

In der Literatur des Themas ist die Näherung allgemein angenommen, daß zwischen Kriech- und Schwindfunktion Affinität bestehe. In diesem Falle gelten:

$$\varepsilon_s(t - t_0) = \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty} \varphi(t - t_0) \quad (13)$$

$$\varepsilon_{s\infty} = \varepsilon_{s0} \sum_{j=1}^{j=2} \nu_j k_{j0}. \quad (14)$$

Tabelle III

ϵ_{10} cm	ν_1	ν_2	λ_1 (Jahr)	λ_2 (Jahr)	k_{10}	bei $t_0 = 0$, $\Sigma \nu_j k_j$
5	0,400	0,600	1/20	4,0	0,48	1,20
10	0,340	0,660	1/14	2,0	0,62	1,05
20	0,260	0,740	1/2,75	3,0	0,65	0,90
40	0,500	0,500	1/2,75	10,0	0,71	0,80
80	1,000	—	4,0	—	0,75	0,75
160	1,000	—	9,0	—	0,70	0,70

Die Konstanten von $\epsilon_s(t)$.

5. Die Differentialgleichung des Kriechens

Der Betonkörper sei in einem Zeitpunkt t_0 durch eine aus Dauerlast herrührende Spannung σ_{b0} belastet. Es wird angenommen, daß sich nach der anfänglichen Belastung das Schwinden fortsetzt, und sich in den Zeitpunkten $\tau > t_0$ auch die Spannung im Betonkörper verändert. Dann kann die volle spezifische Formänderung (elastische Formänderung, Schwinden und Kriechen) im Zeitpunkt t mit folgender Beziehung ausgedrückt werden:

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_{b0}}{E_{b0}} [1 + \varphi(t - t_0)] + \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{\partial \sigma_b(\tau)}{\partial \tau} [1 + \varphi_2(t - t_0) - \varphi_2(\tau - t_0) + \varphi_\nu k_0 (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_\nu}})] d\tau + \epsilon_s(t - t_0). \tag{15}$$

Der Wert des Ausdruckes unter dem Integralzeichen ist:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{\partial \sigma_b(\tau)}{\partial \tau} [1 + \varphi_2(t - t_0) - \varphi_2(\tau - t_0) + \varphi_\nu k_0 (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_\nu}})] d\tau = \\ & = \left\{ \frac{\sigma_b(\tau)}{E_{b0}} [1 + \varphi_2(t - t_0) - \varphi_2(\tau - t_0) + \varphi_\nu k_0 (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_\nu}})] \right\}_{\tau=t_0}^{\tau=t} - \\ & - \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [1 + \varphi_2(t - t_0) - \varphi_2(\tau - t_0) + \varphi_\nu k_0 (1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_\nu}})] d\tau = \\ & = \frac{\sigma_b(t)}{E_{b0}} - \frac{\sigma_{b0}}{E_{b0}} [1 + \varphi(t - t_0)] + \\ & + \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \left[\frac{\partial \varphi_2(\tau - t_0)}{\partial \tau} + \varphi_\nu \frac{k_0}{\lambda_\nu} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_\nu}} \right] d\tau. \tag{16} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Ergebnisses von (16) ergibt sich die volle spezifische Formänderung zu:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_{b0}} + \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma(\tau) \left[\frac{\partial \varphi_2(\tau - t_0)}{\partial \tau} + \frac{\varphi_v k_0}{\lambda_v} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_v}} \right] d\tau + \varepsilon_s(t - t_0). \quad (17)$$

Diese Integralgleichung läßt sich in der bekannten Weise in eine Differentialgleichung umformen.

Bilden wir die erste und zweite Ableitung von $\varepsilon(t)$ nach t unter Anwendung der Zusammenhänge für die Derivation eines Integrals (s. in [2] Band 1. S. 146).

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = f(t), \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} f(t, \tau) d\tau + f(t, t) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d\sigma_b(t)}{E_{b0} dt} + \frac{1}{E_{b0}} \left[\frac{\partial \varphi_2(t - t_0)}{\partial t} + \frac{\varphi_v k_0}{\lambda_v} \right] \sigma_b(t) - \\ &- \frac{\varphi_v k_0}{E_{b0} \lambda_v^2} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_v}} d\tau + \frac{d\varepsilon_s(t - t_0)}{dt}. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} &= \frac{d^2\sigma_b(t)}{E_{b0} dt^2} + \frac{1}{E_{b0}} \left[\frac{\partial \varphi_2(t - t_0)}{\partial t} + \frac{\varphi_v k_0}{\lambda_v} \right] \frac{d\sigma_b(t)}{dt} + \\ &+ \frac{1}{E_{b0}} \left[\frac{\partial^2 \varphi_2(t - t_0)}{\partial t^2} - \frac{\varphi_v k_0}{\lambda_v^2} \right] \sigma_b(t) + \frac{\varphi_v k_0}{E_{b0} \lambda_v^3} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_v}} d\tau + \frac{d^2\varepsilon_s(t - t_0)}{dt^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Beide Seiten von (20) mit $\frac{1}{\lambda_v}$ multipliziert und mit (21) summiert, erhält man die Differentialgleichung des Kriechens:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{1}{\lambda_v} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d^2\sigma_b(t)}{E_{b0} dt^2} + \frac{1}{E_{b0}} \left[\frac{1 + \varphi_v k_0}{\lambda_v} + \frac{\partial \varphi_2(t - t_0)}{\partial t} \right] \frac{d\sigma_b(t)}{dt} + \\ &+ \frac{1}{E_{b0}} \left[\frac{\partial^2 \varphi_2(t - t_0)}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda_v} \frac{\partial \varphi_2(t - t_0)}{\partial t} \right] \sigma_b(t) + \frac{d^2\varepsilon_s(t - t_0)}{dt^2} + \frac{d\varepsilon_s(t - t_0)}{\lambda_v dt}. \end{aligned} \quad (22)$$

6. Die vereinfachte Differentialgleichung

Die Differentialgleichung (22) ist schwer, zu handhaben und daher für praktische Berechnungen ungeeignet, deshalb wird eine einfachere Lösung gesucht.

Angenommen, daß $\lambda_p \rightarrow 0$ und $k_0 = 1,0$, erhält man nach Multiplizieren der obigen Differentialgleichung mit λ_p folgende einfache Beziehung:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1 + \varphi_v}{E_{b0}} \frac{d\sigma_b(t)}{dt} + \frac{1}{E_{b0}} \frac{\partial \sigma_b(t - t_0)}{\partial t} \sigma_b(t) + \frac{d\varepsilon_s(t - t_0)}{dt}. \quad (23)$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch in Unkenntnis der vernachlässigungsfreien Differentialgleichung aus den Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_{b0}}{E_{b0}} [1 + \varphi_v + \varphi_2(t - t_0)] + \\ &+ \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{\partial \sigma_b(\tau)}{\partial \tau} [1 + \varphi_2(t - t_0) - \varphi_2(\tau - t_0) + \varphi_v] d\tau + \varepsilon_s(t - t_0), \end{aligned} \quad (24)$$

bzw.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_{b0}} (1 + \varphi_v) + \frac{1}{E_{b0}} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \frac{\partial \varphi_2(\tau - t_0)}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_s(t - t_0) \quad (25)$$

ableiten.

Gl. (23) kann weiter vereinfacht werden, wenn man annimmt, daß zwischen der Schwind- und der Kriechfunktion Affinität besteht, d.h.:

$$\varepsilon_s(t - t_0) = \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_{2\infty}} \varphi_2(t - t_0). \quad (26)$$

$$\varphi_{2\infty} = \varphi_\infty - \varphi_v. \quad (27)$$

$$\frac{d\varepsilon_s(t - t_0)}{dt} = \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty - \varphi_v} d\varphi_2(t - t_0). \quad (28)$$

Unter Berücksichtigung dieser Näherung ergibt sich aus (23) die vereinfachte Differentialgleichung des Kriechens zu:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi_2} = \frac{1 + \varphi_v}{E_{b0}} \frac{d\sigma_b}{d\varphi_2} + \frac{\sigma_b}{E_{b0}} + \frac{\varepsilon_{s\infty}}{\varphi_\infty - \varphi_v}. \quad (29)$$

7. Anwendung

Untersuchen wir die Spannungsrelaxation für den Fall, wenn Formänderungen vollständig verhindert sind, d.h.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{b0}}{E_{b0}} = \text{konst.}$$

Die Differentialgleichung des Problems lautet bei Berücksichtigung von (29):

$$\frac{d\sigma_b}{d\varphi_2} + \frac{\sigma_b}{1 + \varphi_v} = - \frac{\varepsilon_{s\infty} E_{b0}}{(\varphi_\infty - \varphi_v)(1 + \varphi_v)}.$$

Die Auflösung der Differentialgleichung ist

$$\sigma_b = C e^{-\frac{\varphi_2}{1+\varphi_v}} - \frac{\varepsilon_{s\infty} E_{b0}}{\varphi_\infty - \varphi_v}.$$

Sind $t = t_0$, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_{b0}}{E_{b0}}$,

erhält man aus Gl. (25)

$$\frac{\sigma_{b0}}{E_{b0}} = \frac{\sigma_b}{E_{b0}} (1 + \varphi_v) = \frac{1 + \varphi_v}{E_{b0}} \left(C - \frac{\varepsilon_{s\infty} E_{b0}}{\varphi_\infty - \varphi_v} \right).$$

Der Wert der Integrationskonstante ist:

$$C = \frac{\sigma_{b0}}{1 + \varphi_v} + \frac{\varepsilon_{s\infty} E_{b0}}{\varphi_\infty - \varphi_v}.$$

In Kenntnis von C:

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{b0}}{1 + \varphi_v} e^{-\frac{\varphi_2}{1+\varphi_v}} - \frac{\varepsilon_{s\infty} E_{b0}}{\varphi_\infty - \varphi_v} \left(1 - e^{-\frac{\varphi_2}{1+\varphi_v}} \right).$$

Das Schwinden außer acht lassend, wurden die Werte von σ_b/σ_{b0} in verschiedenen Zeitpunkten ($t-t_0$) bestimmt. Die ermittelten Ergebnisse wurden mit den nach der Dischingerschen und der Boltzmannschen Theorie berechneten Werten verglichen.

Angaben: $e_w = 40$ cm, $\varphi_v = 0,4$, $\varphi_N = 2,6$, $\varphi_\infty = 3,0$,
 $\nu_1 = 0,10$, $\nu_2 = 0,9$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 2,0$,
 $t_0 = 28$ Tage.

$(t-t_0)$ in Jahren	Boltzmann	Annähernde Differential- gleichung	Dischinger
0	1,000	0,714	1,000
0,5	0,435	0,409	0,308
1,0	0,353	0,307	0,206
2,0	0,282	0,206	0,118
3,0	0,260	0,162	0,084
4,0	0,253	0,140	0,068
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
∞	0,250	0,115	0,050

Zusammenfassung

Im Beitrag wird — unter Berücksichtigung der neuesten Forschungsergebnisse — für einachsigen Spannungszustand eine von Widersprüchen freie Differentialgleichung des Betonkriechens angeschrieben und aus dieser eine vereinfachte Beziehung abgeleitet.

Schrifttum

1. ARUTUNIAN, N. Ch.: Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures. Pergamon Press London, 1966 (Übersetzung aus dem Russischen).
2. BAULE, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. S. Hierzel Verlag, Leipzig, 1953.
3. BOLTZMANN, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiener Bericht 10. 1874.
4. CEB-FIP: International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures. Principles and Recommendations. FIP Sixth Congress, Prague, 1970.
5. DISCHINGER, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur 1937. N. 33/34.
6. DISCHINGER, F.: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Der Bauingenieur, 1939. H.5/6.
7. ÉLLÁS, E.: Berechnung der Wirkungen des Kriechens mit Hilfe der Laplace-schen Transformation, Acta Techn. Hung. 4. L (1962).
8. HERBERG, W.: Spannbetonbau, Teil I., II. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956—1957.
9. KOLLÁR, L.: Die Wirkung des Kriechens auf die kritische Last von Baukonstruktionen.* Mélyépítéstudományi Szemle, Budapest, 1960. 10.
10. LIPTÁK, L.: Kriechen und Querkontraktion von Betonkonstruktionen.* (Kandidatenarbeit), Budapest, 1967.
11. NEVILLE, A. M.: Creep of Concrete: Plain Reinforced and Prestressed. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.
12. NOWACKI, W.: Theorie des Kriechens — Lineare Viskoelastizität. Wien, Franz Deuticke, 1965.
13. PALOTÁS, L.: Formänderung des Betons unter Dauerlast.* Anyagvizsgálók Közlönye, Budapest, 1938.
14. PALOTÁS, L.: Spannungsumlagerung im Beton durch Kriechen.* Mélyépítéstudományi Szemle, Budapest, 1 (1971).

* In ungarischer Sprache.

15. PUCHER, A.: Lehrbuch des Stahlbetonbaues, 3. Auflage, Springer-Verlag, Wien, 1961.
16. RÜSCH, H.—JUNGWIRTH, D.—HILSDORF, H.: Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke. Beton- und Stahlbetonbau 68 (1973), H 3/4, S. 49—76.
17. SATTLER, K.: Theorie der Verbundkonstruktionen. 2. Aufl. Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1959.
18. SZALAI, J.: Inconsistencies in the Linear Theory of Creep of Concrete, Suggestion for their Elimination. Acta Techn. Hung. 79 (1974) pp. 309—344.
19. TROST, H.: Spannungs-Dehnungs-Gesetz eines viskoelastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton. Beton (1966) 6. S. 233.
20. TROST, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. Beton- und Stahlbetonbau 62 (1967), H. 10/11, S. 230—261.
21. TROST, H.: Zur Berechnung von Stahlverbundträgern im Gebrauchszustand auf Grund neuerer Erkenntnisse des viskoelastischen Verhaltens des Betons. Der Stahlbau 37. (1968) H. 11, S. 321.
22. TROST, H.: Zur wirklichkeitsnahen Ermittlung der Beanspruchungen in abschnittsweise hergestellten Spannbetontragwerken. Der Bauingenieur 45 (1970), H. 5, S. 155—169.

Prof. Dr. János SZALAI, H-1521 Budapest