

ANALYSIS OF MULTIBEAM BRIDGES

By

A. WINDISCH

Department of Reinforced Concrete Structures,
Technical University, Budapest

(Received September 16, 1977)

Presented by Prof. Dr. Árpád Orosz

The realization of modern highways and complex junctions needs many bridges of 20 to 30 m span. It became economical and necessary to develop standard prefabricated superstructures. The main aspect in selecting the structure was to create a superstructure from prefabricated elements proper, easy of production, haulage and mounting, involving the simplest possible connections in the site, and of monolithic-like behaviour.

The usual form of steel or monolithic concrete bridges, consisting of beams, cross-beams and a deck plate over them united to a composite structure, was inadequate from the aspect of requirements formulated above. Thereafter multibeam bridges consisting of prefabricated beams connected by longitudinal rows of hinges had been developed. Control of the erected superstructures showed defects, harmful movements in these joints.

Rigid connections resisting bending moments between the flanges of the prefabricated beams superimposed by a plate cast in situ on the flanges all across the superstructure was the next stage of progress. The question arose whether this plate could eliminate both the cross-beams difficult to construct and the expensive transverse prestressing.

On the basis of foreign and Hungarian experience, a superstructure made of prefabricated, prestressed T beams, connected by end cross-beams and by a bridge deck plate cast in situ over the flanges serving as mould was chosen (Fig. 1).

The application of this superstructure — to be considered as up-to-date — was hindered by the lack of a method of calculation to reliably determine the behaviour of this eccentrically stiffened plate with no intermediate cross-beam.

It must be emphasized that mathematical models applied for concrete bridge superstructures mostly take the characteristics of steel bridges into consideration. There is an increasing contradiction between the numerical accuracy offered by computers, and the approximate mathematical models involving approximate assumptions.

In the present paper, after a short survey of the current mathematical models, a new interpretation given the transverse load distribution factor and

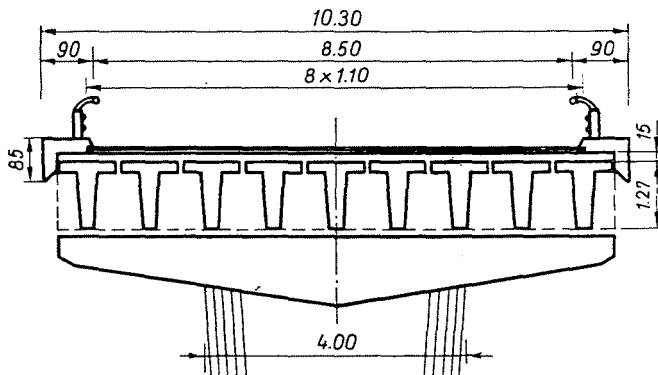


Fig. 1

the transverse bending rigidity of the superstructure, the effect of eliminating the intermediate cross-beam on the load distribution will be discussed. A more detailed mathematical model fitted to the characteristics of concrete bridges will be outlined.

Survey of available mathematical models

The mathematical models for the behaviour of steel and concrete bridges consisting of a bridge deck and the interconnected girder system or grillage under traffic loads can be divided in two main groups:

- models consisting of discrete elements,
- continuous models.

The models using discrete elements (grillage, interconnected girder system, folded plate) take the effect of the plate rigidly connected to the beams into consideration, calculating effective bending and torsional rigidities of T cross sections with an effective flange width. These models are not suitable to be developed into a more precise model of computation, as the calculated upper fibre deformations of the girders are not consistent, and therefore the effect of the interacting bridge deck is taken into consideration at an unknown degree of approximation.

The continuous model of an interconnected girder system or grillage rigidly connected to the bridge deck is the well-known orthotropic plate. It seems of importance to discuss this model in detail, as it is used very often in bridge design without criticism though it may lead to defective structures.

The theory of the orthotropic plate was first used by HUBER (1924) for calculating reinforced concrete two-way slabs. The isotropic plate stiffened by eccentric ribs was first substituted by an orthotropic plate by PFLÜGER (1947).

The mid-planes of the plate of the real structure and of the equivalent plate are the same, but the latter is not free from in-plane deformations any more. The behaviour of this orthotropic plate as a function of deflections w normal to the mid-plane can be formulated as an eighth-order differential equation.

The activities of GUYON (1946) and MASSONET (1950) were of great importance for the generalization of the equivalent orthotropic plate model of grillages. Because of its simplicity, it is also used for multibeam bridges.

Experiments performed to check the theory gave, however, smaller deflections than expected from calculations. A group of researchers attributed this deviation to inaccuracies in the torsional rigidity (CORNELIUS, 1952), or to the uncertain effective flange width (SAMUELLI FERRETTI, 1962). All of them attempted to eliminate this uncertainty by increasing the "effective" stiffnesses.

TRENKS (1954) [1], referring to statements by PFLÜGER and HOMBERG, points to the fact that assumptions made by HUBER are no more valid in the case where the mid-planes of the isotropic plate and of the equivalent orthotropic plate do not coincide, the former being not exempt of in-plane deformations.

GIENCKE (1955) [2] and MASSONET (1959) [4] derive again the differential equations of eccentrically stiffened plates. GIENCKE, neglecting the in-plane deformations, gets a Huber-type equation, taking the influence of the eccentric ribs on the effective rigidities into consideration. MASSONET goes further and states that to every boundary condition and loading another Huber-type equivalent plate belongs. He also proved that the stiffnesses measured on eccentrically stiffened plates subject to pure bending or torsion are the lower bounds of stiffnesses effective under combined loading.

HUFFINGTON (1956) [3] states also that a single orthotropic plate of constant thickness cannot be equivalent to the stiffened plate with all its characteristics. Criteria of substitution could be either the identity of deflections at a characteristic point, the coincidence of stress components, the same average deflection or equality of strain energies.

BAREŠ (1959) [5], comparing his theoretical and experimental results stated the in-plane action of the bridge deck to influence essentially the deformations. The load distribution determined from the upper fibre strains of the ribs differed by 40% from that of the equivalent plate.

Determination of the equivalent plate stiffnesses of concrete bridge superstructures showed the assumptions and idealizations to closer approach the characteristics of a stiffened steel plate than of a concrete structure. As a matter of fact, none of the authors took into consideration that one of the aims of the design of concrete bridges is to determine the amount of ordinary or prestressed steel in the girders and the exact values of the transverse deck loading effects.

The adoption of the model of equivalent orthotropic plate for steel bridge decks can be considered as correct, as the dimensions of the loaded area are greater than the spacing of stiffeners, so in the steel deck a rather homogeneous state of stress develops. Even at present, several publications neglect the antecedents and thus, forcedly lead to erroneous results. Omitting to indicate the range of validity of the derived equivalent stiffnesses, the wrong view is maintained behind the epithet "advanced". It is completely meaningless e.g. to conclude from the deflections of the equivalent orthotropic plate on the transverse bending moments of the bridge deck.

No difficulties of principle arise in taking the exact composite action of the bridge deck and the grillage or the interconnected girder system into consideration. In the computer age it is not reasonable to refer to the bulky computations, neglecting the excess of the load bearing capacity of the structure, and it is both uneconomical and unjustified to apply more or less fairly approximate models at a high degree of accuracy.

A new interpretation of the load distribution factor and the transverse bending rigidity

The design of a structure made of concrete, brittle and sensitive to cracking, has to determine the proper percentage and position of the reinforcement, and sometimes to guarantee a crack-free structure. Accordingly, it is wrong to characterize the parts of a hyperstatic structure by the ratios of deflection.

It must be mentioned that papers dealing with stiffened plates ignore the tensile stresses in the ribs. Some authors determine the compressions in the plate, mainly for steel structures.

The transversal load distribution factor q_{ik}^{rs} is the ratio of an effect (bending moment, tensile force etc.) in the i th girder of the cross section r caused by unit concentrated load at point k of the cross section s , to the sum of the same effects in cross sections r of all girders caused by a uniform transversal, linear load (of unit resultant) in cross section s .

Thus, the load distribution factor is not the ratio of deflections but that of important effects acting on a concrete bridge. It must be emphasized that this load distribution factor is not to distribute the resulting bending moment in a beam with the same boundary and loading conditions, as the in-plate deformations cause an important increment of tensions in the beams.

The notion about the transverse bending rigidity of the superstructure must also be changed. The necessity of cross-beams of a high transverse rigidity is motivated by the possibility of great single concentrated wheel loads to act on the outer beam. This single load is wrenched from the vehicle axle but in reality, an axle always bears two wheels and the load on the outer beam

is determined by the sum of both load distribution factors under them. Thus, it can be realized that a lower transversal rigidity — neglect of the cross-beam — may not increase the bending moment in the outer beam.

Comparison of model test and calculation results

To control the reliability of mathematical models used in practice, and of the preceding suggestions, model tests were made, and compared to calculation results.

The 1 : 20 scale model made of asbestos-cement plate and ribs of a 25 m single-span superstructure, with a cross section similar to that presented in Fig. 1, with end cross-beams and with or without a single intermediate cross-beam, was tested in the elastic range, using dial gauges and electrical strain gauges.

Three types of load distribution factors were determined viz. the ratio of deflections D , the ratio of resulting bending moments M_M , and the ratio of tensile forces T in each T beam of the superstructure.

The load distribution in the outer and central beams at midspan (Fig. 2) permits to examine the effect of the intermediate cross-beam and the accuracy of calculations according to the grillage and the equivalent orthotropic plate models.

For the outer beam, the cross-beam is less effective but for the central beam, more effective than expected.

Some stresses have been computed for the midspan cross section of the outer and the central beam: the bending moments M_M , the tensile forces T_T and the bending moments M_D using the influence lines determined from the model bending moments, tensile forces and deflections, respectively.

As vehicle axle load, that specified in the Hungarian Code for Highway Bridges was taken, consisting of two 10 Mp loads spaced at 2.7 m.

For the outer beam, M_D can be stated to exceed M_M by 20—12%, but for the central beam, M_D is less by 26—0% than M_M , the cross-beam influences more the central than the outer beam.

Table I
Load effects from model tests

	Outer beam			Central beam		
	M_M Mpm	T_T Mp	M_D Mpm	M_M Mpm	T_T Mp	M_D Mpm
Without cross-beam	18.28	4.76	24.15	17.96	9.91	14.22
With cross-beam	20.91	14.13	23.85	12.76	6.94	12.92

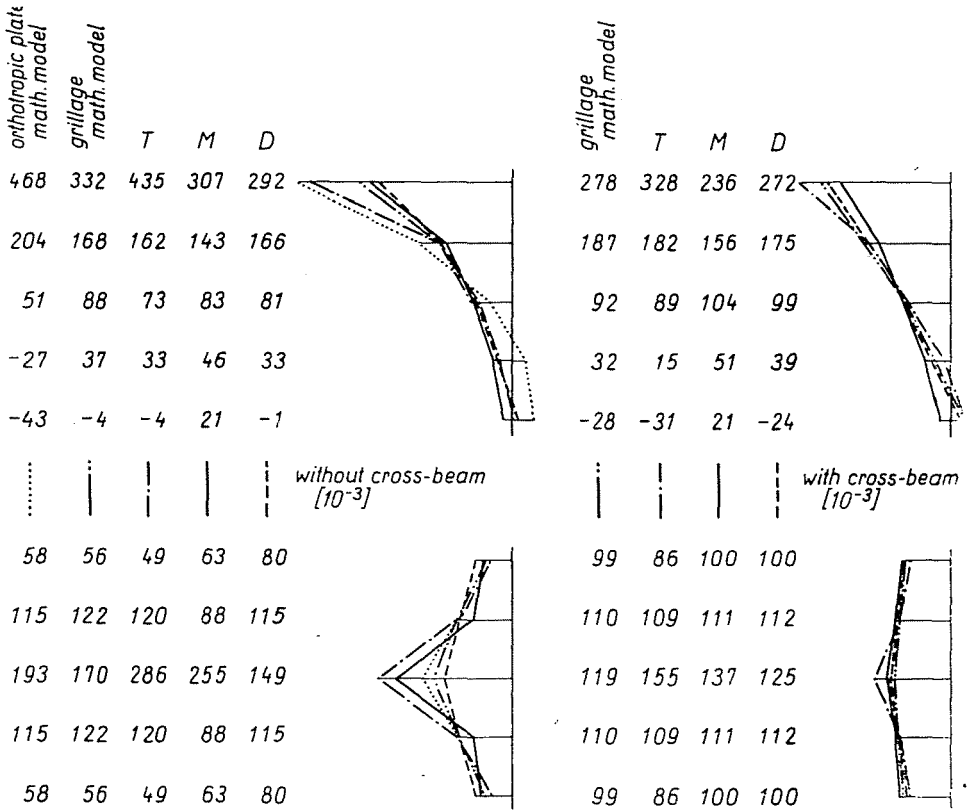


Fig. 2

Tensile stresses σ_M and σ_D (kp/cm²) in the bottom fiber of the two beams have been calculated, respectively, from the load effects M_M and T_T like from M_D .

Table II
Stresses from model tests

	Outer beam		Central beam	
	σ_M	σ_D	σ_M	σ_D
Without cross-beam	27.18	33.03	26.25	19.45
With cross-beam	31.00	32.62	18.85	17.67

According to these results, the notion that the cross-beam "helps" the outer beams must be revised. The vehicle mentioned causes almost the same stresses as in the central beam.

From Fig. 2 it is also seen that in all cases the load distributions differed significantly between those deduced from bending moments and tensile forces and from the measured deflections.

For the sake of comparison with a mathematical model, results in Fig. 2, load distribution influence lines deduced from the computed deflections of the equivalent grillage either with a real cross-beam or a cross-beam formed by the deck plate of 2 m width, and from the orthotropic plate model solved by the GUYON—MASSONET method are given.

In the superstructure with a cross-beam, the computed and the measured deflections of the model and those of the grillage give almost the same load distribution influence lines, but lines deduced from the inner forces are rather different.

In the case of a superstructure with no cross-beam, the orthotropic plate gives a very uneconomical load distribution in the outer beam, underestimating the equivalent rigidities, while for the central beam, the computed influence lines are on the unsafe side.

Measurements permit to conclude that

- the rigidity of the bridge deck significantly influences the load distribution;
- in the case of the superstructure examined, 15% of the loads were carried by the structure acting as a folded plate;
- the in-plane deformations of the plate do not follow the Bernoulli-Navier assumption, not even between two adjacent beams.

A refined mathematical model

The superstructure of a multibeam bridge can be modelled as shown in Fig. 3. The beams and plates are connected by $n + 1$ nodes at every interline. At a node, five inner force resultants substitute the rigid connection between beam and plate.

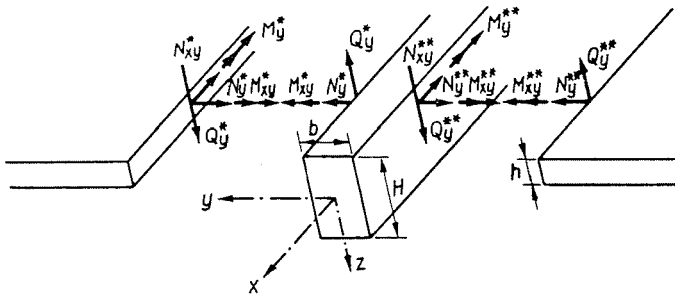


Fig. 3

The deck plate is modelled as a quasi-thin, homogeneous, isotropic, elastic plate, loaded both in-plane and transversally. The effect of transverse shear deformation must be taken into consideration, as the span to depth ratio of the plate between two beams is nearly 5.

The beams are prismatic, elastic, homogeneous, isotropic, subject to loads varying along the axis.

The differential equations of the plate were derived, and the state of stresses in the beams determined by the method of ALMANZI [6].

The inner nodal forces are calculated by the force method. More details are given in [7].

This method is easy to computerize, permitting to improve the accuracy of load effects on the girder system interconnected by the bridge deck.

Summary

Based on results of comparative calculations and of model tests, the inadequacy of the method of equivalent grillage or of the orthotropic plate theory to determine the real behaviour of multibeam concrete bridges has been demonstrated. A new interpretation of the transverse load distribution factor and of the transverse bending rigidity of the superstructure has been suggested. The effect of the intermediate cross-beam on the load distribution has been considered and a computerizable refined model of calculation outlined.

References

1. TRENKS, K.: Beitrag zur Berechnung orthogonal-anisotroper Rechteckplatten. Bauingenieur, Vol. 29. 1954. 372—377.
2. GIENCKE, E.: Die Grundlagen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Streifen. Stahlbau Vol. 24. 1955. 128—129.
3. HUFFINGTON, N. C.: Theoretical determination of rigidity properties of orthogonally stiffened plates. Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 23. 1956.
4. MASSONET, Ch.: Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques. Proc. IABSE, Vol. 19. 1959. 201—230.
5. BAREŠ, R.: Interaction transversale des constructions à poutres solidaires d'une dalle. Acta Technica ČSAV, Vol. 4. 1959. 336—377, Vol. 5. 1960. 186—210.
6. DSANELIDZE, G. J.: The problem of ALMANZI. Trudü Leningradskovo Instituta im. Kalinina, No. 210. 1960 (in Russian)
7. WINDISCH, A.: Refined theory of multibeam concrete bridges. Thesis, Budapest, 1974. (in Hungarian).

Dr. Andor WINDISCH, H-1521 Budapest

ÉQUATIONS FONDAMENTALES DU RÉSERVOIR EN PLASTIQUE RENFORCÉ À FIBRES, SOUS PRESSION

F. SEBŐK

Chaire de Constructions en Béton armé, Université Technique de Budapest

(Accepté le 1^{er} novembre 1977)

I. Introduction

On étudie aujourd'hui les matériaux renforcés à fibres de manière macroscopique à l'aide d'un continu équivalent. Le principe de cette méthode consiste à définir — en se basant sur les propriétés des fibres et de la matrice de pose — une matière homogène, équivalente au point de vue de la résistance, de manière que la structure réelle du matériau sera laissée de côté au cours du calcul.

Aujourd'hui les recherches visent par excellence la création du modèle remplaçant, reposant sur la mise à jour, autant que possible exacte, du jeu des forces du système des composants fibres-matrice. A l'Université Technique de Budapest on s'occupe également de ce sujet et des domaines scientifiques limitrophes d'une manière approfondie; dans ces dernières années l'activité de PALOTÁS, THAMM, VARGA et POMÁZI a fourni des résultats considérables. Ce sont surtout les recherches de PETRASOVITS sur la capacité portante des groupes de pieux et de TASSI sur l'ancrage des armatures de précontrainte qui méritent l'attention et qui — quoique ces auteurs étudient des problèmes absolument différents — fournissent des données de grande valeur pour l'étude de la théorie des matériaux renforcés à fibre.

Un mode de traiter le renforcement à fibres, totalement différent de la considération du problème au point de vue de la «résistance des matériaux», est celui de l'approcher du côté des «systèmes porteurs». Dans cette conception les fibres supposées arrangées (et la matrice solidaire) constituent un cordage spécial, capable de reprendre des pressions. Pour résoudre le problème, on trouve un appui intéressant à plusieurs points de vue dans le livre de SZABÓ et KOLLÁR sur les câbles de suspension.

2. La formulation du problème

L'étude présente traite une coque-membrane, décrite par les coordonnées de surface orthogonales u, v . Pour simplifier le problème, nous posons le système de coordonnées de manière que $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ donnent en même temps les directions de courbure principales de la surface.

La résistance de la structure est assurée par un ou plusieurs systèmes de fibres. La tangente des fibres de l' $i^{\text{ème}}$ système forme uniformément un angle $\vartheta(u, v)$ avec l'axe v , et ϑ est dans chaque point régulier de la surface univoque et continu.

L'étude se pose comme but d'établir des relations entre la charge de compression, la forme de la surface (c.-à-d. la disposition des fibres) et les forces naissant dans les fibres.

3. Relations géométriques

Dans un point superficiel, donné par le vecteur de position \bar{X} , le trièdre accompagnant de la courbe dans l'espace de la fibre peut être caractérisé par les vecteurs unitaires $(\bar{e}_t, \bar{e}_n, \bar{e}_g)$. Le vecteur de courbure de la fibre est la variation de la tangente le long de la longueur d'arc, c'est-à-dire:

$$\bar{\kappa} = \frac{d\bar{e}_t}{ds}$$

dont la grandeur absolue est désignée par $1/\rho$. Nous décomposons ce vecteur de courbure en deux composantes.

La grandeur du vecteur de courbure «normal» de la fibre est le produit scalaire, composé avec le vecteur unitaire de la normale principale, en se basant sur la formule de *Frenet*:

$$\kappa_n = \bar{\kappa} \cdot \bar{e}_n.$$

La grandeur du vecteur de courbure «géodésique» dans le plan tangent est:

$$\kappa_g = \bar{\kappa} \cdot \bar{e}_g.$$

Si l'on désigne les courbures respectivement normale et géodésique, appartenant à la ligne $u = \text{const.}$ par $\kappa_{n(u)}$ et $\kappa_{g(u)}$ et celles appartenant à la ligne $v = \text{const.}$ par $\kappa_{n(v)}$ et $\kappa_{g(v)}$, on en obtient — puisqu'il s'agit de courbures principales — les courbures correspondantes de la fibre formant un angle ϑ avec l'axe, d'après le théorème d'*Euler*:

$$\kappa_{n(\vartheta)} = \kappa_{n(v)} \cos^2 \vartheta + \kappa_{n(u)} \sin^2 \vartheta$$

ou d'après le théorème de *Liouville*:

$$\kappa_{g(\vartheta)} = \frac{d\vartheta}{ds} + \kappa_{g(v)} \cos \vartheta + \kappa_{g(u)} \sin \vartheta.$$

On pose également — en forme raccourcie — la première forme primitive de la surface qui est — compte tenu des coordonnées orthogonales :

$$(ds)^2 = (d\bar{X} d\bar{X}) = E_1 du^2 + G_1 dv^2$$

où

$$E_1 = \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}$$

et

$$G_1 = \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}.$$

La seconde forme primitive de la surface est

$$(-d\bar{X} \cdot d\bar{e}_n) = E_2 du^2 + G_2 dv^2$$

avec

$$E_2 = \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial u^2} \cdot \bar{e}_n$$

et

$$G_2 = \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial v^2} \cdot \bar{e}_n.$$

On sait aussi qu'entre les grandeurs ci-dessus — selon *Bonnet* — les relations de géométrie différentielle suivantes existent :

$$\varkappa_{n(u)} = \frac{G_2}{G_1}$$

et

$$\varkappa_{n(v)} = \frac{E_2}{E_1}$$

d'autre part

$$\varkappa_{g(u)} = \frac{\partial G_1}{\partial u} \cdot \frac{1}{2G_1 \sqrt{E_1}}$$

et

$$\varkappa_{g(v)} = -\frac{\partial E_1}{\partial v} \cdot \frac{1}{2E_1 \sqrt{G_1}}.$$

4. Conditions d'équilibre

La condition d'équilibre de la longueur ds d'un élément du système de fibres:

$$\bar{S}_{(s+ds)} - \bar{S}_{(s)} + \bar{q}_{(s)} ds = 0$$

où \bar{S} est la force normale se présentant dans la fibre et \bar{q} est le vecteur de la force extérieure, rapportée à la longueur d'unité.

On peut écrire cette relation également dans la forme

$$\frac{d}{ds} (S \cdot \bar{e}_t) + \bar{q} = 0$$

qui donne — après la différentiation — le résultat:

$$\frac{dS}{ds} \bar{e}_t + S\bar{\kappa} + \bar{q} = 0.$$

Les produits scalaires de cette équation vectorielle, formulée avec les vecteurs unitaires du trièdre accompagnant, fournissent les conditions générales de l'équilibre spatial:

$$\frac{dS}{ds} + q_t = 0$$

$$S\kappa_n + q_n = 0$$

$$S\kappa_g + q_g = 0$$

où q_t , q_n , q_g sont les composantes de la force spécifique extérieure dans les directions du trièdre.

Il découle de ce qui vient d'être dit, que les trois équations ne seront satisfaites que dans le cas d'un seul système extérieur de force exceptionnelle, le problème statique est donc insuffisamment déterminé. La supposition d'une charge spatiale quelconque exige donc le développement d'au moins trois systèmes de fibres s'entrecoupant.

5. Des cas de chargement spéciaux

La résistance du matériau sera exploitée de manière optimale, si la force normale, naissant dans les fibres, est constante tout le long, c'est-à-dire

$$\frac{dS}{ds} = 0.$$

On peut qualifier une forme constructive — c'est-à-dire une disposition des fibres — satisfaisant à cette condition d'eumorphe.

Au sens de la première équation d'équilibre, un système de fibres eumorphe ne pourra être formé que si la projection des forces extérieures en direction tangentielle est égale à zéro.

Dans un cas de chargement ultérieur, encore plus spécial, q_z est aussi égale à zéro, de manière que les forces extérieures agissent normalement à la surface. C'est caractéristique des réservoirs sous pression. Il s'ensuit de la troisième équation d'équilibre que ces conditions exigent que $\kappa_g = 0$ soit satisfait. Par contre, un système de fibres eumorphe sans courbure géodésique coïncide avec les lignes géodésiques de la surface.

6. Le système de fibres eumorphe du réservoir sous pression à la surface de rotation

Les relations générales, traitées au préalable, se simplifient sensiblement, s'il s'agit d'une surface à symétrie de révolution et si la charge est une pression constante normale à la surface.

Comme d'habitude, on décrit la forme à l'aide de coordonnées cylindriques, donc les directions de courbure principales sont les cercles parallèles, d'une part, — c'est-à-dire $u = z = \text{const.}$ — et les méridiens, d'autre part, c'est-à-dire: $v = \varphi = \text{const.}$

Le vecteur de position est:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

ses dérivées respectivement de premier et de second ordre sont:

$$d\bar{X} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} d\varphi = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dz} \cos \varphi dz - r \sin \varphi d\varphi \\ \frac{dr}{dz} \sin \varphi dz + r \cos \varphi d\varphi \\ dz \end{pmatrix}$$

d'autre part

$$\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 r}{dz^2} \cos \varphi \\ \frac{d^2 r}{dz^2} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \varphi^2} = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du vecteur unitaire perpendiculaire sur la surface sont

$$\bar{e}_n = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \varphi \\ \cos \beta \sin \varphi \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

où β est l'angle formé par la normale et sa projection sur le plan (x, y) .

Les coefficients figurant dans la première forme fondamentale superficielle sont:

$$E_1 = \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} \right) = 1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2$$

$$G_1 = \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \right) = r^2$$

et les coefficients de la seconde forme fondamentale sont de manière analogue:

$$E_2 = \left(\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial z^2} \cdot \bar{e}_n \right) = \frac{d^2 r}{dz^2} \cos \beta$$

$$G_2 = \left(\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \varphi^2} \cdot \bar{e}_n \right) = -r \cos \beta.$$

En utilisant ces formules, les courbures sont

$$\kappa_{n(u)} = \frac{G_2}{G_1} = -\frac{\cos \beta}{r}$$

et

$$\kappa_{n(v)} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{d^2 r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}} = -1/\rho.$$

Au cas spécial étudié, le procédé fournit donc la relation connue de la courbure, et conduit par contemplation directe aussi à une constatation évidente, un fait qui prouve la justesse de l'exposé précédent.

La courbure normale des fibres disposées de manière qu'elles forment un angle ϑ avec la direction du méridien est, selon *Euler*

$$\kappa_n(\vartheta) = -\frac{1}{\varrho} \cos^2 \vartheta - \frac{\cos \beta}{r} \sin^2 \vartheta.$$

D'après ce qui vient d'être exposé, cette direction est pour un réservoir sous pression eumorphe la ligne géodésique de la surface.

En posant

$$\kappa_g(\vartheta) = 0$$

l'intégration de la relation de *Liouville* donne en conséquence de la symétrie de révolution le théorème de *Clairaut*, c'est-à-dire :

$$r \sin \vartheta = r_0 \sin \vartheta_0$$

où r_0 et ϑ_0 sont des constantes d'intégration, considérées comme couple de valeurs se rapportant à un lieu fixe.

Pour simplifier les notations, nous introduisons quelques symboles nouvelles. Soient le rayon non-dimensionnel de la coque-membrane

$$R = \frac{r}{r_0}$$

la courbure «initiale» de la fibre

$$\Theta = \sin \vartheta_0.$$

En les utilisant on obtient

$$\sin \vartheta = \frac{\Theta}{R}$$

et

$$\cos \vartheta = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - \Theta^2}.$$

7. Les équations du réservoir sous pression eumorphe

D'après ce qui vient d'être dit dans le chapitre 4, il faut supposer que la structure est formée par plusieurs systèmes de fibres. La force extérieure, appliquée à l' $i^{\text{ème}}$ système est

$$q_{ni} = \frac{P_i}{n_i} 2r\pi \cos \vartheta_i$$

où p_i est la pression exercée sur l' $i^{\text{ème}}$ système et n_i est le nombre des fibres du système en question.

Dans l'équation de projection de direction normale de l'équilibre spatial on substitue l'expression de la courbure de la fibre, déduite au chapitre 6:

$$-S_i \left(\frac{1}{\varrho} \cos^2 \vartheta_i + \frac{\cos \beta}{r} \sin^2 \vartheta_i \right) + \frac{P_i}{n_i} 2r\pi \cos \vartheta_i = 0.$$

Après avoir ordonné l'équation, en tenant compte de tous les systèmes de fibres, on aura pour la courbure méridienne de la surface la relation

$$\frac{r_0}{\varrho} = - \frac{1}{\sum_i N_i \sqrt{R^2 - \Theta_i^2}} \left(\frac{\cos \beta}{R} \sum_i \frac{N_i \Theta_i^2}{\sqrt{R^2 - \Theta_i^2}} - \psi R^2 \right)$$

dans laquelle

$$N_i = \frac{n_i}{n}$$

est le nombre relatif des fibres dans chacun des systèmes et

$$\psi = 2\pi \frac{pr_0^2}{Sn}$$

est un paramètre de charge non-dimensionnel.

On reconnaît une relation analogue en se basant sur l'équilibre axial:

$$\sum_i n_i S_i \cos \vartheta_{0i} - r_0^2 \pi p = \sum_i n_i S_i \cos \vartheta_i \cos \beta - r^2 \pi p.$$

Après avoir ordonné l'équation, on obtient la formule

$$\cos \beta = \frac{R}{\sum_i N_i \sqrt{R^2 - \Theta_i^2}} \left[\sum_i N_i \cdot \sqrt{1 - \Theta_i^2} - \frac{\psi}{2} (1 - R^2) \right].$$

Seulement pour l'intérêt de la chose, nous présentons de nouveau que l'équilibre annulaire d'une fibre quelconque — c'est-à-dire pour une rotation autour de l'axe z —

$$S_i \sin \beta_i r = S_i \Theta r_0$$

après avoir réduit l'équation par la force de fibre, fournit le théorème de *Clairaut*.

En conclusion, le réservoir sous pression eumorphe peut être caractérisé par deux équations déterminaires. Parmi les grandeurs y figurant la pression p et la coordonnée relative R sont données. Les paramètres ψ (c'est-à-dire S_i), ainsi que N_i et Θ_i sont caractéristiques du système de fibres supposé, ρ et β sont des formes de surface choisies. La fixation de trois sur les cinq données énumérées permet donc théoriquement de calculer les deux autres.

8. L'étude d'un système de fibres en direction méridienne

La résolution du problème cité plus haut exige un appareil mathématique considérable, de manière que ce sont surtout des procédés numériques dont il pourrait être question. On ne doit tout de même pas exclure l'emploi des méthodes analytiques, comme nous le montrerons pour un cas spécial, celui d'un système de fibres de direction seulement méridienne.

Sous la condition $\Theta \equiv 0$ la première équation déterminaire est

$$\frac{r_0}{\rho} = \psi R.$$

La notion de la courbure figure également dans un autre domaine de la théorie de l'élasticité, notamment dans l'étude du flambage des supports:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Pr}{EJ}.$$

En introduisant

$$\psi = \frac{Pr_0^2}{EJ}$$

on reconnaît une analogie mathématique formelle entre les deux phénomènes. Par conséquent, le procédé de calcul des grands flambages, déduit par *Kirchhoff* et étudié dans les détails dans le livre de TIMOSHENKO, se prête bien à la solution de ce problème aussi. En utilisant l'analogie, la plus grande déviation latérale de la barre ou la moitié du diamètre du réservoir eumorphe sera

$$r_0 = \frac{s\lambda}{I_1(\lambda)}$$

où I_1 est l'intégrale elliptique de premier genre et

$$\lambda = \frac{\sqrt{\psi}}{2}$$

son argument.

De manière analogue, la longueur de flambage l ou l'espace interpolaire des fibres de direction méridienne du réservoir eumorphe sera

$$l = \frac{r_0}{\lambda} (2I_2 - I_1)$$

où I_2 désigne l'intégrale elliptique de second genre.

Ces relations caractérisent en même temps le fond mathématique du problème posé.

9. L'ouverture du réservoir

Enfin, il faut mentionner une propriété notable des réservoirs sous pression eumorphes, c'est que seulement une surface tubulaire peut satisfaire aux conditions initiales. Les fermetures inférieure et supérieure seront donc réalisées au moyen d'autres pièces de jonction.

C'est qu'il est évident, vu les équations déterminaires, que ϱ et β n'ont des solutions réelles qu'au cas, si $R > \Theta_i$. Excepté le cas de la disposition de la fibre en direction méridienne, il faut que $R \neq 0$. On peut déterminer la grandeur du rayon minimum de la deuxième équation déterminaire, en substituant $\cos \beta = 1$.

Résumé

L'étude essaye de traiter les matériaux renforcés à fibres d'une manière analogue aux systèmes porteurs. En se basant sur des rapports de géométrie différentielle, l'auteur introduit la notion de l'eumorphie et déduit dans ce cadre les équations déterminaires d'un réservoir sous pression à surface de révolution.

Bibliographie

1. Material Advisory Board — Structural Design with Fibrous Composites. DA-49-083—OSA-3131, Washington, 1968.
2. SEBŐK, F.: Faserverstärkung. Wiss. Mitteilungen d. Baubehörde, Hamburg, Nr. 26. 1976.
3. STRUIK, D. J.: Lectures on Classical Differential Geometry. Addison—Wesley, Cambridge, 1950.
4. SZABÓ J.—KOLLÁR L.: Függőtetők számítása. (Le calcul des toitures suspendues). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
5. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York, 1961.

Dr. Ferenc SEBŐK, collaborateur scientifique supérieur, H-1521, Budapest

