

# NETZAUSGLEICHUNG BEI INGENIEURGEODÄTISCHEN DEFORMATIONSMESSUNGEN

Von

Á. DETREKÓI

Geodätisches Institut, Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, TU Budapest

Eingegangen am 15. Juli 1976

Bei ingenieurgeodätischen Deformationsmessungen wird aus bestimmten Punkten der zu prüfenden Anlage und aus Festpunkten außerhalb der Anlage ein Netz herausgebildet, dessen geometrische Kennwerte bei verschiedenen Gelegenheiten gemessen werden. Auf die Deformation der Anlage wird aus den Differenzen der gemessenen und berechneten Netzelemente zwischen verschiedenen Messungen — d. h. aus den Differenzen der entsprechenden Werte — geschlossen.

Netze für ingenieurgeodätische Deformationsmessungen sind — hinsichtlich ihres Zweckes und der für die Berechnung des Netzes zur Verfügung stehenden Informationen — eigenartige Netze. Ihre Berechnung erfordert deshalb oft eine besondere Untersuchung, derartige Untersuchungen liegen in der Literatur vor, deren Zweck meistens die gemeinsame Berechnung bei zwei verschiedenen Messungen gewonnerer Werte ist [9], [10], [11].

Die Berechnung von Netzen für ingenieurgeodätische Deformationsmessungen wird im Beitrag unter Annahme einer beliebigen Anzahl von Messungen behandelt.

Als Ausgangsdaten für die Berechnung dienen die bei den Messungen 1, 2, . . . , s erhaltenen Meßwerte und andere, die Deformation betreffende Informationen. Letztere beruhen auf Ergebnissen aus anderen Fachgebieten und beinhalten in der Regel die Unbeweglichkeit einer Größe. Eine derartige Information ist z. B. bei der Messung eines Erdbebens, daß ein Punkt bereits auf unbeweglichem Gelände liegt.

Über die Meßwerte werden im weiteren zwei Annahmen gemacht:

a) Bei den einzelnen Messungen wird die untersuchte Anlage während der Meßdauer als unbeweglich betrachtet.

b) Die bei den Messungen 1, 2, . . . , s erhaltenen Größen  $n_1, n_2, \dots, n_s$  werden zusammen als eine Zufallsvariable von Normalverteilung mit der Dimension

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_s \quad (1)$$

betrachtet, deren Varianz-Kovarianzmatrix nichtsingulär ist.

Netze für ingenieurgeodätische Deformationsmessungen enthalten im allgemeinen soviel Punkte, daß sich die Messung in einigen Stunden durchführen läßt. Daher ist die erste Annahme bei nicht allzu raschen Deformationen stets begründet. Scheint diese Annahme nicht gerechtfertigt zu sein, so werden die bei verschiedenen Gelegenheiten erhaltenen Werte auf einen gemeinsamen Zeitpunkt je Messung bezogen. Durch diese Reduktion wird die Berechnung sowohl theoretisch als auch praktisch erschwert [5].

Die zweite — die Normalverteilung der Messungen betreffenden — Annahme ist bei der Bearbeitung von Deformationsmessungen deshalb zweckmäßig, da sich so auch die Verteilung der Rechengrößen leicht bestimmen läßt. Die Kenntnis letzterer ist im allgemeinen die Voraussetzung der weiteren statistischen Verarbeitung der erhaltenen Größen (zum Beispiel der Anwendung von Testen). Auf den Grund der Annahme über die Varianz-Kovarianzmatrix werden wir später noch zurückkommen.

Messungen und andere Informationen werden zweckdienlich durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bearbeitet. Die Anwendung verschiedener Näherungsverfahren ist seit der Einführung der Rechenanlagen nicht begründet, weil diese Näherungsverfahren die für eine weitere Analyse erforderlichen Genauigkeitsmaße in der Regel nicht gewährleisten.

Die Methode der kleinsten Quadrate kann in zwei grundsätzlichen Formen — nach der Methode der vermittelnden und bedingten Beobachtungen — angewandt werden. Theoretisch sind beide Wege gangbar. Unter Berücksichtigung der Eignung für rechentechnische Verarbeitung der erforderlichen Kenntnis der Koordinaten der Punkte und auch der weiteren statistischen Bearbeitung ist es begründeter, die Methode der vermittelnden Beobachtungen heranzuziehen. In Anbetracht anderer Informationen über die Deformation müssen die Berechnungen oft nach jener Art der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ausgeführt werden, wo auch zwischen der zu bestimmenden Unbekannten Bedingungen bestehen.

Die Gleichung von vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen oder ohne Bedingungsgleichungen ist ein altbekanntes Verfahren. Auf deren Einzelheiten wird hier nicht eingegangen, nur die aus der Deformationsmessung herrührenden Merkmale sollen behandelt werden. Bei unseren Untersuchungen möchten wir vor allem zwei für die Praxis wichtige Fragen beantworten.

a) Wann ist es begründet, die zu den einzelnen Messungen gehörenden Meßwerte getrennt auszugleichen, und wann ist es notwendig, die zu mehreren Messungen gehörenden Werte zusammen auszugleichen?

b) Aus den Differenzen zwischen zu verschiedenen Meßzeitpunkten gehörenden Werten welcher Größen kann eindeutig auf eine Deformation geschlossen werden?

Betrachten wir nun den Ausgleichungsverlauf unter besonderer Berücksichtigung

sichtigung der Faktoren, die in der Beantwortung der beiden Fragen eine Rolle spielen können.

Es seien die Meßwerte aus den Messungen 1, 2, . . . , s die Vektoren mit den Dimensionen  $n_1, n_2, \dots, n_s$ :

$$\begin{aligned} L_1^* &= (L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1n_1}) \\ L_2^* &= (L_{21}, L_{22}, \dots, L_{2n_2}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ L_s^* &= (L_{s1}, L_{s2}, \dots, L_{sn_s}) . \end{aligned} \tag{2}$$

In den Vektorelementen  $L_{ij}$  bedeutet der erstere Index die Ordnungszahl der Messung, der zweite jene der gemessenen Größe.

Sämtliche Meßwerte zusammen enthalten den aus den Vektoren  $L_1, L_2, \dots, L_s$  gebildeten Vektor der Dimension  $n \times 1$

$$L^* = (L_1^*, L_2^*, \dots, L_s^*) . \tag{3}$$

Eines der Ziele der Ausgleichung ist die Bestimmung der Verbesserung der Meßwerte. Die zu den einzelnen Messungen gehörenden Verbesserungen sind mit den entsprechenden Indizes versehen in folgenden Vektoren enthalten:

$$\begin{aligned} v_1^* &= (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n_1}) \\ v_2^* &= (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n_2}) \\ &\cdot \cdot \cdot \\ v_s^* &= (v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sn_s}) . \end{aligned} \tag{4}$$

Zu dem Meßwertvektor  $L$  in dem Zusammenhang (3) gehört der folgende Verbesserungsvektor:

$$v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_s^*) . \tag{5}$$

Für die Ausgleichung muß noch vor deren Beginn die Gewichtsmatrix der Meßwerte bekannt sein. Es ist üblich, die Gewichtsmatrix als das Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix der Messungen oder eine diesem proportionale Größe zu definieren [17]. Von den Messungen wurde angenommen, daß sie von  $n$ -dimensionaler Normalverteilung sind. Daraus folgt, daß ihre Varianz-Kovarianzmatrix eine symmetrische Matrix der Dimension  $n \times n$  ist. Zerlegen wir diese Matrix  $\Sigma$  so in Submatrizen, daß die Submatrizen in der Hauptdiagonalen die zu den einzelnen Messungen gehörenden Varianz-Kovarianz-

matrizen der Dimension  $n_1 \times n_1, n_2 \times n_2, \dots, n_s \times n_s$  seien:

$$\Sigma_{(n, n)} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \dots & \Sigma_{1s} \\ (n_1, n_1) & (n_1, n_2) & & (n_1, n_s) \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \dots & \Sigma_{2s} \\ (n_2, n_1) & (n_2, n_2) & & (n_2, n_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{s1} & \Sigma_{s2} & \dots & \Sigma_{ss} \\ (n_s, n_1) & (n_s, n_2) & & (n_s, n_s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

In dieser Zerlegung enthalten die Submatrizen außerhalb der Hauptdiagonalen die Kovarianzen der zu den verschiedenen Messungen gehörenden Werte.

Die Submatrix  $\Sigma_{22}$ , zum Beispiel, ist also die Varianz-Kovarianzmatrix der Werte im Vektor  $L_2$ :

$$\Sigma_{(n_2, n_2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{22.11} & \sigma_{22.12} & \dots & \sigma_{22.1n_2} \\ \sigma_{22.12} & \sigma_{22.22} & \dots & \sigma_{22.2n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{22.1n_2} & \sigma_{22.2n_2} & \dots & \sigma_{22.n_2n_2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

wo die Elemente  $\sigma_{22.ii}$  die Varianzen,  
die Elemente  $\sigma_{22.ij}$  die Kovarianzen  
sind.

Das heißt, daß z. B. die Submatrix  $\Sigma_{1s}$  die zu den Vektoren  $L_1$  und  $L_s$  gehörenden Kovarianzen enthält:

$$\Sigma_{(n_1, n_s)} = \begin{bmatrix} \sigma_{1s.11} & \sigma_{1s.12} & \dots & \sigma_{1s.1n_s} \\ \sigma_{1s.21} & \sigma_{1s.22} & \dots & \sigma_{1s.2n_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1s.n_11} & \sigma_{1s.n_12} & \dots & \sigma_{1s.n_1n_s} \end{bmatrix} \quad (8)$$

wo die Elemente  $\sigma_{1s.ii}$  die Kovarianzen derselben Größen zwischen der 1. und s-ten Messung, die Elemente  $\sigma_{1s.ij}$  die Kovarianzen verschiedener Größen zwischen der 1. und s-ten Messungen bedeuten.

Sind die bei verschiedenen Gelegenheiten unternommenen Messungen voneinander unabhängig, werden in der Matrix  $\Sigma$  die Submatrizen  $\Sigma_{ij}$  Nullmatrizen, und daher die Matrix  $\Sigma$  eine Bandmatrix sein:

$$\Sigma_{(n, n)} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (n_1, n_1) & & & \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ & (n_2, n_2) & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Sigma_{ss} \\ & & & (n_s, n_s) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Die für die Ausgleichung benutzte Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  ist das Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix  $\mathbf{\Sigma}$  oder diesem proportional (der Einfachheit halber wird im weiteren der Proportionalitätsfaktor als Einheit betrachtet).

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Sigma}^{-1} \tag{10}$$

$$\begin{matrix} & (n_1, n_1) & & (n_1, n_2) \\ (n, n) & & & \end{matrix}$$

Die hier angeschriebene Form der Gewichtsmatrix setzt voraus, daß die Varianz-Kovarianzmatrix nichtsingulär ist. Diese Hypothese wurde im vorigen bereits angenommen. Auch wenn diese Annahme nicht gilt, kann die Aufgabe unter Anwendung eines verallgemeinerten Inversen der Varianz-Kovarianzmatrix gelöst werden [8, 12, 13].

Ähnlich wie die Matrix  $\mathbf{\Sigma}$ , läßt sich auch die Matrix  $\mathbf{P}$  in zu den einzelnen Messungen gehörende Submatrizen zerlegen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{P}_{1s} \\ (n_1, n_1) & (n_1, n_2) & & (n_1, n_s) \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{2s} \\ (n_2, n_1) & (n_2, n_2) & & (n_2, n_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{s1} & \mathbf{P}_{s2} & \dots & \mathbf{P}_{ss} \\ (n_s, n_1) & (n_s, n_2) & & (n_s, n_s) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Sind die bei verschiedenen Gelegenheiten durchgeführten Messungen voneinander unabhängig, wird die Matrix  $\mathbf{P}$ , ähnlich wie die Matrix  $\mathbf{\Sigma}$ , eine Bandmatrix sein, und auch der Zusammenhang zwischen den Submatrizen der Hauptdiagonalen ist bekannt:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{\Sigma}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (n_1, n_1) & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ & (n_2, n_2) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{P}_{ss} \\ & & (n_s, n_s) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (n_1, n_1) & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ & (n_2, n_2) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Sigma}_{ss}^{-1} \\ & & (n_s, n_s) & \end{bmatrix} \tag{12}$$

Zweck der Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen ist neben der Verbesserung der Meßergebnisse die Bestimmung gewisser unbekannter Parameter. Wird die Ausgleichung nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen für die Verarbeitung von Deformationsmessungen benutzt, können als unbekannte Parameter die zu verschiedenen Meßzeitpunkten gehörenden, unbekannt Koordinaten der Netzpunkte betrachtet werden.

Werden im Netz auch Richtungsmessungen unternommen, sind auch die Orientierungsunbekannten unbekannt, diese sollen jedoch im weiteren



der notwendigen Reihenentwicklung die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können. Sind im Deformationsmessungsnetz Punkte vorhanden, die als unveränderlich betrachtet werden dürfen, ist es zweckmäßig, die Näherungswerte aus den Koordinaten dieser Punkte zu berechnen. Sind keine solchen Punkte vorhanden, können die Näherungskordinaten aus einem beliebigen Punkt ausgehend berechnet werden. Für die bessere Vergleichbarkeit der verschiedenen Größen, empfiehlt es sich in diesem Falle immer aus denselben Punkten auszugehen.

Bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen werden die ausgeglichenen Meßwerte und die zu bestimmenden Unbekannten — im vorliegenden Falle die Koordinaten — durch das Anschreiben der Verbesserungsgleichungen nichtlinearer Form miteinander in Beziehung gesetzt. Die Art der Verbesserungsgleichungen hängt von dem benutzten Meßverfahren ab. Für die am häufigsten vorkommenden Richtungs- und Längenmessungen, Nivellements, trigonometrischen Höhenmessungen liegen die Verbesserungsgleichungen nichtlinearer Form im Fachschrifttum vor (z. B. [1], [4], [16]).

Werden die Verbesserungsgleichungen nichtlinearer Form bei den Näherungswerten der Unbekannten — im gegebenen Falle der Näherungskordinaten — entwickelt und geordnet, gelangt man zu Verbesserungsgleichungen linearisierter Form. Betrachten wir die zu einem bei der *i*-ten Messung erhaltenen Meßwert  $L_{ij}$  gehörende Verbesserungsgleichung nichtlinearer Form:

$$L_{ij} + v_{ij} = f_{ij}(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1k_1}, \dots, X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik_j}, \dots, X_{s1}, X_{s2}, \dots, X_{sks}). \quad (19)$$

Bei deren Reihenentwicklung im Näherungspunkt der Koordinaten werden nur ihre partiellen Ableitungen nach den zu der *i*-ten Messung gehörenden Koordinaten nicht gleich Null sein. Die entsprechende Verbesserungsgleichung in linearisierter Form lautet also:

$$v_{ij} = 0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + \dots + 0 \cdot x_{1k_1} + \dots + a_{ij,i1}x_{i1} + a_{ij,i2}x_{i2} + \dots + a_{ij,ik_i}x_{ik_i} + \dots + 0 \cdot x_{s1} + 0 \cdot x_{s2} + \dots + 0 \cdot x_{sks} + t_{ij} \quad (20)$$

wo  $a_{ij,i1}$   $a_{ij,i2}$   $\dots$   $a_{ij,ik_i}$  die partiellen Ableitungen bedeuten, die nicht gleich Null sein können, und  $t_{ij}$  das sog. Absolutglied ist.

In den Indizes der partiellen Ableitungen weisen die ersten zwei Ziffern auf die Messung, die nächsten zwei Ziffern auf die Unbekannte hin.

Die zu sämtlichen Messungen gehörende Verbesserungsgleichung linearisierter Form lautet:

$$v = \mathbf{A} \begin{matrix} x \\ (n, 1) \end{matrix} + t \begin{matrix} (n, k) & (k, 1) & (n, 1) \end{matrix} \quad (21)$$

wo  $v$  die Verbesserungen in Gl. (5),  
 $x$  die in Formel (17) eingeführten Änderungen,  
 $t$  den konstanten Vektor bedeuten, und  
 $A$  die die partiellen Ableitungen enthaltende Matrix ist.

Von der Struktur der Matrix  $A$  weiß man aus Gl. (20), daß sie nur bei zu den gleichen Messungen gehörenden Meßergebnissen und Koordinatenänderungen Nichtnullwerte enthalten kann. Daher ist es zweckmäßig, die Matrix  $A$  von vornherein so zu zerlegen, daß sich die Submatrizen von Nullmatrixentyp trennen.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ (n_1, k_1) & & & \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ & (n_2, k_2) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ss} \\ & & & (n_s, k_s) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Von den Submatrizen in der Hauptdiagonalen hat, zum Beispiel,  $A_{22}$  folgenden Aufbau:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{21,21} & a_{21,22} & \dots & a_{21,2k_2} \\ a_{22,21} & a_{22,22} & \dots & a_{22,2k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n_2,21} & a_{2n_2,22} & \dots & a_{2n_2,2k_2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

wo  $a_{2j,2i}$  die partielle Ableitung der Verbesserungsgleichung  $2j$  nach der Unbekannten  $2_i$  ist.

Untersuchen wir nun die die Deformation betreffenden, jedoch nicht auf Messung beruhenden Informationen. Diese deuten im allgemeinen auf die Unbeweglichkeit einer Größe zwischen zwei Messungen hin.

Informationen über die Unbeweglichkeit werden bei praktischen Aufgaben zweifach berücksichtigt:

- a) indem man die Koordinaten eines Punktes als angegeben betrachtet,
- b) mit Hilfe von Bedingungsgleichungen.

Die erste Methode wird benutzt, wenn in das Deformationsmessungsnetz auch als unbeweglich betrachtete Punkte anderer Netze (Landes-, Stadt- oder Industriegebietsvermessungsnetze) einbezogen werden. In solchen Fällen werden diese Punkte während der ganzen Untersuchung als bekannt betrachtet. Die Informationen über die Unbeweglichkeit werden dann beim Anschreiben der Verbesserungsgleichungen nichtlinearer Form berücksichtigt, und diese Informationen zeichnen sich letzten Endes in der Matrix  $A$  und im Vektor  $t$  ab. Ein solches Verfahren hat den Nachteil, daß die Rahmenfehler der benutzten Punkte auch auf das Deformationsmessungsnetz übertragen werden.

Bedingungsgleichungen werden aufgeschrieben, wenn bei dem Anlegen



des Netzes keine Punkte mit in anderer Weise bestimmten, bekannten Koordinaten verwendet werden können. Die Information über die Unbeweglichkeit wird dann durch eine Bedingungsgleichung

$$c_{ij,h}(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik_i}, \dots, X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jk_j}, \dots, X_{s1}, X_{s2}, \dots, X_{sk_s}) = 0 \quad (24)$$

ausgedrückt. In den Indizes weisen  $i$  und  $j$  auf die Messungen und  $h$  auf die Ordnungszahl der Informationen hin.  $ij \cdot h$  bedeutet also die  $h$ -te Information der  $i$ -ten und  $j$ -ten Messung. Bei der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen sind sämtliche Bedingungsgleichungen unter Anwendung der Unbekannten auszudrücken. Bei der Ausgleichung von Deformationsmessungen kann also die Unveränderlichkeit der Meßgrößen (Längen, Winkel, Höhendifferenzen) auch lediglich unter Anwendung von Koordinaten aufgeschrieben werden.

Für die Ausgleichung müssen die Bedingungsgleichungen — wie die Verbesserungsgleichungen nichtlinearer Form — bei den Näherungswerten der Unbekannten durch Reihenentwicklung linearisiert werden. Es ist leicht einzusehen, daß nur die partiellen Ableitungen nach den zu der  $i$ -ten und  $j$ -ten Messung gehörenden Unbekannten der eine Information zwischen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Messung ausdrückenden Bedingungsgleichung ungleich Null sein können. Entwickelt man, zum Beispiel, die Bedingungsgleichung (24), erhält man

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + \dots + 0 \cdot x_{1k_1} + \dots + c_{ij,1h} \cdot x_{i1} + \\ + c_{ij,2h} x_{i2} + \dots + c_{ij,k_ih} \cdot x_{ik_i} + \dots + c_{ji,1h} x_{j1} + \\ + c_{ji,2h} x_{j2} + \dots + c_{ji,k_jh} x_{jh} + \dots + 0 \cdot x_{s1} + 0 \cdot x_{s2} + \\ + \dots + 0 \cdot x_{sk_s} + w_{ij,h} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

wo  $c_{ij,gh}$  und  $c_{ji,gh}$  die partiellen Ableitungen bedeuten.

In den Indizes der partiellen Ableitungen weisen die ersten zwei Buchstaben auf die Messung, der dritte auf die Ordnungszahl der Koordinate, der vierte auf die Ordnungszahl der Information hin.

Betrifft die Information die Unbeweglichkeit eines Punktes, nehmen die Bedingungsgleichungen eine sehr einfache Form an. Darf, zum Beispiel, zwischen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Messung ein Punkt als unbeweglich betrachtet werden, läßt sich für alle Koordinaten desselben die Bedingungsgleichung folgender Art anschreiben:

$$X_{ig} - X_{jg} = 0. \quad (26)$$

Unter Anwendung der Näherungswerte — und in der Annahme, daß die Bedingungsgleichung auf der  $h$ -ten Information zwischen zwei Messungen

füßt — erhält man

$$x_{ig} - x_{jg} + X_{ig0} - X_{jg0} = 0. \quad (27)$$

Daraus ist zu erkennen, daß im vorliegenden Falle

$$c_{ij,gh} = +1; c_{ji,gh} = -1 \quad (28)$$

$$w_{ij,h} = X_{ig0} - X_{jg0}.$$

Beim Aufschreiben der Bedingungsgleichungen müssen nur die voneinander unabhängigen Informationen berücksichtigt werden. Ist z. B. eine Größe bei der  $i$ -ten,  $(i+1)$ -ten,  $(i+2)$ -ten Messung unverändert, genügt es zwischen der  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten sowie zwischen der  $i$ -ten und  $(i+2)$ -ten Messung die Bedingungsgleichungen anzuschreiben, während sich das Anschreiben zwischen der  $(i+1)$ -ten und  $(i+2)$ -ten Messung erübrigt.

Es sei die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen zwischen den einzelnen Messungen

$$\begin{aligned} e_{12} = e_{21}, \quad e_{13} = e_{31}, \quad \dots \quad e_{1s} = e_{s1} \\ e_{23} = e_{32}, \quad \dots \quad e_{2s} = e_{s2} \\ e_{s-1,s} = e_{s,s-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Die partiellen Ableitungen der Arten  $c_{ij,gh}$  und  $c_{ji,gh}$  in den Bedingungsgleichungen in Submatrizen mit gleichen Ordinalzahlen wie die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen gefaßt, werden die in den Bedingungsgleichungen vorkommenden partiellen Ableitungen zusammen in folgender Matrix geschrieben:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_{1s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{s1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{2s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{s2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{s-1,s} & \mathbf{C}_{s,s-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

wo  $e = e_{12} + e_{13} + \dots + e_{1s} + e_{23} + \dots + e_{2s} + \dots + e_{s-1,s}$  und zum Beispiel:

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} C_{13.11} & C_{13.21} & \dots & C_{13.k,1} \\ C_{13.12} & C_{13.22} & \dots & C_{13.k,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{13.1e_{1s}} & C_{13.2e_{1s}} & \dots & C_{13.k,e_{1s}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$C_{31}^{e_{13},k_2} = \begin{bmatrix} C_{31,11} & C_{31,21} & \dots & C_{31,k_3,1} \\ C_{31,12} & C_{31,22} & \dots & C_{31,k_3,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{31,1e_{13}} & C_{31,2e_{13}} & \dots & C_{31,k_{313}e} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Bei dem Lösen praktischer Aufgaben werden aus Gründen der Zweckmäßigkeit die Bedingungsgleichungen entweder immer auf die allererste Messung oder immer auf die unmittelbar vorangehende Messung bezogen angeschrieben. Dementsprechend hat die Matrix C meistens eine der beiden Formen:

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{12} & C_{21} & 0 & \dots & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{31} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1s} & 0 & 0 & \dots & C_{s1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

bzw.

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & C_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & C_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{s-1,s'} & C_{s,s-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

wo die einzelnen Submatrizen ähnlich wie die Submatrizen in (30) aufgebaut sind.

Im Falle der Koeffizientenmatrizen C, C<sub>1</sub> und C<sub>2</sub> enthalten die Vektoren

$$w^* = (w_{12}^*, w_{13}^*, \dots, w_{1s}^*, w_{23}^*, \dots, w_{2s}^*, \dots, w_{s-1,s}^*)^* \quad (35)$$

$$w_1^* = (w_{12}^*, w_{13}^*, \dots, w_{1s}^*) \quad (36)$$

$$w_2^* = (w_{12}^*, w_{23}^*, \dots, w_{s-1,s}^*) \quad (37)$$

die Absolutglieder der Bedingungsgleichungen.

In Kenntnis der Gewichtsmatrix, der linearisierten Verbesserungsgleichungen und der u. U. zur Verfügung stehenden Bedingungsgleichungen können die Normalgleichungen für die Berechnung der Unbekannten angeschrieben werden. Nach den Informationen über die Deformationen und die Art von deren Berücksichtigung unterscheidet man drei grundlegende Fälle hinsichtlich der Normalgleichungen:

a) Es steht über die Deformation keine Information nichtgeodätischer Art zur Verfügung.

b) Die Information über die Deformation wird unter Anwendung von Punkten mit bekannten Koordinaten berücksichtigt.

c) Die Information über die Deformation wird mit Hilfe von Bedingungsgleichungen berücksichtigt.

Im Falle a) sind die Unbekannten in der Ausgleichung die zu verschiedenen Messungen gehörenden Koordinaten jedes Punktes des Netzes. Die Normalgleichung hat dann die Form:

$$\underset{(k, k)}{(\mathbf{A}^* \mathbf{P} \mathbf{A})} x + \underset{(k, 1)}{(\mathbf{A}^* \mathbf{P} \mathbf{t})} = \mathbf{0} . \quad (38)$$

Um den Aufbau der Normalgleichung zu studieren, schreiben wir unter Anwendung der Submatrizen der in den Zusammenhängen (11) bzw. (22) zerlegten Matrizen  $\mathbf{P}$  bzw.  $\mathbf{A}$  die Koeffizientenmatrix der Unbekannten auf:

$$\underset{(k, k)}{\mathbf{N}} = \underset{(k, k)}{\mathbf{A}^* \mathbf{P} \mathbf{A}} \quad (39)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \underset{(k_1, k_1)}{\mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{11} \mathbf{A}_{11}} & \underset{(k_1, k_2)}{\mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{12} \mathbf{A}_{22}} & \dots & \underset{(k_1, k_s)}{\mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{1s} \mathbf{A}_{ss}} \\ \underset{(k_2, k_1)}{\mathbf{A}_{22}^* \mathbf{P}_{21} \mathbf{A}_{11}} & \underset{(k_2, k_2)}{\mathbf{A}_{22}^* \mathbf{P}_{22} \mathbf{A}_{22}} & \dots & \underset{(k_2, k_s)}{\mathbf{A}_{22}^* \mathbf{P}_{2s} \mathbf{A}_{ss}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{(k_s, k_1)}{\mathbf{A}_{ss}^* \mathbf{P}_{s1} \mathbf{A}_{11}} & \underset{(k_s, k_2)}{\mathbf{A}_{ss}^* \mathbf{P}_{s2} \mathbf{A}_{22}} & \dots & \underset{(k_s, k_s)}{\mathbf{A}_{ss}^* \mathbf{P}_{ss} \mathbf{A}_{ss}} \end{bmatrix} \quad (40)$$

In ähnlicher Weise läßt sich auch der konstante Vektor anschreiben:

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^* \mathbf{P} \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{11} t_1 + \mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{12} t_2 + \dots + \mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{1s} t_s \\ \mathbf{A}_{22}^* \mathbf{P}_{21} t_1 + \mathbf{A}_{22}^* \mathbf{P}_{22} t_2 + \dots + \mathbf{A}_{22}^* \mathbf{P}_{2s} t_s \\ \dots \\ \mathbf{A}_{ss}^* \mathbf{P}_{s1} t_1 + \mathbf{A}_{ss}^* \mathbf{P}_{s2} t_2 + \dots + \mathbf{A}_{ss}^* \mathbf{P}_{ss} t_s \end{bmatrix} \quad (41)$$

wo  $t_1, t_2, \dots, t_s$  die zu den einzelnen Messungen gehörenden Submatrizen des Vektors  $t$  bedeuten.

In Kenntnis der Struktur der Normalgleichung kann die eine in dieser Arbeit gestellte Frage beantwortet werden, nämlich jene: Wann können die bei verschiedenen Gelegenheiten unternommenen Messungen getrennt ausgleichbar werden?

Bei der eben untersuchten Art von Normalgleichungen besteht die hinreichende und notwendige Bedingung der getrennten Verarbeitung der bei verschiedenen Gelegenheiten durchgeführten Messungen in der gegenseitigen Unabhängigkeit dieser Messungen.

In diesem Falle kann nämlich — da alle  $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{0}$  — die Normalgleichung (38) in  $s$  selbständige Normalgleichungen vom Typ

$$\underset{(k_i, k_i)}{(\mathbf{A}_{ii}^* \mathbf{P}_{ii} \mathbf{A})} x_i + \underset{(k_i, 1)}{\mathbf{A}_{ii}^* \mathbf{P}_{ii}} t_i = \mathbf{0} \quad (42)$$

zerlegt werden.

Die andere Frage betrifft die aus der Ausgleichung erhaltenen eindeutigen Größen. Da in dem jetzt behandelten Falle gar keine Information über

die Deformation zur Verfügung steht, können die Koordinaten der einzelnen Punkte beliebig verschoben, verdreht werden. In dieser Hinsicht darf das Netz als sog. freies Netz betrachtet werden. Das kommt mathematisch darin zum Ausdruck, daß die Matrix  $N$  singulär sein wird.

Der Grad der Singularität läßt sich im Rangabfall [14], [15] erkennen:

$$d(N) = k(N) - r(N) . \quad (43)$$

Hierin bedeuten

$d(N)$  den Rangabfall,

$r(N)$  den Rang,

$k(N)$  das Format.

Bei der Ausgleichung eines freien Netzes ist der Rangabfall von dem Charakter des Netzes abhängig und stimmt mit dem Freiheitsgrad des Netzes überein. Im Falle von Nivellementsnetzen ist, zum Beispiel,  $d = 1$ , bei Trilaterationsnetzen  $d = 3$ .

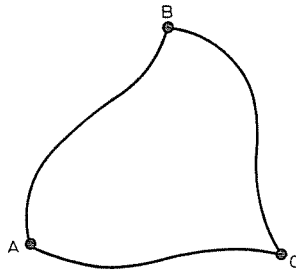
Der Rangabfall  $d(N)$  von Deformationsmessungsnetzen wird durch die Tatsache beeinflusst, daß die zu verschiedenen Messungen gehörenden Werte auch im Vergleich zueinander verschoben werden können, und damit der Rangabfall größer als der für freie Netze kennzeichnende Rangabfall sein kann.

Um den Rangabfall der Matrix  $N$  zu ermitteln, sind weitere Untersuchungen erforderlich, die nach numerischen Methoden oder anhand theoretischer Erwägungen durchgeführt werden.

Von den numerischen Methoden kann jedes für die Feststellung des Ranges ausgearbeitete Verfahren in Frage kommen. Von diesen sind in den Programmibliotheken der Rechenanlagen die meisten auf der Bestimmung der Anzahl der von Null unterschiedlichen Eigenwerte oder auf der Herstellung des minimalen Dyadischen beruhenden Programme zu finden. Die Anwendung soll an einem einfachen Beispiel dargestellt werden.

**Beispiel 1:**

Die Höhendifferenzen der Punkte A, B und C wurden durch Nivellement bei  $s = 3$  Gelegenheiten gemessen. Die zu verschiedenen Gelegenheiten gehörenden Messungen dürfen als voneinander unabhängig und von gleichem Gewicht



betrachtet werden. Aufgrund der Verbesserungsgleichungen linearisierter Form der Art

$$v_{il} = x_{iA} - x_{iB} + t_{il}$$

wird in der Normalgleichung die Koeffizientenmatrix  $N$  der Unbekannten wie folgt lauten:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Durch Bestimmung des Ranges der Matrix  $N$  nach einer numerischen Methode erhält man den Wert  $r(N) = 6$ . Das Format der Matrix ist  $k(N) = 9$ . Der Rangabfall ergibt sich also zu:

$$d(N) = k(N) - r(N) = 3 .$$

Das bedeutet, daß der Rangabfall des geprüften Deformationsmessungsnetzes das Dreifache des Rangabfalls anderer Nivellementsnetze beträgt.

Sind die zu verschiedenen Gelegenheiten gehörende Messungen voneinander unabhängig, wird der Rangabfall der zu dem Netz gehörenden Matrix  $N$  anhand von aus der linearen Algebra bekannten Zusammenhängen als die Summe der Rangabfälle der einzelnen Submatrizen  $A_{ii}^*$ ,  $P_{ii}$ ,  $A_{ii}$  hergestellt, d. h.

$$d = d_1 + d_2 + \dots + d_i + \dots + d_s .$$

In der Annahme von Netzen gleichen Typs ist

$$d = s \cdot d_i \tag{44}$$

wo  $d_i$  den Rangabfall bei den einzelnen Messungen

$s$  die Zahl der Messungen bedeuten.

Aus der Singularität der Matrix  $N$  folgt, daß Gl. (38) nach den traditionellen Verfahren nicht aufgelöst werden kann. Die Lösung von Aufgaben mit einer Normalgleichung mit singulärem Koeffizienten ist eine der am häufigsten behandelten Aufgaben in der Literatur der Ausgleichung [1, 2, 3, 5, 8, 11,

17]. Von den Lösungsmöglichkeiten wählen wir im Interesse der weiteren statistischen Verarbeitung der Ergebnisse die Lösung anhand von sog. verallgemeinerten Inversen.

Unter Anwendung der verallgemeinerten Inversen läßt sich die Lösung der Normalgleichung (38) in folgender Form schreiben:

$$x = -(A^*PA)^{-1} A^*Pt = -N^{-1}n \quad (45)$$

wo  $N^{-1}$  eine beliebige Matrix sein kann, die die Bedingung

$$NN^{-1}N = N \quad (46)$$

erfüllt [2, 3, 6, 12, 13, 14].

Von den möglichen verallgemeinerten Inversen  $N^{-1}$  ist es zweckmäßig, für geodätische Zwecke ein eindeutiges Inverse, das sog. Pseudoinverse, unter anderem Namen das Moore-Penrose-Inverse zu wählen. Dann lautet die Auflösung der Normalgleichung:

$$x = -N^+n \quad (47)$$

wo  $N^+$  das Pseudoinverse bedeutet.

Neben der Bedingung in (46) muß das Pseudoinverse  $N^+$  noch folgende Bedingungen erfüllen [14]:

$$N^+NN^+ = N^+ \quad (48)$$

$$(NN^+)^* = NN^+ \quad (49)$$

$$(N^+N)^* = N^+N. \quad (50)$$

Für die numerische Herstellung des Pseudoinversen sind mehrere Verfahren bekannt. Die dazu bestimmten Programme sind in der Regel in Rechenzentren für geodätische Zwecke vorhanden. Irgendein auf Rangfaktorisieren beruhendes Verfahren läßt sich, zum Beispiel, gut anwenden:

$$N = FG. \quad (51)$$

Danach gilt

$$N^+ = F^*(FF^*)^{-1} (G^*G)^{-1} G^* \quad (52)$$

d. h. die Herstellung des Pseudoinversen läßt sich auf die Herstellung der Inversen von nichtsingulären Matrizen zurückführen [2, 8].

Die Lösung mit Hilfe des Pseudoinversen  $N^+$  gewährleistet, daß die als Grundlage für die Methode der kleinsten Quadrate dienende Bedingung

$$v^*Pv = \min \quad (53)$$

erfüllt ist. Außerdem ist noch für diese Lösung die Erfüllung der Bedingung

$$x^*x = \min \quad (54)$$

kennzeichnend. Das bedeutet, daß die Quadratsumme der Änderungen minimal ist.

Hat man also die Näherungswerte angenommen, liefert das Pseudoinverse eine eindeutige Lösung. Da jedoch — in Ermangelung von Informationen über die Deformation — die Näherungswerte willkürlich angenommen werden, sind die aus der Ausgleichung erhaltenen Koordinaten nicht eindeutig. Auch die zu verschiedenen Messungen gehörenden Differenzen derselben Koordinaten sind nicht eindeutig. Daher können lediglich — nach Gl. (53) — die ausgeglichenen Meßwerte als eindeutig betrachtet werden.

Bei dem jetzt untersuchten Normalgleichungstyp steht keine nicht-geodätische Information über die Deformation zur Verfügung; in solchen Fällen kann nur aus den Differenzen der ausgeglichenen Werte der in verschiedenen Zeitpunkten gemessenen Größen auf die Deformation geschlossen werden.

Bei der Anwendung des Pseudoinversen ist die Kofaktorenmatrix der Unbekannten das Pseudoinverse selbst:

$$Q_{(x)} = N^+ . \quad (55)$$

Der Kofaktor unterscheidet sich von bei verschiedenen anderen verallgemeinerten Inversen bestimmten Kofaktoren durch die Eigenschaft

$$\text{spur } Q_{(x)} = \min. \quad (56)$$

Das bedeutet, daß die Summe der Varianzen der Unbekannten minimal ist. Angenommen, daß nur die Koordinaten unbekannt sind, kommt man unter Anwendung des Pseudoinversen zu einer Lösung, bei der die innere Genauigkeit des Netzes optimal ist [3].

b) Wird die Information über die Deformation anhand von Punkten mit bekannten Koordinaten berücksichtigt, werden bei der Ausgleichung die Koordinaten der anderen Punkte die Unbekannten sein. Die Form der Normalgleichung stimmt mit der Form in (38) überein.

Daraus folgt, daß die hinreichende und notwendige Bedingung einer getrennten Verarbeitung der bei verschiedenen Gelegenheiten erhaltenen Meßwerte darin besteht, daß die bei verschiedenen Gelegenheiten durchgeführten Messungen voneinander unabhängig sein müssen.

Verfügt man über wenigstens eine gleiche Zahl der bekannten Koordinaten wie das Netz Freiheitsgrade hat, wird in der Normalgleichung die Koeffizientenmatrix der Unbekannten nichtsingulär sein. Daraus folgt, daß man die



Unbekannten formal unter Anwendung des gewöhnlichen Inversen erhält:

$$x = -(A^*PA)^{-1} A^*Pt. \tag{57}$$

In diesem Falle sind neben den ausgeglichenen Beobachtungen auch die ausgeglichenen Koordinaten eindeutig. Auf die Deformation kann also sowohl aus den Differenzen der bei verschiedenen Gelegenheiten erhaltenen, ausgeglichenen Beobachtungen als auch aus den Differenzen der bei verschiedenen Gelegenheiten ermittelten Koordinaten geschlossen werden.

Die Kofaktorenmatrix der aus der Ausgleichung erhaltenen Unbekannten lautet:

$$Q(x) = (A^*PA)^{-1}. \tag{58}$$

c) In dem zuletzt behandelten Fall sind im Netz keine Punkte mit bekannten Koordinaten vorhanden, jedoch ist man im Besitz von Informationen über die Deformation. Diese Informationen — die sich im allgemeinen auf die Unbeweglichkeit von Netzpunkten mit einstweilen unbekanntem Koordinaten beziehen —, werden durch die früher erörterten Bedingungsgleichungen berücksichtigt.

Die Normalgleichung enthält entsprechend der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen zwei Arten von Unbekannten: die Änderungen der unbekanntem Koordinaten und eine der Anzahl der Bedingungsgleichungen entsprechende Zahl der Korrelaten.

Die Normalgleichung läßt sich in der Form

$$\begin{bmatrix} A^*PA & C^* \\ (k, k) & (k, e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ (k, 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^*Pt \\ (k, 1) \\ C & O \\ (e, k) & (e, e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ (e, 1) \end{bmatrix} = Q \begin{matrix} (k, 1) \\ (k+e, 1) \end{matrix} \tag{59}$$

anschreiben, wo

- $A^*PA$  mit der in Gl. (39) bestimmten Matrix  $N$  übereinstimmt,
- $C$  die in Gl. (30) definierte Matrix,
- $x$  den Vektor der in (17) eingeführten unbekanntem Änderungen,
- $A^*Pt$  den in Gl. (38),
- $w$  den in Gl. (35) angeschriebene konstanten Vektor,
- $u$  den Vektor der unbekanntem Korrelaten

bedeuten.

Es ist zweckmäßig, den letzteren — ähnlich wie im Falle der Matrix  $C$  im Zusammenhang (30) in Teile der Dimensionen  $e_{12}, e_{13}, \dots, e_{13}, e_{23}, \dots, e_{2s}, \dots, e_{s-1,s}$  zu zerlegen.

$$u^* = (u_{12}^* \cdot u_{13}^*, \dots, u_{1s}^*, \dots, u_{s-1,s}^*). \tag{60}$$

Bei der eben angeschriebenen Normalgleichung ist die Unabhängigkeit der bei verschiedenen Gelegenheiten durchgeführten Messungen nur eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung der getrennten Ausgleichung der zu verschiedenen Messungen gehörenden Beobachtungen. Die Zeilen der Normalgleichung sind nämlich auch durch die unbekanntenen Korrelaten verbunden.

Da die Bedingungsgleichungen stets die Beziehung zwischen zwei Messungen veranschaulichen, läßt sich die Verarbeitung der Messungen auf die gemeinsame Verarbeitung von höchstens je zwei Messungen zerlegen. Bei der getrennten Verarbeitung einer einzigen Messung können keine Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden.

Betrachten wir die gemeinsame Verarbeitungsmöglichkeit zweier Messungen in der Annahme der Unabhängigkeit der bei verschiedenen Gelegenheiten unternommenen Messungen und des Umstands, daß die Informationen über die Unbeweglichkeit stets auf die erste Messung bezogen aufgeschrieben werden. In diesem Falle lautet die Normalgleichung unter Anwendung der Bezeichnungen

$$N_{ii} = A_{ii}^* P_{ii} A_{ii} \quad (61)$$

$$n_i = A_{ii}^* P_{ii} t_i \quad (62)$$

und des Zusammenhangs (33) wie folgt:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & C_{12}^* & C_{13}^* & \dots & C_{1s}^* \\ \mathbf{0} & N_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & C_{21}^* & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_{33} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{31} & \dots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & N_{ss} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{s1}^* \\ C_{12} & C_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ C_{13} & \mathbf{0} & C_{31} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ C_{1s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C_{s1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s \\ k_{12} \\ k_{13} \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{1s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ n_s \\ w_{12} \\ w_{13} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{1s} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (63)$$

Aus der hier angeschriebenen Gleichung trennen wir nacheinander die zu den Messungen 1.2, 1.3, ... 1.s gehörenden Größen ab:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & \mathbf{0} & C_{12}^* \\ \mathbf{0} & N_{22} & C_{21}^* \\ C_{12} & C_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ k_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ w_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & \mathbf{0} & C_{13}^* \\ \mathbf{0} & N_{33} & C_{31}^* \\ C_{13} & C_{31} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ k_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_3 \\ w_{13} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & \mathbf{0} & C_{1s}^* \\ \mathbf{0} & N_{ss} & C_{s1}^* \\ C_{1s} & C_{s1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_s \\ k_{1s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_3 \\ w_{13} \end{bmatrix} = 0 \quad (65)$$

Aus den so hergestellten Normalgleichungen können nacheinander die zu den Messungen 1.2, 1.3, . . . , 1.s gehörenden Unbekannten bestimmt werden.

Die Zerlegung hat den Vorteil, daß sie die Verarbeitung der Messungen je Gelegenheit ermöglicht. Es ist jedoch nachteilig, daß die zu der ersten Messung gehörenden Änderungen bei der s—1-ten Messung bestimmt werden müssen, und man daher für die zu der ersten Gelegenheit gehörenden Koordinaten — auch bei der Verwendung derselben Näherungswerte — s—1 Werte erhält, die nicht unbedingt übereinstimmen.

Werden die Bedingungs-gleichungen immer auf die vorigen Messung bezogen aufgeschrieben, dann lassen sich — ähnlich dem eben Beschriebenen — die zu den Messungen 1.2, 2.3, . . . , (s—1).s gehörenden Meßergebnisse paarweise ausgleichen. In diesem Falle erhält man für jede der Koordinaten 2, 3, . . . , (s—1) zwei verschiedene Werte.

Untersuchen wir nun die aus der Ausglei-chung erhaltenen eindeutigen Größen. Da wir im Netz auch jetzt keinen Punkt mit vorgegebenen Koordinaten haben, wird der Koeffizient der Unbekannten in der Normalgleichung auch jetzt singular sein. Bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix durch **R**:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Der die Dimension der Singularität ausdrückende Rangabfall wird nach Gl.(43) und den dort beschriebenen Methoden bestimmt. Durch die Bedingungs-gleichungen wird die Beziehung zwischen den verschiedenen Messungen gewährleistet und daher der Rangabfall vermindert. Es ist jedoch einzusehen, daß bei einem Netztyp auch das Anschreiben der zu verschiedenen Messungen gehörenden Bedingungs-gleichungen den Rangabfall der Matrix **R** nicht unter den für die einmalige Messung des gegebenen Netzes kennzeichnenden Freiheitsgrad herabsetzen kann.

Dies sei an zwei Beispielen dargestellt.

*Beispiel 2.*

Untersuchen wir das Netz im Beispiel 1. Gesetzt, der Punkt A ist zwischen den Messungen 1 und 2 unbeweglich. Die Unbeweglichkeit wird durch die

Bedingungsgleichung mit dem Koeffizienten

$$C = [+1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

ausgedrückt. Unter Anwendung der im Beispiel 1 aufgeschriebenen Matrix  $N$  und des jetzt aufgeschriebenen Vektors  $C$  erstellt man die Koeffizientenmatrix  $R$ .

Nach Bestimmung des Formats  $k(R)$  und des Ranges  $r(R)$  der Matrix, erhält man:

$$k(R) = 10 \qquad r(R) = 8.$$

Daraus ergibt sich der Rangabfall zu:

$$d(R) = k(R) - r(R) = 2.$$

Durch Anschreiben einer einzigen Bedingungsgleichung konnte der Rangabfall der Matrix  $N$ , der in Beispiel 1 gleich 3 war, um eins vermindert werden.

### Beispiel 3

Betrachten wir das Netz im Beispiel 1, und nehmen wir an, daß auch die Punkte A und B bei den drei Messungen unbeweglich sind. Die Unbeweglichkeit kann durch das Aufschreiben von vier Bedingungsgleichungen berücksichtigt werden. Die Bedingungsgleichungen veranschaulichen die Unbeweglichkeit der Punkte A und B zwischen der 1. und 2. sowie der 1. und 3. Messung. So erhält man folgende Matrix  $C$ :

$$C = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die aufgrund der Matrix  $N$  im Beispiel 1 und der jetzt angeschriebenen Matrix  $C$  aufgestellte Matrix  $R$  hat folgendes Format und folgenden Rang:

$$k(R) = 13 \qquad r(R) = 12.$$

Der Rangabfall beträgt also

$$d(R) = k(R) - r(R) = 1.$$

Aus dem Beispiel ist zu erkennen, daß obwohl mehr Bedingungsgleichungen aufgeschrieben wurden als die Zahl der Rangabfälle der ursprünglichen Matrix  $N$ , der Wert des Rangabfalls nicht unter den Rangabfall der freien Nivellementsnetze sank.

Infolge der Singularität der Matrix  $\mathbf{R}$  kann die Normalgleichung (59) nach herkömmlichen Methoden nicht aufgelöst werden. Auch hier können die möglichen Lösungen der Normalgleichung durch die verallgemeinerten Inversen sichergestellt werden [12]. Im Prinzip können die Unbekannten mit Hilfe eines den Zusammenhang (46) der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{R}$  befriedigenden, beliebigen verallgemeinerten Inversen bestimmt werden.

Gehen wir von einem beliebigen verallgemeinerten Inversen von  $\mathbf{R}$  aus, das aus den im weiteren dargestellten Submatrizen erhalten wird [13]:

$$\mathbf{R}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{C}^* \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 & \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (67)$$

wo 
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{N}^- - \mathbf{N}^- \mathbf{C}^* (\mathbf{C} \mathbf{N}^- \mathbf{C}^*)^- \mathbf{C} \mathbf{N}^- \quad (68)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{N}^- \mathbf{C}^* (\mathbf{C} \mathbf{N}^- \mathbf{C}^*)^- \quad (69)$$

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_2^* \quad (70)$$

$$\mathbf{U}_4 = -(\mathbf{C} \mathbf{N}^- \mathbf{C}^*)^- \quad (71)$$

Unter Anwendung der Submatrizen  $\mathbf{U}_1$  und  $\mathbf{U}_2$  im verallgemeinerten Inversen von  $\mathbf{R}$  erhält man den Vektor  $x$  der Unbekannten aus dem Zusammenhang:

$$x = -\mathbf{U}_1 \mathbf{A}^* \mathbf{P} t - \mathbf{U}_2 w \quad (72)$$

Drücken die Bedingungsgleichungen die Unveränderlichkeit der Koordinaten aus, so wird bei der Wahl der gleichen Näherungswerte  $w$  ein Nullvektor sein, damit erhält man den Vektor der unbekanntten Änderungen aus folgendem, einfacherem Zusammenhang:

$$x = -\mathbf{U}_1 \mathbf{A}^* \mathbf{P} t \quad (73)$$

Von den möglichen verallgemeinerten Inversen wird es auch in diesem Falle zweckmäßig sein, das eindeutige Pseudoinverse zu benutzen, dann ergeben sich  $\mathbf{U}_1$  bzw.  $\mathbf{U}_2$  zu

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{N}^+ - \mathbf{N}^+ \mathbf{C}^* (\mathbf{C} \mathbf{N}^+ \mathbf{C}^*)^+ \mathbf{C} \mathbf{N}^+ \quad (74)$$

und

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{N}^+ \mathbf{C}^* (\mathbf{C} \mathbf{N}^+ \mathbf{C}^*)^+ \quad (75)$$

Die Kofaktorenmatrix der Unbekannten erhält man aus

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{U}_1 \quad (76)$$

Die Eindeutigkeit der Pseudoinversen gibt auch in diesem Falle nur auf die Näherungswerte bezogen eindeutig die Unbekannten an. Die Näherungswerte werden jedoch bei der ersten Messung willkürlich angenommen. Daher sind die aus der Ausgleichung erhaltenen Koordinaten auch in diesem Falle nicht eindeutig. Die ausgeglichenen Meßergebnisse sind hingegen eindeutig, und im Besitz einer genügenden Zahl von Informationen können auch die Differenzen der zu verschiedenen Messungen gehörenden Koordinaten eindeutig sein.

Bei der Lösung praktischer Aufgaben ist es oft zweckdienlich, den jetzt untersuchten Fall auf den vorigen zurückzuführen, u. zw. in der Weise, daß man nach der ersten Messung die Ausgleichung durchführt, wobei man die Unbekannten

$$x_1 = -(\mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{11} \mathbf{A}_{11})^{-1} \mathbf{A}_{11}^* \mathbf{P}_{11} t_1 \quad (77)$$

erhält. Bei der Verarbeitung der weiteren Messungen werden die aus der ersten Messung erhaltenen Koordinaten der nach anderen Informationen unbeweglichen Punkte als bekannt genommen. Die notwendige Bedingung dieses Verfahrens ist die Unabhängigkeit der bei verschiedenen Gelegenheiten unternommenen Messungen. Da bei den weiteren Messungen die aus der ersten Messung erhaltenen Werte als gegeben betrachtet werden, ist es zweckmäßig, die erste Messung im Vergleich zu den späteren mit größerem Gewicht durchzuführen.

Aus der Auflösung der verschiedenartigen Normalgleichungen erhält man nach den obigen Ausführungen die Änderungen. Auf dieser Grundlage erhält man die Verbesserungen aus den Verbesserungsgleichungen nichtlinearer Form in (21). Die Koordinaten der Punkte können aus dem Zusammenziehen nach (16) der Näherungswerte und der Änderungen berechnet werden. Die ausgeglichenen Meßergebnisse werden als die Summen der Meßwerte und der entsprechenden Verbesserungen bestimmt. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit  $m_0$  ergibt sich aus

$$m_0^2 = f^{-1} \mathbf{v}^* \mathbf{P} \mathbf{v} \quad (78)$$

wo  $f$  die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen bedeutet.

Die Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten wird aus  $m_0$  und aus den in der Zusammenhängen (55), (56) und (76) angegebenen Kofaktorenmatrizen  $\mathbf{Q}(x)$  berechnet:

$$\mathbf{M}_{(x)} = m_0^2 \mathbf{Q}_{(x)}. \quad (79)$$

Die Varianz-Kovarianzmatrix  $\mathbf{M}_{(u)}$  der ausgeglichenen Meßergebnisse ergibt sich nach dem allgemeinen Gesetz der Fehlerfortpflanzung aus der Gleichung

$$\mathbf{M}_{(u)} = \mathbf{A}^* \mathbf{M}_{(x)} \mathbf{A} \quad (80)$$

wo  $\mathbf{A}$  die bei der Definition der Verbesserungsgleichungen angeschriebene Matrix ist.

Bei der Verarbeitung von ingenieurgeodätischen Deformationsmessungen ist oft die Varianz-Kovarianzmatrix  $\mathbf{M}_{(D)}$  der Differenz von bei zwei verschiedenen Gelegenheiten erhaltenen Werten derselben Größen notwendig. Um diese — ebenfalls nach dem allgemeinen Gesetz der Fehlerfortpflanzung — zu bestimmen, sind die entsprechenden Submatrizen der Varianz-Kovarianzmatrizen  $\mathbf{M}_{(x)}$  oder  $\mathbf{M}_{(u)}$  und die Matrix  $\mathbf{D}$  der Differenz erforderlich. Untersuchen wir die Differenzen der Anzahl  $g$  zwischen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Messung. Die Matrix  $\mathbf{M}_{(k)}$  enthält die entsprechenden Submatrizen der Matrix  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}_{\substack{(i,j) \\ (2g, 2g)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ (g, g) & (g, g) \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \\ (g, g) & (g, g) \end{bmatrix} \quad (81)$$

Die Differenzen werden mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{D}$  ausgedrückt:

$$\mathbf{D}^*_{(g, 2g)} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Die Matrix  $\mathbf{D}^*$  läßt sich auf zwei Einheitsmatrizen zerlegen:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & \\ & -\mathbf{E} & \\ & & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (83)$$

$(g, 2g) \qquad (g, g) \qquad (g, g)$

Schreiben wir das allgemeine Gesetz der Fehlerfortpflanzung für die Bestimmung von  $\mathbf{M}_{(D)}$  auf:

$$\mathbf{M}_{(D)} = \mathbf{D}^* \mathbf{M}_{(k)} \mathbf{D} = \mathbf{M}_{ii} + \mathbf{M}_{jj} - 2\mathbf{M}_{ij} \quad (84)$$

Sind die bei verschiedenen Gelegenheiten erhaltenen Werte unabhängig, dann gilt

$$\mathbf{M}_{(D)} = \mathbf{M}_{ii} + \mathbf{M}_{jj} \quad (85)$$

Am Anfang dieser Arbeit wurde angenommen, daß die gemeinsame Verteilung unserer Messungen eine Normalverteilung ist. Es ist ein bekannter Satz [7], daß die Verteilung der linearen Transformationen  $\mathbf{H}Y + h$  einer Zufallsvektorgroße  $Y$  mit der Normalverteilung  $N(\mu, \Sigma)$  die Normalverteilung

$N(\mathbf{HY} + \mathbf{h}, \mathbf{H} \Sigma \mathbf{H}^*)$  sein wird. Aus diesem Satz ist einzusehen, daß sowohl die aus der Ausgleichung erhaltenen Unbekannten als auch die ausgeglichenen Meßwerte von Normalverteilung sein werden. Daraus folgt aber auch, daß der mittlere Fehler der Gewichtseinheit von  $\chi^2$ -Verteilung sein wird.

### Zusammenfassung

Im Beitrag werden die ingenieurgeodätischen Deformationsmessungen behandelt. Über die aus dem Fachschrifttum bekannte gemeinsame Ausgleichung zweier Messungen hinaus wird der allgemeinere Fall, die gemeinsame Ausgleichung von Messungen der Anzahl  $s$  untersucht.

Für die Ausgleichung wurde ein Modell gewählt, das bei den verschiedenen Messungen die Messung der Größen in einem einzigen Zeitpunkt sowie eine Normalverteilung der Beobachtungen voraussetzt.

Der Ausgleichungsvorgang wird unter Anwendung der Methode der vermittelnden Beobachtungen behandelt. Als Unbekannten werden die zu verschiedenen Meßzeitpunkten gehörenden Koordinaten der Punkte des Deformationsmessungsnetzes betrachtet. Es wird auch die Berücksichtigung der die Deformation betreffenden, nichtgeodätischen Informationen behandelt.

Anhand der Normalgleichung wurde untersucht, wann bei verschiedenen Gelegenheiten unternommenen Messungen getrennt bearbeitet werden können. Je nach der Art und der Berücksichtigung der Information über die Deformation werden drei Fälle der Normalgleichungen unterschieden:

a) Es steht über die Deformation keine Information nichtgeodätischer Art zur Verfügung.

b) Die Information über die Deformation wird unter Anwendung von Punkten mit bekannten Koordinaten berücksichtigt.

c) Die Information über die Deformation wird mit Hilfe von Bedingungsgleichungen berücksichtigt.

In den Fällen a) und b) besteht die hinreichende und notwendige Bedingung der getrennten Verarbeitung bei verschiedenen Gelegenheiten durchgeführter Messungen in der Unabhängigkeit derselben. Im Fall c) ist die Unabhängigkeit der Messungen nur eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung.

Es wurde auch untersucht, aus der Differenz welcher Größe in Abhängigkeit von den nichtgeodätischen Information über die Deformation auf Deformation geschlossen werden darf.

Von den angeführten Fällen der Normalgleichungen läßt sich im Fall a) nur aus der Differenz der ausgeglichenen Meßwerte, in den Fällen b) und c) außerdem auch aus der Differenz der Koordinaten auf Deformation schließen.

Es wurde festgestellt, daß in den Fällen a) und c) die Koeffizientenmatrix der Normalgleichung singularär ist. Der das Ausmaß der Singularität kennzeichnende Rangabfall kann im Falle a) größer sein als der Rangabfall anderer geodätischer freier Netze. Für die Auflösung der Normalgleichungen mit singularären Koeffizienten wird die Anwendung der Pseudoinversen vorgeschlagen.

Abschließend wird auch die Bestimmung der für die Differenzen der bei verschiedenen Gelegenheiten erzielten Meßwerte kennzeichnenden Varianz-Kovarianzmatrizen behandelt.

### Schrifttum

1. BJERHAMMAR, A.: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Elsevier Company, Amsterdam—London—New York, 1973.
2. GRAFAREND, E., SCHAFFRIN, B.: Unbiased Free Net Adjustment. Survey Review. 1974/I.
3. GRAFAREND, E.: Genauigkeitsmaße geodätischer Netze. DGK Reihe A., Nr. 73. München 1972.
4. HAZAY, I.: Ausgleichungsrechnungen\* Budapest, 1966.



5. HAZAY, I.: Netzausgleichung bei vertikalen Erdkrustenbewegungen\*. Geodézia és Kartográfia. 1967/5.
6. KOCH, K. R.: Herleitung der Methode der kleinsten Quadrate mit Hilfe generalisierter Matrixinversen. ZfV. 1975/12.
7. KOCH, K. R.: Wahrscheinlichkeitsverteilungen für statistische Beurteilungen von Ausgleichungsergebnissen. Mitteilungen aus dem Institut für theoretische Geodäsie der Universität Bonn. Nr. 38. Bonn, 1975.
8. Маркузе, Ю. И.: Уравнивание измерений с вырожденной корреляционной матрицей. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972/3.
9. MEIER, S.: Ausgleichung horizontaler Punktverschiebungen nach vermittelnden Beobachtungen und Beobachtungsdifferenzen. Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik der Deutschen Demokratischen Republik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. III/25. Berlin, 1971.
10. MILEV, G.: Ausgleichung, Analyse und Interpretation von Deformationsmessungen. DGK. Reihe C. Nr. 192. München, 1973.
11. PELZER, H.: Analyse von Deformationsmessungen. DGK. Reihe C. Nr. 164. München, 1971.
12. RAO, C. R.: Unified Theory of Linear Estimation. The Indian Journal of Statistics, December 1971.
13. RAO, C. R.—MITRA, S. K.: Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, Sydney, Toronto, 1971.
14. RÓZSA, P.: Die lineare Algebra und ihre Anwendung.\* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
15. ZURMÜHL, R.: Matrizen und ihre technische Anwendungen, Springer-Verlag. Berlin, (Göttingen) Heidelberg, 1964.
16. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung. Dümmlers Verlag, Bonn, 1975.
17. WOLF, H.: Korrelierte Beobachtungen in der Triangulierung. ZfV. 1975/I.
18. DETREKŐI, Á.: Über die mathematischen Modelle der geodätischen Deformationsmessungen. Internationales Symposium über geodätische Deformationsmessungen. Krakow, 1975.

Dozent Dr. Ákos DETREKŐI, H-1521 Budapest

\* In ungarischer Sprache