РАССМОТРЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКИХ КООРДИНАТ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ ДВОЙНОГО ОТНОШЕНИЯ

М. ДОМОКОШ

Кафедра фотограмметрии Института геодезии Будапештского Технического Университета

Поступило: 13 октября 1976 г.

Преобразования плоских прямоугольных координат разделяются на две группы, а именно, некоторые из них приведут:
прямолинейные отрезки к прямолинейным отрезкам, а другие прямолинейные отрезки загнут.

Первая группа, как известно, имеет общий вид:

$$X = \frac{a_1x + a_2y + a_0}{c_1x + c_2y + 1}$$

$$Y = \frac{b_1x + b_2y + b_0}{c_1x + c_2y + 1} \qquad (1)$$

Это не что другое, как проективное (коллинеарное) преобразование.

Последнее преобразование содержит более простые частные случаи следующих преобразований:

1. Случай простых смещений

У этого преобразования коэффициенты преобразования (1) обладают нижеозначенными свойствами: (см. коэффициенты (1)!)

$$a_1 = b_2 = 1$$

$$a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = 0,$$

итак, преобразование будет иметь вид:

$$X = x + a_0$$

$$Y = y + b_0$$

2. Ортогональное линейное преобразование, где соотношения: (см. коэффициенты (1)!)

$$a_1 = b_2 = a = \cos\alpha$$

$$b_1 = -a_2 = b = \sin\alpha$$

т. е. $$a^2 + b^2 = 1.$$

Далее: $$c_1 = c_2 = 0.$$

и тогда соотношения ортогонального преобразования:

$$X = ax - by + a_0$$
$$Y = bx + ay + b_0$$

3. Конформное преобразование (преобразование Гельмерта), где соотношения: (см. коэффициенты (1)!)

$$a_1 = b_2 = a = M \cos \alpha$$
$$b_1 = - a_2 = b = M \sin \alpha$$

т. е. $$a^2 + b^2 = M^2,$$

далее: $$c_1 = c_2 = 0.$$

У этого преобразования наружный вид соотношений совершенно такой же, как у ортогонального преобразования:

$$X = ax - by + a_0$$
$$Y = bx + ay + b_0$$

4. Полуаффинное преобразование.

Здесь соотношения: (см. коэффициенты (1)!)

$$a_2 = b_1 = c_2 = 0$$

Далее пусть $$a_1 = a$$

и $$b_2 = b,$$

Тогда уравнения преобразования

$$X = ax + a_0$$
$$Y = by + b_0$$

5. Линейно-аффинное преобразование.

Пусть заключения между коэффициентами (1) только следующим образом:

$$c_1 = c_2 = 0,$$

поэтому, следовательно, соотношения будут иметь вид:

$$X = a_1x + a_2y + a_0$$
$$Y = b_1x + b_2y + b_0$$

В порядке очереди следует шестым само проективное (коллинеарное) преобразование, которое нами упомянуто первым, как общий случай преобразований первой группы.

Вышеупомянутыми преобразованиями сохраняются одни метрические и проективные свойства, а другие изменяются.

О каких свойствах идет речь?

— длины (прямолинейные отрезки)
— углы (прямолинейные углы)
— одинарное отношение (т. е. отношение длин двух отрезков, разделенных единственной точкой деления),
— двойное отношение (т. е. отношение двух одинарных отношений, относящихся к двум точкам деления.)

Из сохранения *одинарного отношения* проистекает, что:

— прямые линии, параллельные между собой, и вслед за преобразованием остаются параллельными;
— центр тяжести системы точек и вслед за преобразованием остается центром тяжести новой системы точек.

Поэтому излишне о последних свойствах упомянуть в случае, если одинарное отношение сохраняется.

Покажем теперь, что в случае сохранения одинарного отношеня очевидно сохраняется и двойное отношение.

Предположим, что одинарное отношение k_1, относящееся к точке деления C прямого отрезка, AB, остается неизменным вслед за преобразованием, т. е.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = k_1 .$$

Одинарное отношение k_2, относящееся к другой точке D, и остается неизменным; т. е.

$$\frac{AD}{BD} = \frac{A'D'}{B'D'} = k_2 .$$

Тогда отношение (частное) этих двух отношений:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{k_1}{k_2} = k$$

откуда непосредственно видно, что оно и остается неизменным.

Перечислим теперь вновь преобразования, вспоминая о свойствах, сохраняющихся вслед за преобразованием, и о тех, которые не сохраняются.

Конечно, не будем говорить о том, что они приведут прямолинейные отрезки к прямолинейными отрезкам, потому что это им всем свойственно.

1. Случай простых смещений.

Вслед за этим преобразованием *сохраняются:*

— длины,

— углы (не только прямолинейные углы, а углы между линиями и осями координат),

— одинарное отношение,

— двойное отношение.

Не сохраняются: нет таких свойств, которые изменяются.

2. Ортогональное линейное преобразование

сохраняются:

— длины,

— углы (прямолинейные углы),

— одинарное отношение,

— двойное отношение.

Не сохраняются: углы между линиями и осями координат

3. Конформное преобразование (преобразование Гельмерта):

Сохраняются: — прямолинейные углы,
— одинарное отношение,
— двойное отношение.

Не сохраняются: — длины,
— углы между линиями и осями координат.

4. Полуаффинное преобразование

Сохраняются: — углы между осями координат и линиями, параллельными между осями,
— одинарное отношение,
— двойное отношение.

Не сохраняются: — длины,
— углы между линиями, наклонными к осям координат.

5. Линейно-аффинное преобразование

Сохраняются: — одинарное отношение,
— двойное отношение.

Не сохраняются: — длины,
— прямолинейные углы,
— углы между линиями и осями координат.

6. Проективное (коллинеарное) преобразование:

Сохраняется: — двойное отношение,

Не сохраняются: — длины,
— прямолинейные углы,
— углы между линиями и осями координат,
— одинарное отношение.

Перспективное положение, проективная связь и двойное отношение

Пусть проектируются пункты некоторой плоскости на другую плоскость любого положения из центра, расположенного вне плоскостей.

Две группы пунктов, соответствующие друг другу, находятся в перспективном положении только до тех пор, пока каждый пункт находится на проектирующих лучах. Если это положение, связанное в процессе проектирования, разрывается, т. е. пункты, соответствующие друг другу больше не связываются проектирующими лучами, то само перспективное положение прекратится, но две группы пунктов остаются в проективной связи. Это и значит, что пункты при помощи некоторых преобразований (смещений, вращений, и т. д.) легко приведутся вновь в перспективное положение.

Количественный показатель проективной связи не что другое, как: двойное отношение. На обеих плоскостях пусть соединяется один из пяти пунктов, соответствующих друг другу, с другими четырьмя. Двойное отношение двух полученных рядов лучей будут равными друг другу, хотя бы нам пришлось выбирать любой пункт в качестве центра. (Конечно, предполагается, что не находится никакого третьего пункта на одних лучах в ряде лучей, т. е. нет никаких троих пунктов, лежащих на одной и той же прямой).

В случае, если несущий материал воздушного фильма деформируется, то изменяются и расстояния между пунктами.

Пусть вытягивается например, катушечная фотопленка в продольном направлении, то изменяются расположения пунктов по полуаффинному преобразованию (см. выше пункт 4). Поставить первоначальное положение возможно также с помощью этого преобразования. Подобным образом применяется любое из шести линейных преобразований, но тогда и только тогда, если двойные отношения обеих групп пунктов остались неизменными, т. е. обе группы остались в проективной связи несмотря на то, что фильм деформировался.

В противном положении любое шестеро линейных преобразований будут недействительными, ведь они неспособны к изменению двойного отношения.

В случае, если двойное отношение изменяется вследствие деформации фильма, то поставить проективную связь обеих групп пунктов при помощи нелинейных преобразований вместо линейно-коллинеарных преобразований. Нелинейные преобразования во всяком случае изменяют двойное отношение в некоторой мере.

Если рассмотрение деформаций фильмов ставит себе целью раскрывать факты правдиво, то достижение этой цели без сопоставления двойных отношений кажется немыслимым. Это означает, что прежде всего необходимо изучать, прекратилась ли проективная связь между двумя группами пунктов или нет, и в какой мере?

Поставление первоначальной связи не что другое, как поставление равенства двойных отношений, вслед за которым при помощи коллинеарного преобразования и первоначальное положение можно поставить.

Таким образом, применение двойного отношения имеет две возможности:

— считается оно методом рассмотрения,

— и средством поставления первоначального расположения пунктов.

Впоследствии докажем, что вышеупомянутые преобразования обладают двумя общими свойствами решающего значения:

I. Они ведут прямолинейные отрезки и прямолинейным отрезкам и

II. сохраняют двойное отношение.

В процессе доказательства во всяком случае отдельно рассуждаем о частных случаях (перечислены: от 1 до 5), и отдельно об общем случае преобразований первой группы.

I

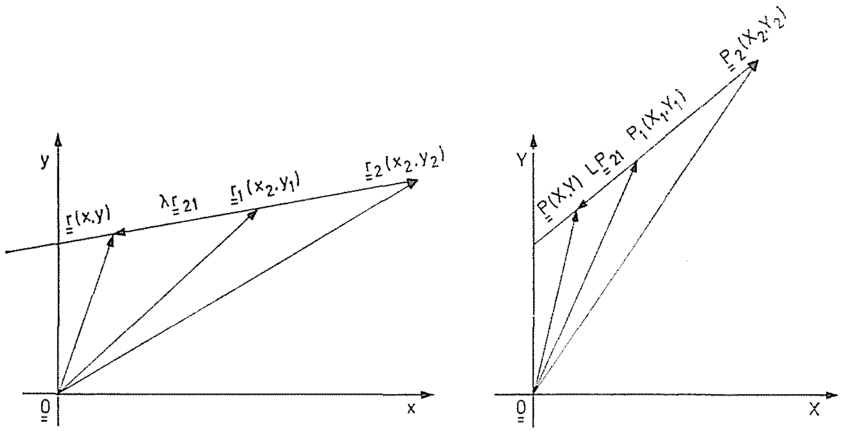
Преобразование прямолинейного отрезка к прямолинейному отрезку означает, что прямая

$$r = r_1 + r_{21}$$

вслед за преобразованием будет также прямая, уравнение которой будет:

$$P = P_1 + L \cdot P_{21}$$

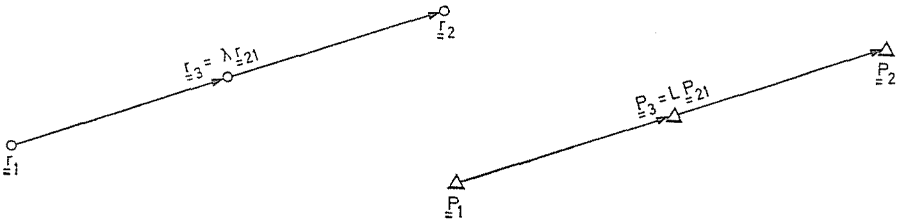
как видно на чертеже 1.



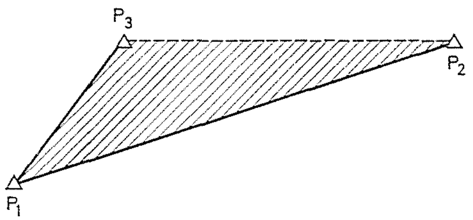
Черт. 1

Или, проще говоря, где мы ни возьмем пункт r_3 на прямой, соединяющей пункты r_1 и r_2, эти три пункта и вслед за преобразованием будут располагаться на одной прямой линии. Пусть смещается начало системы координат в пункты r_1 и P_1. Создалась с этим ситуация, которая видна на чертеже 2, предполагая, что $\neq 0$ и $\neq 1$, т. е. все трое пунктов считаются совершенно отдельными.

Но пусть предполагается, что вслед за преобразованием пункт P_3 не будет помещаться на прямой P_1P_2 (см. черт. 3.). Вследствие этого, величина площади треугольника, образованного тремя преобразованными пунктами, не будет равна нулю, или, что с этим равнозначно: векториальное произведение



Черт. 2



Черт. 3

векторов $P_1\,P_3$ и $P_1\,P_2$ будет различаться от нуля, т. е. имеет место соотношение:

$$\begin{matrix} X_{21} & X_{31} \\ Y_{21} & Y_{31} \end{matrix} \neq 0 \qquad \text{(A)}$$

Рассмотрим сначала величину векториального произведения у преобразованных общего вида частных случаев, перечисленных от 1 до 5 (см. соотношения (2)):

$$X_i = a_1x_i + a_2y_i + a_0 \qquad \text{(2а)}$$

$$Y_i = b_1x_i + b_2y_i + b_0 \qquad \text{(2б)}$$

Очевидно, что векторы

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{21}$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{31}$$

вслед за преобразованием будут:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{21} \qquad \text{(а')}$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{31} \qquad \text{(б')}$$

а нам теперь рассмотреть величину векториального произведения

$$\mathbf{P}_{21} \times \mathbf{P}_{31}$$

Таким образом, наша задача приведения соотношений (2а) и (2б) в таких формах, чтобы были в них разницы $x_{21} = x_2 - x_1$, и $y_{21} = y_2 - y_1$ вместо x_i и y_i. Итак мы будем получить векторы P_{21} и P_{31} по формулам (а') и (б') вслед за преобразованием векторов r_{21}, r_{31}.

Мы видим, что (2а) и (2б) могут быть записаны в виде:

$$X_{21} = X_2 - X_1 = a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_0 - X_1$$
$$Y_{21} = Y_2 - Y_2 = b_1 x_2 + b_2 y_2 + b_0 - Y_1.$$

Прибавим к правым сторонам выражения:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 - a_1 x_1 - a_2 y_1 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 y_1 - b_1 x_1 - b_2 y_1 = 0$$

которые очевидно равны нулю. Выносив соответствующие коэффициенты, можем написать:

$$X_{21} = a_1 x_{21} + a_2 y_{21} + a_1 x_2 + a_2 y_1 + a_3 - X_1$$
$$Y_{21} = b_1 x_{21} + b_2 y_{21} + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 - Y_1$$

На правых сторонах сумма последних членов (по (2а) и (2б)) равна нулю, итак:

$$x_{21} = a_1 x_{21} + a_2 y_{21} \qquad (1')$$
$$Y_{21} = b_1 x_{21} + b_2 y_{21} \qquad (2')$$

На правых сторонах подставляя x_{21} и y_{21}, мы будем иметь:

$$X_{31} = a_1\ x_{21} + a_2\ y_{21} = a_1 x_{21} + a_2 y_{21}$$
$$Y_{31} = b_1\ x_{21} + b_2\ y_{21} = b_1 x_{21} + b_2 y_{21}$$

Перепишем выражения в скобках по (1') и (2') в виде:

$$X_{31} = X_{21} \quad \text{и} \quad Y_{31} = Y_{21} \qquad (1''\ 2'')$$

Подставляя эти выражения в формулу определителя (А):

$$\begin{matrix} X_{21} & X_{21} \\ Y_{21} & Y_{21} \end{matrix} = X_{21} Y_{21} - X_{21} Y_{21} = 0\,.$$

что и требовалось доказать, т. е. эти три пункта и за преобразованием будут расположиться на одной прямой линии.

Аналогично совершаем доказательство в случае проективного (коллинеарного) преобразования:

$$X_i = \frac{a_1 x_i + a_2 y_i + a_0}{c_1 x_i + c_2 y_i + 1} \tag{3}$$

$$Y_i = \frac{b_1 x_i + b_2 y_i + b_0}{c_1 x_i + c_2 y_i + 1} \tag{4}$$

По этим можем написать:

$$X_{21} = X_2 - X_1 = \frac{a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_0}{c_1 x_2 + c_2 y_2 + 1} - X_1 = \frac{a_1 x_2 + a_2 y_2 - X_1 c_1 x_2 - X_1 c_2 y_2 - X_1 + a_0}{c_1 x_2 + c_2 y_2 + 1}$$

$$Y_{21} = Y_2 - Y_1 = \frac{b_1 x_2 + b_2 y_2 + b_0}{c_1 x_2 + c_2 y_2 + 1} - Y_1 = \frac{b_1 x_2 + b_2 y_2 - Y_1 c_1 x_2 - Y_1 c_2 y_2 - Y_1 + b_0}{c_1 x_2 + c_2 y_2 + 1}$$

На правых сторонах уже привели дроби к общему знаменателю.

Прибавим к числителям выражения:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 - a_1 x_1 - a_2 y_1 = 0,$$

$$b_1 x_1 + b_2 y_1 - b_1 x_1 - b_2 y_1 = 0,$$

а к знаменателям выражение:

$$c_1 x_1 + c_2 y_1 - c_1 x_1 - c_2 y_1 = 0$$

которые очевидно равны нулю.

Вынеся соответствующие коэффициенты, можем написать:

$$X_{21} = \frac{a_1 x_{21} + a_2 y_{21} - X_1 c_1 x_2 - X_1 c_2 y_2 - X_1 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_0}{c_1 x_{21} + c_2 y_{21} + c_1 x_1 + c_2 y_1 + 1}$$

$$Y_{21} = \frac{b_1 x_{21} + b_2 y_{21} - Y_1 c_1 x_2 - Y_1 c_2 y_2 - Y_1 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_0}{c_1 x_{21} + c_2 y_{21} + c_1 x_1 + c_2 y_1 + 1}$$

По соотношениям (3) и (4), если в них вместо i подставим число 1, и умножаем их на знаменатель, то три последних члена числителей имеют следующие виды:

$$a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_0 = X_1 c_1 x_1 + X_1 c_2 y_1 + X_1$$

$$b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_0 = Y_1 c_1 x_1 + Y_1 c_2 y_1 + Y_1$$

Подставляя эти выражения в последние уравнения, вынеся соответствующие коэффициенты, вслед за сложением будем иметь выражения:

$$X_{21}=\frac{(a_1-X_1c_1)x_{21}+(a_2-X_1c_2)y_{21}}{c_1x_{21}+c_2y_{21}+\underbrace{c_1x_1+c_2y_1+1}_{N}}$$

$$Y_{21}=\frac{(b_1-Y_1c_1)x_{21}+(b_2-Y_1c_2)y_{21}}{c_1x_{21}+c_2y_{21}+\underbrace{c_1x_1+c_2y_1+1}_{N}}$$

Разделяя на N, находящееся в знаменателе, получим:

$$X_{21}=\frac{\frac{a_1-c_1X_1}{N}\cdot x_{21}+\frac{a_2-c_2X_1}{N}\cdot y_{21}}{\frac{c_1}{N}\cdot x_{21}+\frac{c_2}{N}\cdot y_{21}+1}$$

$$Y_{21}=\frac{\frac{b_1-c_1Y_1}{N}\cdot x_{21}+\frac{b_2-c_2Y_1}{N}\cdot y_{21}}{\frac{c_1}{N}\cdot x_{21}+\frac{c_2}{N}\cdot y_{21}+1}$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$a_1'=\frac{a_1-c_1X_1}{N}\qquad a_2'=\frac{a_2-c_2X_1}{N}$$

$$b_1'=\frac{b_1-c_1Y_1}{N}\qquad b_2'=\frac{b_2-c_2Y_1}{N}$$

$$c_1'=\frac{c_1}{N}\qquad c_1'=\frac{c_2}{N}$$

где $N=c_1x_1+c_2y_1+1$.

Теперь можем написать:

$$X_{21}=\frac{a_1'x_{21}+a_2'y_{21}}{c_1'x_{21}+c_2'y_{21}+1}\tag{1''}$$

$$Y_{21}=\frac{b_1'x_{21}+b_2'y_{21}}{c_1'x_{21}+c_2'y_{21}+1}\tag{2''}$$

Если мы сравним эти выражения с соотношениями (1′) и (2′), то увидим, что оба являются однородными по координатным разницам x_{21} и y_{21}, но в соотношениях (1″) и (2″) все коэффициенты изменились.

Подставим теперь величины x_{21} и y_{21} в правые стороны, то можем написать:

$$X_{31} = \frac{a_1'\lambda x_{21} + a_2'\lambda y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}$$

$$Y_{31} = \frac{b_1'\lambda x_{21} + b_2'\lambda y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}$$

Подставляя эти, и вышеупомянутые выражения (1'') и (2'') в формулу определителя (A):

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{a_1'x_{21} + a_2'y_{21}}{c_1'x_{21} + c_2'y_{21} + 1} & \lambda \cdot \dfrac{a_1'x_{21} + a_2'y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1} \\ \dfrac{b_1'x_{21} + b_2'y_{21}}{c_1'x_{21} + c_2'y_{21} + 1} & \lambda \cdot \dfrac{b_1'x_{21} + b_2'y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1} \end{vmatrix}$$

Здесь можно вынести общие множители из строк (и столбцов) за знак определителя:

$$\frac{\lambda(a_1'x_{21} + a_2'y_{21})(b_1'x_{21} + b_2'y_{21})}{(c_1'x_{21} + c_2'y_{21} + 1)(c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

и это, очевидно, равно нулю.

Итак, и коллинеарное (проективное) преобразование ведет прямолинейные отрезки к прямолинейным отрезкам.

II

Аффинные и проективные (коллинеарные) преобразования сохраняют двойное отношение.

Доказательство этого свойства значительно упрощается, если мы принимаем во внимание вышеупомянутые соотношения.

Пусть вычисиляются одинарные отношения линейного отрезка, лежащего между конечными пунктами 1, и 2, на пункты деления 3. и 4. (См. черт. 4).

Пусть применяются у линейных преобразований формулы (1'), (2') и (1"2"):

$$X_{31} = a_1\lambda x_{21} + a_2\lambda y_{21} = \lambda X_{21}$$

$$X_{32} = X_{31} - X_{21} = \lambda X_{21} - X_{21} = (\lambda - 1)X_{21}$$

и

$$Y_{31} = b_1\lambda x_{21} + b_2\lambda y_{21} = \lambda Y_{21}$$

$$Y_{32} = Y_{31} - Y_{21} = \lambda Y_{21} - Y_{21} = (\lambda - 1)Y_{21}$$

откуда следует:

$$\mathbf{P}_{31} = \lambda\mathbf{P}_{21} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_{32} = (\lambda - 1)\mathbf{P}_{21} .$$

Одинарные отношения e_3 и E_3, относящиеся к двум системам:

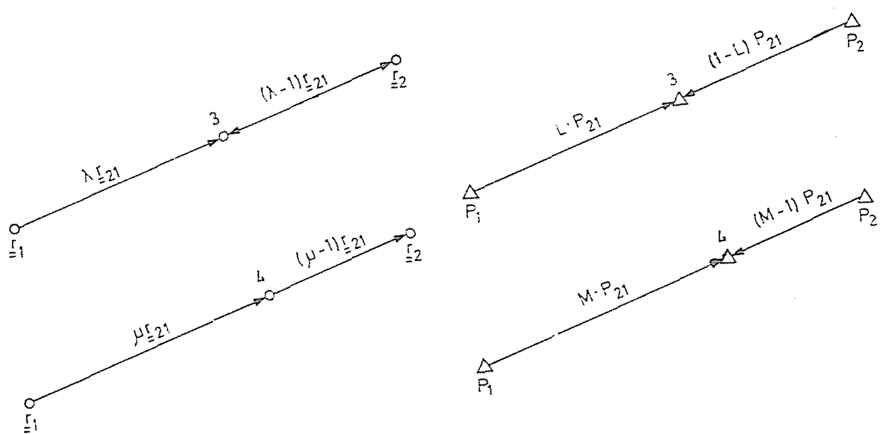
$$e_3 = \frac{|\mathbf{r}_{31}|}{|\mathbf{r}_{32}|} = \frac{\lambda|\mathbf{r}_{21}|}{(\lambda-1)|\mathbf{r}_{21}|} = \frac{\lambda}{\lambda=1} \quad \text{и}$$

$$E_3 = \frac{|\mathbf{P}_{31}|}{|\mathbf{P}_{32}|} = \frac{\lambda|\mathbf{P}_{21}|}{(\lambda-1)|\mathbf{P}_{21}|} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

которые, очевидно, равны друг другу.

Аналогично получается на пункт деления 4., что

$$e_4 = \frac{\mu}{\mu-1} \qquad E_4 = \frac{\mu}{\mu-1} \tag{3'4'}$$



Черт. 4

Конечно, частные k и K:

$$k = \frac{e_3}{e_4} = \frac{\lambda}{\lambda-1} : \frac{\mu}{\mu-1} \qquad K = \frac{E_3}{E_4} = \frac{\lambda}{\lambda-1} : \frac{\mu}{\mu-1}$$

тоже будут равными друг другу.

В случае проективного (коллинеарного) преобразования применяются формулы (1″) и (2″), относящиеся к пунктам деления 3. и 4.:

$$X_{31} = \frac{a_1'\lambda x_{21} + a_2'\lambda y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1} \qquad Y_{31} = \frac{b_1'\lambda x_{21} + b_2'\lambda y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}$$

$$X_{32} = X_{31} - X_{21} = \frac{a_1'\lambda x_{21} + a_2'\lambda y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1} - \frac{a_1'x_{21} + a_2'y_{21}}{c_1'x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}$$

$$Y_{32} = Y_{31} - Y_{21} = \frac{b_1'\lambda x_{21} + b_2'\lambda y_{21}}{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1} - \frac{b_1' x_{21} + b_2' y_{21}}{c_1' x_{21} + c_2' y_{21} + 1}$$

$$E_{3x} = \frac{X_{31}}{X_{32}} = \frac{X_{31}}{X_{31} - X_{21}} = \frac{1}{1 - \frac{X_{21}}{X_{31}}} = \frac{1}{1 - X_{21} \cdot \frac{1}{X_{31}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a_1' x_{21} + a_2' y_{21}}{c_1' x_{21} + c_2' y_{21} + 1} \cdot \frac{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}{a_1'\lambda x_{21} + a_2'\lambda y_{21}}}$$

откуда следует, что:

$$E_{3x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}{c_1' x_{21} + c_2' y_{21} + 1}} \tag{3''}$$

И E_{3y} получается аналогично:

$$E_{3y} = \frac{Y_{31}}{Y_{32}} = \frac{Y_{31}}{Y_{31} - Y_{21}} = \frac{1}{1 - Y_{21} \cdot \frac{1}{Y_{31}}}$$

И, наконец, аналогично получим одинарные отношения:

$$E_{4x} = E_{4y} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu} \frac{c_1'(u x_{21} + c_2') u y_{21} + 1}{c_1' x_{21} + c_2' y_{21} + 1}} \tag{4''}$$

Очевидно, что одинарные отношения (3′4′) не равны одинарным отношениям (3″) и (4″).

Рассмотрим теперь двойное отношение:

$$K = \frac{E_3}{E_4} = \frac{\dfrac{1}{1 - \frac{1}{\lambda} \frac{c_1'\lambda x_{21} + c_2'\lambda y_{21} + 1}{c_1' x_{21} + c_2' y_{21} + 1}}}{\dfrac{1}{1 - \frac{1}{\mu} \frac{c_1'\mu x_{21} + c_2'\mu y_{21} + 1}{c_1' x_{21} + c_2' y_{21} + 1}}}$$

Пусть приведется к общему знаменателю:

$$K=\frac{\dfrac{1}{\lambda\mu(c_1'x_{21}+c_2'y_{21}+1)-\mu(c_1'\lambda x_{21}+c_2'\lambda y_{21}+1)}}{\dfrac{1}{\lambda\mu(c_1'x_{21}+c_2'y_{21}+1)-\lambda(c_1'\mu x_{21}+c_2'\mu y_{21}+1)}}$$

$$K=\frac{\lambda\mu c_1'x_{21}+\lambda\mu c_2'y_{21}+\lambda\mu-\lambda\mu c_1'x_{21}-\lambda\mu c_2'y_{21}-\lambda}{\lambda\mu c_1'x_{21}+\lambda\mu c_2'y_{21}+\lambda\mu-\lambda\mu c_1'x_{21}-\lambda\mu c_2'y_{21}-\mu}$$

откуда следует:

$$K=\frac{\lambda\mu-\lambda}{\lambda\mu-\mu}=\frac{\lambda(\mu-1)}{\mu(\lambda-1)}$$

Двойное отношение K может переписаться в следующем виде:

$$K=\frac{\lambda}{\lambda-1}:\frac{\mu}{\mu-1}.$$

И это частное равно двойному отношению первой системы.

Резюме

В статье разбирается вопрос выдерживания двойной зависимости в методах пространственного трансформирования, применительно к фотограмметрии.

Доцент Д-р Мария Домокош, H-1521 Будапешт