

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Ф. ШАРКЕЗИ

Кафедра общей геодезии Института геодезии, Будапештского Технического Университета

Поступило: 1 июля 1976 г.

Исследования по оптимальному проектированию геодезических сетей имеют разные направления. Самыми важными из них являются следующие:

а) оптимизация фигуры большого геодезического построения с точки зрения общих точностных характеристик;

б) оптимизация фигуры специальной сети с точки зрения точности какой-нибудь конкретной функции;

в) оптимальное проектирование вида, числа и точностных характеристик измерений как для случая «а», так и для случая «б»;

г) комплексное оптимальное проектирование обширной сети с учетом как точностных, так и экономических характеристик.

В основу оптимизации по точности теорией оптимального эксперимента поставлены способы сравнения дисперсионных матриц оценок поправок. По [1] перечислим некоторые способы сравнения экспериментов:

$$a) \mathbf{D}(\varepsilon_1) < \mathbf{D}(\varepsilon_2);$$

$$b) |\mathbf{D}(\varepsilon_1)| < |\mathbf{D}(\varepsilon_2)|;$$

$$c) \text{Sp}\mathbf{D}(\varepsilon_1) < \text{Sp}\mathbf{D}(\varepsilon_2);$$

$$d) \max \mathbf{D}_{zz}(\varepsilon_1) < \max \mathbf{D}_{zz}(\varepsilon_2)$$

Заметим, что ε_i обозначает i -й эксперимент т. е. совокупность фигуры и измерений, $\mathbf{D}(\varepsilon_i)$ обозначает дисперсионную матрицу. Добавим еще, что для случая «б» сравниваются комбинации из дисперсионных матриц различных экспериментов.

Из приведенных способов, при оптимальном проектировании несвободных сетей с точки зрения обобщенной точности, считаем самым подходящим способ сравнения определителей дисперсионных матриц. При этом способе (способ b) общность сравнения сопровождается с возможностью некоторых упрощений в вычислительной работе.

Для наглядности, общий процесс оптимального проектирования фигуры несвободной сети покажем на простом примере. Пункты 1, 2, 3 (рис. 1) с

известными координатами считаются твердыми. Искомыми являются координаты пункта P , удовлетворяющие условию

$$|\mathbf{D}(\varepsilon_i)| \rightarrow \min$$

не выходя из заданной области (окружность с центром P_0 и с радиусом r). Веса измеренных направлений равняются единице. При уравнивании по

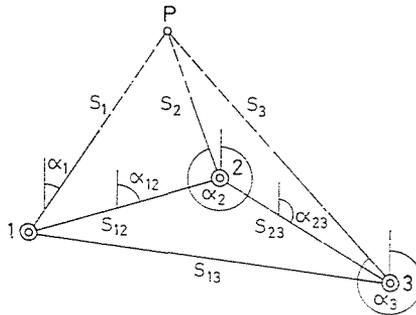


Рис. 1

способу косвенных измерений дисперсионную матрицу D получим путем обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений N , т. е.

$$\mathbf{D} = \mathbf{N}^{-1}$$

Так как \mathbf{D} является положительно определенной $|\mathbf{N}(\varepsilon_i)| > 0$ на основе правила вычисления определителя

$$|\mathbf{D}^{-1}(\varepsilon_i)| = \frac{1}{|\mathbf{D}(\varepsilon_i)|}$$

следовательно задача $|\mathbf{D}(\varepsilon_i)| \rightarrow \min$ заменяется задачей $|\mathbf{N}(\varepsilon_i)| \rightarrow \max$. Учитывая обозначения рис. 1 запишем определитель матрицы коэффициентов нормальных уравнений в аналитической форме:

$$|\mathbf{N}| = \varrho^4 \left\{ \frac{\sin^6 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2 (\alpha_{12} - \alpha_1) s_{12}^4 \sin^2 (\alpha_{12} - \alpha_2)} + \frac{\sin^4 (\alpha_2 - \alpha_3) \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{s_{12}^2 s_{23}^2 \sin^2 (\alpha_{12} - \alpha_1) \sin^2 (\alpha_{23} - \alpha_2)} + \frac{\sin^2 (\alpha_1 - \alpha_3) \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 (\alpha_2 - \alpha_3)}{s_{12}^2 s_{23}^3 \sin^2 (\alpha_{12} - \alpha_2) \sin^2 (\alpha_{23} - \alpha_2)} \right\}$$

Для отыскания экстремума применяем проекционный метод градиентов.

Для большинства случаев определение, производных целевой функции $F\left(\frac{x^{(i)}}{n, 1}\right)$ невозможно, поэтому компоненты градиента определим при помощи разностных соотношений:

$$\frac{\text{grad}}{n, 1} F(x^{(i)}) = \frac{\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ F(x_1^{(i)} + h, x_2^{(i)}, \dots, x_j^{(i)} + h, \dots, x_n^{(i)}) - (F x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \dots\dots\dots \end{matrix}}{h} + \frac{\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ F(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} + h) - (F x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \dots\dots\dots \end{matrix}}{h}$$

Вектор неизвестных удовлетворяющий условию оптимума получим в результате итерационного процесса:

$$\frac{x^{(i+1)}}{n, 1} = \frac{x^{(i)}}{n, 1} + \lambda_i \frac{\text{grad}}{n, 1} F(x^{(i)})$$

В том случае, когда новый вектор неизвестных выходит из заданной области, следует применять способ проекции. В пространстве с размерностью n проекция внешнего пункта a на ограниченное, замкнутое, выпуклое множество A имеет следующее определение: проекцией a на A называется пункт a' , являющийся членом множества A и удовлетворяющий условию $\min d(x, a) = d(a', a)$, причем $d(x, a)$ обозначает эвклидово расстояние т. е.

$$d(x, a) = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right\}^{1/2}$$

Частный случай $n = 2$ (т. е. проекция на плоскости) иллюстрируется рисунком 2.

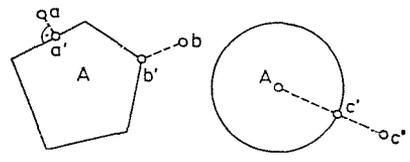
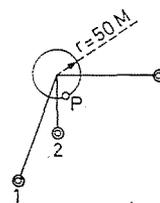


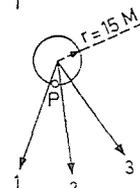
Рис. 2

В таблице 1 приведены числовые значения решений трех варианта первой задачи. Следует заметить, что задача была решена на малой, настольной вычислительной машине, чем доказано, что оптимальное решение простых задач не вызывает больших затрат вычислительного труда.

| x_1 | y_1 | x_2 | y_2 | x_3 | y_3 |
|-----------|-----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 100,00 | 10,00 | 210,00 | 110,00 | 350,00 | 330,00 |
| x_{p_0} | y_{p_0} | x_p | | y_p | |
| 350,00 | 100,00 | 300,0038372 | | 100,6195761 | |



| x_1 | y_1 | x_2 | y_2 | x_3 | y_3 |
|-----------|-----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 100,00 | 10,00 | 50,00 | 100,00 | 10,00 | 330,00 |
| x_{p_0} | y_{p_0} | x_p | | y_p | |
| 350,00 | 100,00 | 335,1686634 | | 102,2430898 | |



| x_1 | y_1 | x_2 | y_2 | x_3 | y_3 |
|-----------|-----------|-------------|--------|------------|--------|
| 100,00 | 10,00 | 210,00 | 110,00 | 10,00 | 330,00 |
| x_{p_0} | y_{p_0} | x_p | | y_p | |
| 350,00 | 100,00 | 335,0527843 | | 96,7427309 | |

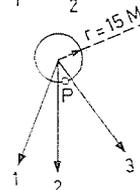


Таблица 1

В качестве примера для более сложного построения может служить центральная система (рис. 3/а) с твердыми пунктами А и G. Измерены все направления с весами $p = 1$. Степень свободы системы равняется десяти, за неизвестными приняли углы X_1, \dots, X_{10} . Условием оптимального проектирования приняли, что все углы системы должны удовлетворять неравенству

$$30^\circ < \text{угол} < 120^\circ$$

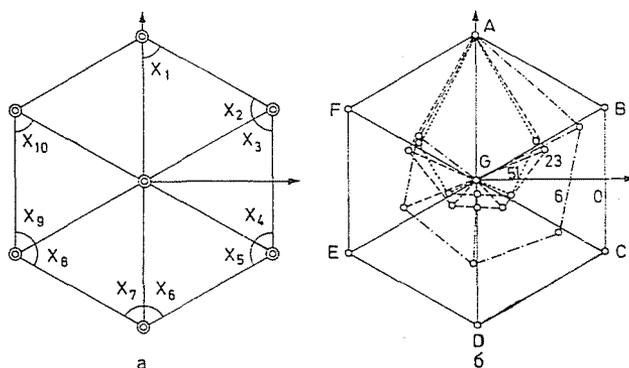
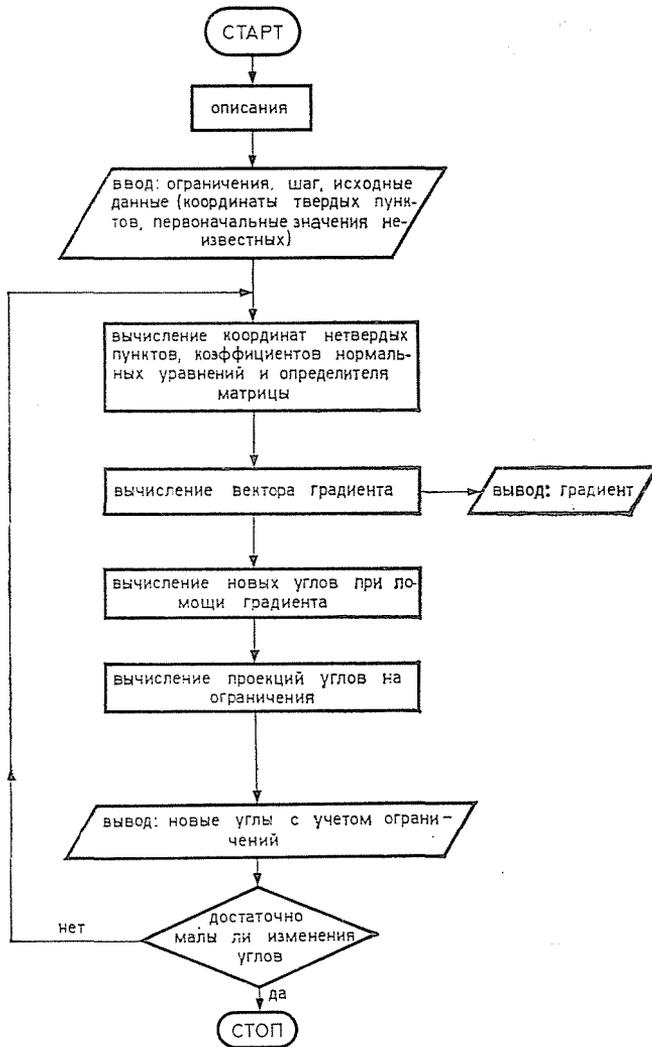


Рис. 3

Вычисления производились на ЭВМ ОДРА-1204 при помощи программы на языке АЛГОЛ. Из-за недостатка мест приведем лишь сокращенную блок схему программы.



Результаты трех этапов итерационного процесса графически представлены на рисунке 3/б. Численные результаты тех же приближений приведены в таблице 2.

Полученная фигура центральной системы свидетельствует о том, что при изучении оптимальной фигуры обширной геодезической сети не специального назначения нет обоснования принять какой-нибудь пункт твердым, т. е. безошибочным. В последние годы в литературе часто встречаются публикации о так называемом свободном уравнивании местных сетей (см. например [2] и [3]). Сущность метода заключается в том, что все пункты построения считаются приближенно определенными, т. е. в процессе уравнивания

| ПРИБЛИЖЕНИЯ | V_y | V_x | C_y | C_x | D_y | D_x |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $i=0$ | 8,660-01 | 5,000-01 | 8,660-01 | -5,000-01 | -4,572-11 | -1,000-00 |
| $i=6$ | 7,116-01 | 3,617-01 | 5,530-01 | -3,835-01 | -5,624-2 | -5,928-01 |
| $i=23$ | 4,330-01 | 2,500-01 | 2,165-01 | -1,250-01 | 2,857-12 | -1,250-01 |
| $i=51$ | 4,655-01 | 1,937-01 | 1,703-01 | -1,923-01 | -3,866-03 | -2,323-01 |
| i | E_y | E_x | F_y | F_x | | |
| $i=0$ | -8,660-01 | -5,000-01 | -8,660-01 | 5,000-01 | | |
| $i=6$ | -5,012-01 | -2,294-01 | -4,362-01 | 3,053-01 | | |
| $i=23$ | -2,165-01 | -1,250-01 | -4,330-01 | 2,500-01 | | |
| $i=51$ | -1,755-01 | -1,863-01 | -4,580-01 | 2,069-01 | | |

Таблица 2

координаты всех пунктов получают поправки. Матрица коэффициентов нормальных уравнений имеет дефект, но единственное решение системы возможно при помощи главной g -обратной матрицы полученной из условия $X^T X = \text{minimum}$. Для дисперсионной матрицы системы одновременно соблюдается условие $\text{Sp}D = \text{minimum}$. Так как матрица D особенная оптимальное проектирование фигуры нельзя производить по способу сравнения определителей.

Хотя применимость способа для уравнивания сетей и вызывает споры среди специалистов, бесспорно, что исследование действительных оптимальных фигур построений не может обходиться без применения способа. О результатах исследований в этом направлении собираемся сообщить в самое близкое будущее.

Для сетей специального назначения оптимальное проектирование фигуры имеет более частный характер. С одной стороны, при проектировании таких сетей стремимся к минимуму одной или нескольких местных ошибок, с другой стороны, геометрия сети более или менее жестко определяется целью построения. Самой общей характеристикой местных ошибок является относительная ошибка положения двух пунктов, изображаемая наглядно при помощи относительного эллипса ошибок (см. [4]).

Примером оптимального проектирования фигуры специальной сети на основе минимума относительных ошибок двух пунктов может служить построение, изображенное на рисунке 4/а. Пункты F и G являются твердыми, плановые координаты x и y нетвердых пунктов A, B, C, D, E поочередно обозначим через 1, 2, ..., 10. В процессе оптимального проектирования координаты 5, 6, 7, 8 изменяются в областях, ограниченных окружностями с радиусом $r = 50$ м. Из элементов дисперсионной матрицы целой системы D образуем дисперсионную матрицу приращений координат пунктов A, B :

$$D_{AB} = \left| \begin{array}{c|c} D_{11} - 2D_{31} + D_{33} & D_{12} - D_{14} - D_{23} + D_{34} \\ \hline D_{21} - D_{23} - D_{41} + D_{43} & D_{22} - 2D_{24} + D_{44} \end{array} \right|$$

или
$$D_{AB} = \left| \frac{D_{I,III} D_{I,IV}}{D_{II,III} D_{II,IV}} \right|, \quad \text{где } D_{I,IV} = D_{II,III}.$$

Целевой функцией приняли обобщенную дисперсию приращений координат $\Delta 1,3$ и $\Delta 2,4$, т. е. добивались выполнения условия $|D_{AB}| \rightarrow \min$. Результаты оптимального проектирования изображены на рисунке 4/б, численные значения исходных и оптимальных координат приведены в таблице 3.

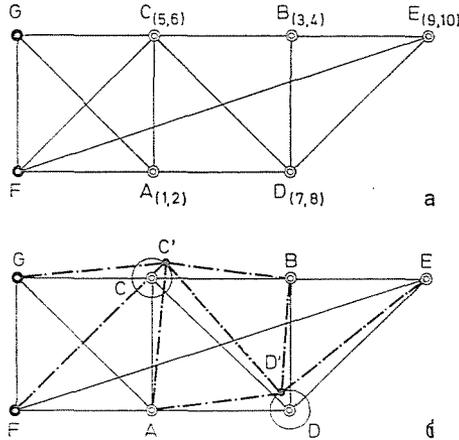


Рис. 4

| | | | | | | | | | | |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|--|--|
| | X_F | Y_F | X_G | Y_G | 1 | 2 | | | | |
| ИСХОДНЫЕ КООРДИНАТЫ | 500,000 | 500,000 | 1000,000 | 500,000 | 500,000 | 1000,000 | | | | |
| ОПТИМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ | 500,000 | 500,000 | 1000,000 | 500,000 | 500,000 | 1000,000 | | | | |
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | |
| ИСХОДНЫЕ КООРДИНАТЫ | 1000,000 | 1500,000 | 1000,000 | 1000,000 | 500,000 | 1500,000 | 1000,000 | 2000,000 | | |
| ОПТИМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ | 1000,000 | 1500,000 | 1027,132 | 1025,536 | 537,671 | 1467,354 | 1000,000 | 2000,000 | | |

Таблица 3

Более частным примером оптимального проектирования специальной сети может служить следующая задача. Предположим, что разбивку прямой $A B$ (рисунок 5/а) следует осуществить исходя из пунктов A и B при помощи разбивочных углов α и β , вычисленных на базе средней ориентировки на соответствующих станциях. Так как при безошибочных измерениях

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

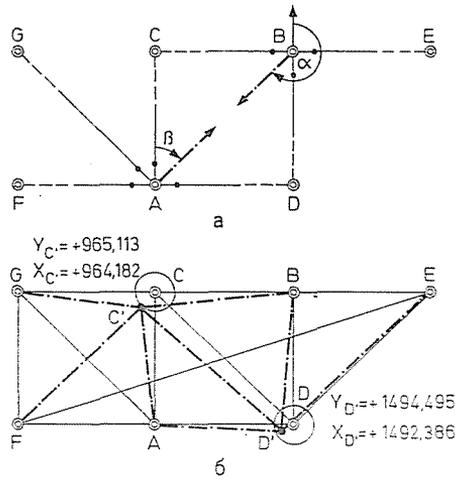


Рис. 5

следовательно функция неизвестных координат, обуславливающая точность разбивки

$$\begin{aligned}
 F = \alpha - \beta = & \operatorname{arctg} \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} - \\
 & \frac{\operatorname{arctg} \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} - l_1 + \operatorname{arctg} \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} - l_2 + \operatorname{arctg} \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} - l_3}{3} - \\
 & - \operatorname{arctg} \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \\
 & \operatorname{arctg} \frac{y_F - y_A}{x_F - x_A} - l_4 + \operatorname{arctg} \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} - l_5 + \operatorname{arctg} \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \\
 & + \frac{-l_6 + \operatorname{arctg} \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} - l_7}{4}
 \end{aligned}$$

За целевую функцию, подлежащую минимализации принимаем

$$\frac{1}{P_F} = f^T \cdot Df$$

Результаты оптимального проектирования приведены на рисунке 5/б.

Резюме

Рассматриваются некоторые теоретические основы оптимального проектирования геометрии геодезических плановых сетей. Излагается алгоритм проектирования на ЭВМ. На основе численных решений делается вывод о необходимости применения новых способов уравнивания при изучении общих структурных характеристик оптимальности обширных сетей. Приводятся два примера из области оптимального проектирования специальных сетей. Первый пример имеет более общий характер, второй пример показывает возможность учета более определенных потребностей разбивки.

Литература

1. Федоров В. В.: Теория оптимального эксперимента. Москва, 1971.
2. MITTERMAYER, E.: Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze. ZfV. 9/1971.
3. GRAFAREND, E.—SCHAFFRIN, B.: Unbiased free net adjustment. Survey Review, 174/1974.
4. VERB-HEGÉNYI M.: A hálózati relatív hibaellipszisek számítása. Geodézia és Kartográfia, 5/1972.

Доцент Ференц Шаркёзи, ктн, Н-1521 Будапешт