

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОКА МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

И. КОНТУР

Институт водного хозяйства и гидротехнического строительства
Будапештского технического университета
(Поступило 1 ноября 1976 года)
Представлено проф. д.т.н. М. КОЗАК

В работе для описания стока применяется метод каскадных моделей в дискретном состоянии. Движение воды может быть заменено моделью случайного блуждения частиц воды. Линейная серия водохранилищ может быть описана вероятностной моделью (случайное блуждение). Однонаправленная (вниз) и двухнаправленная (вниз и вверх) модели блуждения представляют собой случаи накопления воды в холмистой и равнинной водосборах. Дальнейшее развитие модели — это случаи водохранилищ, соединенных последовательно, а также параллельно. Покажем, каким образом могут быть представлены в этой системе известные модели *Нэша* и *Дуга*. Наконец, укажем на то, что модель является специальным случаем описания пространства дискретного состояния.

1. Введение

Модели линейного водохранилища и канала хорошо известны в круге моделей гидрологических систем [2, 3, 7, 8, 11]. С другой стороны, можно упомянуть о так называемой макрогидрологической модели гидрологической системы [6]. Это значит, что (условно) следим за путем единственной частицы воды, что приводит к модели случайного блуждения.

Частица воды может находиться в различных состояниях, а следовательно, и пройти различные пути блуждения. Для визуального представления пути блуждения очень пригодны графы [5], которые близки к инженерному, гидрологическому представлению.

В случае линейных вероятностных законов, если закономерность движения единственной частицы воды совпадает с закономерностью движения множества, то представляется возможным проследить и законы движения N частиц (объемом S) воды. Модель блуждения может быть математически описана матрицей переходных вероятностей [9] и представляется изображением в форме графов. Гидрологическая физическая действительность может замещаться серией водохранилищ, которые образуют состояния, являющиеся, таким образом, дискретными [4]; далее, дискретизируется и время, т. е. час-

тица воды может изменять свое состояние лишь в моменты времени $t = 1, 2, \dots$, $\Delta t = \text{const}$.

Дискретизация времени очевидна, так как наблюдение гидрологической системы в общем тоже дискретно [2]. С точки зрения использования ЭВМ дискретные системы намного выгоднее.

Идея случайного блуждания частицы воды в конечном итоге приводит к хорошо фиксированной детерминированной системе. В работе обобщается модель серии водохранилищ и указывается, что гидравлические условия могут быть встроены в вероятностную матрицу перехода состояния в соответствии с характером модели. Итак, сами матрицы тоже дают визуальную картину о системе и характере течения воды. Для определения элементов матрицы следует задать, какая доля набранного количества воды поступает в следующее водохранилище за выбранную единицу времени (Δt), или же, что то же самое, следует ответить на вопрос, какова вероятность того, что данная частица воды за единицу времени Δt поступит из одного водохранилища в другое. Временной ряд расхода из системы водохранилища однозначно может быть определен на основаниях входов. Серия водохранилищ может быть представлена тоже [1, 2, 11] как процесс генерирования ряда времени.

При математическом выводе нами была использована книга П. Рожа «Линейная алгебра» [9].

2. Модель линейного канала

Модель линейного канала, собственно говоря, выполняет неизменное дальнейшее проведение импульса, вносит в систему задержку времени, но расплывания (дисперсии), характерного для процесса накопления воды в русле, здесь не наблюдается.

Пусть $S_j(t)$ будет состоянием канала j в момент времени t , где под состоянием следует понимать количество воды, протекающей тогда через канал или там накопленной. Состояния $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$ сводятся в рядовой вектор S_t , и тогда из состояния S_{t-1} состояние S_t вычисляется следующим образом:

$$S_t = S_{t-1} \cdot K. \quad (1a)$$

В подробно описанном виде

$$[S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)] = [S_1(t-1), S_2(t-1), \dots, S_n(t-1)] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1b)$$

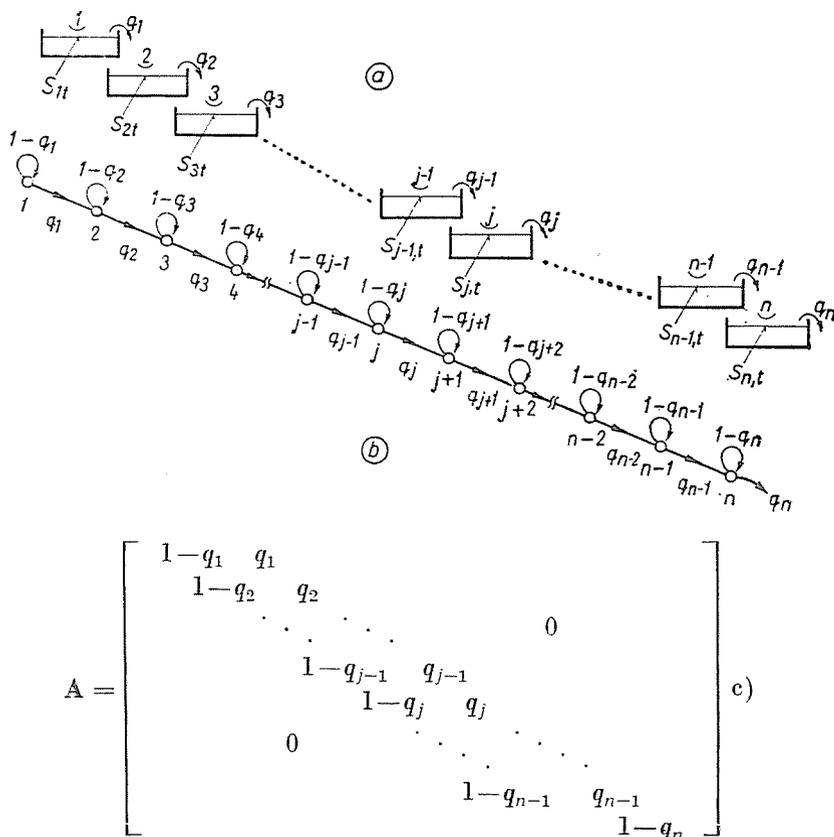


Рис. 2. Традиционная модель каскада Нэша. (Свободное накопление, случай холмистой местности)

Наша система является линейной, остается в силе принцип наложения, и, таким образом, имеется не только s_0 исходных состояний, а в отдельные водохранилища поступают в момент времени k объемы воды $x_{1;k}$, $x_{2;k}$, ... $x_{n;k}$. Обозначив их через x_k , конечное состояние s_t будет

$$s_t = s_0 A^t + \sum_{k=1}^t x_k \cdot A^{t-k}. \tag{10}$$

Из вышесказанного видно, что показатель степени матрицы A^t имеет решающее значение. Рассмотрим поэтому m -ю степень A :

$$A^m = (1 - q) I + q K^m = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (1 - q)^{m-i} q^i K^i. \tag{11}$$

Из nilпотентного свойства ($K^n = 0$) матрицы K следует, что суммирование достаточно выполнить только до n :

$$A^m = \sum_{i=1}^n \binom{m}{i} (1 - q)^{m-i} q^i K^i. \tag{12}$$

Из специального свойства nilпотентной матрицы \mathbf{K} следует, что можно просто вычислить поступающее из водохранилища l в водохранилище j количество воды после m шагов (после истечения единицы времени m), или же, что то же самое, вероятность того, что частица воды, находящаяся в момент времени $t = 0$ в водохранилище l , с какой вероятностью будет находиться в момент времени $t = m$ в водохранилище j :

$$P^{(m)}(l, j) = \binom{m}{j-l} (1-q)^{m-j+l} q^{j-l}; \quad j > l. \quad (13)$$

Водохранилища пронумерованы сверху вниз, так как вода может поступать из выше расположенных водохранилищ только вниз (значит, обратного течения нет).

Эта серия водохранилищ показана на рис. 2а; на рис. 2б представлены графы, а на рис. 2с серия водохранилищ, т. е. матрица представления графов. Этот случай служит для моделирования свободного накопления воды в холмистой местности.

4. Модель случайного блуждания для серии водохранилищ

(Несвободное накопление, случай равнинной поверхности)

В п. 3 было рассмотрено положение, когда в серии водохранилищ допускается течение воды только в одном направлении, но на равнинной территории, напротив, течение воды подвержено подпору снизу, значит, наполненность нижнего водохранилища воздействует на верхнее водохранилище, т.е. вниз протекает меньше воды. Поскольку ограничимся линейным гидравлическим уравнением, характеризуемым формулой (3), то $y = qS$ — количество воды, текущее сверху вниз, а $y' = pS$ — количество воды, текущее снизу вверх ($p < q$). Это можно себе представить так, что перетекание происходит в два этапа; они оба отдельно снизу не подвержены влияниям. Объединение двух процессов приводит к конечному результату (рис. 3, а). Графовое изображение показано на рис. 3, б.

Аналогично (4) запишем уравнение неразрывности водохранилища:

$$\begin{aligned} S_{j,t} &= S_{j,t-1} + y_{j-1,t-1} - y_{j,t-1} - y'_{j,t-1} + y'_{j+1,t-1} = \\ &= S_{j,t-1} + qS_{j-1,t-1} - qS_{j,t-1} - pS_{j,t-1} + pS_{j+1,t-1} = \\ &= (1 - q - p) \cdot S_{j,t-1} + qS_{j-1,t-1} + pS_{j+1,t-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ради простоты была взята однородная серия водохранилищ $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_n$. Состояния $S_{1t}, \dots, S_{jt}, \dots, S_{nt}$ в момент

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} 1) \\ 2) \\ \vdots \\ j-1) \\ \hline j) \\ j+1) \\ \vdots \\ n-1) \\ n) \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1-q & q & \circ & \\ & p & 1-p-q & q \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & p & 1-p-q & q & \circ \\ \hline & & & & p & 1-p-q & q \\ & & & & & & & \circ \\ & & & & & & & & p & 1-p-q & q \\ & & & & & & & & & & & \circ \\ & & & & & & & & & & & & p & 1-p-q & q \end{array} \right] \quad (16)$$

$\widehat{1} \quad \widehat{2} \quad \widehat{j-1} \quad \widehat{j} \quad \widehat{j+1} \quad \widehat{n-1} \quad \widehat{n}$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cccc} \alpha q_2 & \circ & q_1 & \circ \\ \alpha q_2 & & q_1 & \circ \\ \ddots & & \ddots & \ddots \\ 1-q_1 & \circ & q_1 & \circ \\ \hline \alpha q_2 & \circ & & \\ \alpha q_2 & & & \\ \ddots & & & \\ 1-q_1 & \circ & & \\ \hline & & \alpha q_2 & \circ \\ & & \alpha q_2 & \\ \ddots & & \ddots & \\ 1-q_1 & \circ & & \\ \hline & & & & 1-q_2 q_2 & \circ \\ & & & & 1-q_2 q_2 & \\ \ddots & & & & \ddots & \\ \circ & & & & \circ & \alpha \end{array} \right] \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (m) \\ (m+1) \\ \vdots \\ (2m) \\ \vdots \\ (i, j) \\ \vdots \\ (n, m) \end{array} \quad (22)$$

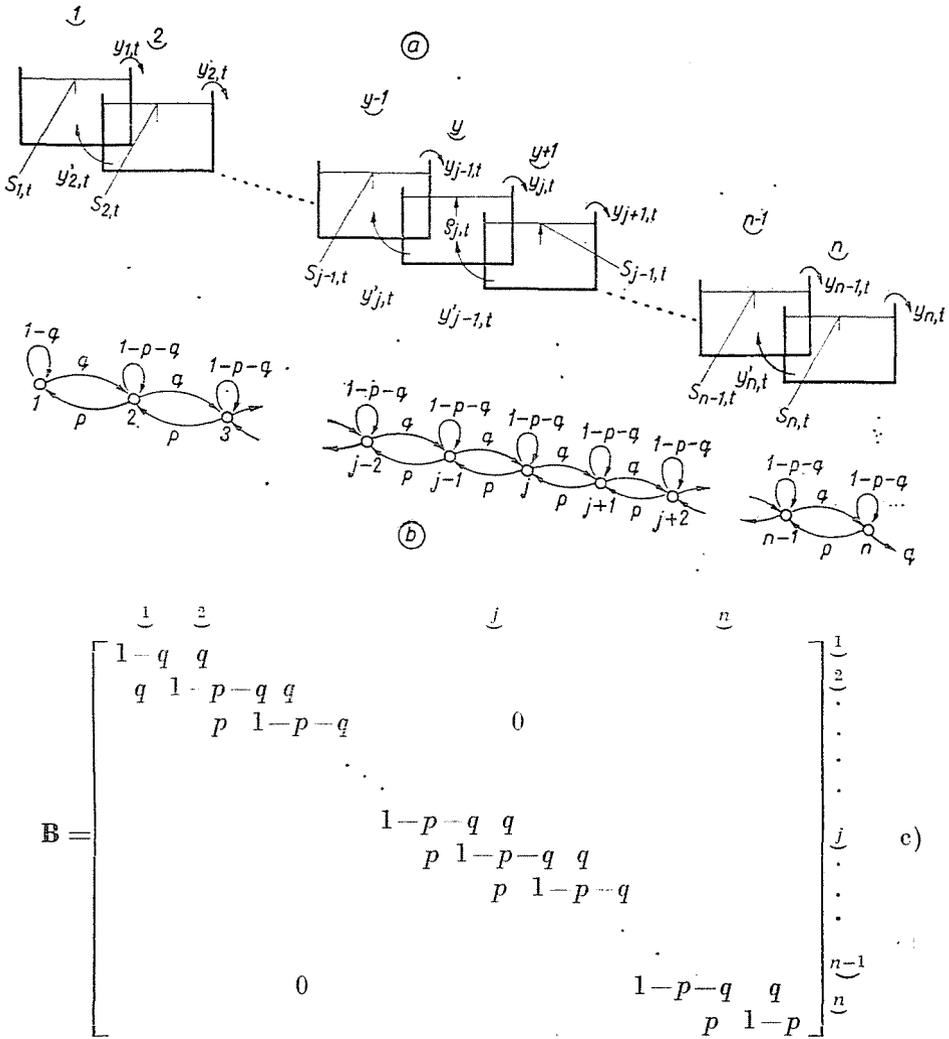


Рис. 3. Обобщенная модель каскада (накопление, подверженное влиянию, случай равнинной местности)

времени t сведены в рядовой вектор S_t , и тогда

$$S_t = S_{t-1}B, \tag{15}$$

где вид матрицы B

Аналогично описанному в п. 3. состояние S_t из исходного состояния S_0 может быть выражено t -й степенью B :

$$S_t = S_0 B^t, \tag{17}$$

а также обозначив вектор момента времени непрерывных внешних воздействий через \mathbf{x}_k , получим

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{B}^t + \sum_{k=1}^t \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{B}^{t-k}. \quad (18)$$

Направление течения воды, наклон рельефа задаются соотношением между вероятностью p и q , если — вероятность течения, тождественная направлению порядковой нумерации водохранилищ, а p — вероятность противоположно направленного течения. Из этого следует, что сопоставление друг с другом величин p и q позволяет определить основное направление течения.

5. Параллельные серии водохранилищ

Обобщение предыдущих двух глав дает систему водохранилищ, соединенных последовательно и параллельно. Пусть будет n водохранилищ, обозначенных через $i = 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, \dots$ (рис. 4, а). Учитывая модель линейного водохранилища в п. 2, $S_{i,j}(t)$ водохранилище (i, j) уравнение неразрывности

$$S_{i,j}(t) = S_{i,j}(t-1) + q_1 S_{i-1,j}(t-1) + q_2 S_{i,j-1}(t-1) - q_1 S_{ij}(t-1) - q_2 S_{i,j}(t-1), \quad (19)$$

где q_1 — вероятность течения в направлении i ,
 q_2 — вероятность течения в направлении j .

Партиципионируя матрицу состояний водохранилища $S_{i,j}(t)$ как вектор, получаем описание состояния порядковый

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t-1) \cdot \mathbf{C} \quad (20)$$

$(1 \times n \cdot m) \quad (1 \times n \cdot m) \cdot (n \cdot m \times n \cdot m),$

где гипервектор (t)

$$\mathbf{S}(t) = [(S_{11}(t), S_{12}(t), \dots, S_{1j}(t), \dots, S_{1m}(t)), \dots, (S_{i1}(t), S_{i2}(t), \dots, S_{ij}(t), \dots, S_{im}(t)), \dots, (S_{n1}(t), S_{n2}(t), \dots, S_{nj}(t), \dots, S_{nm}(t))]. \quad (21)$$

Введением $a = 1 - q_1 - q_2$ вид гиперматрицы \mathbf{C}

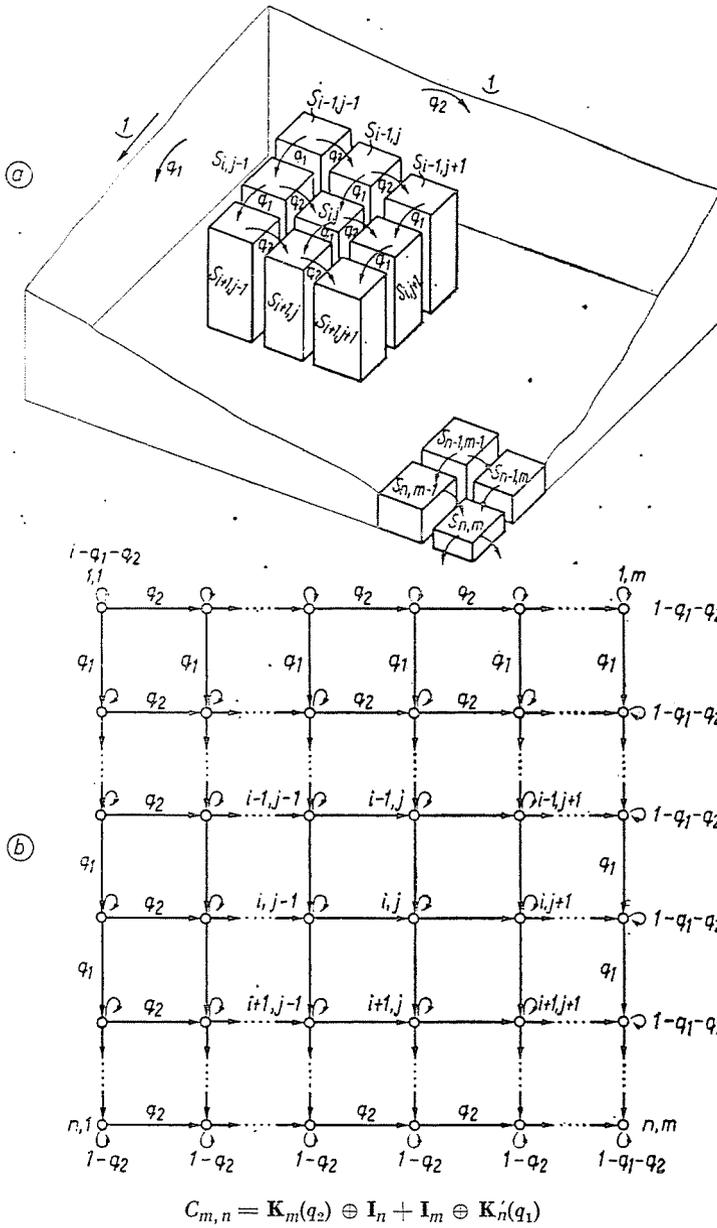


Рис. 4. Каскады Нэша, соединенные последовательно и параллельно (свободное накопление)

Графовое представление показано на рис. 4б. Сумма рядов стохастической матрицы переходных вероятностей (22), за исключением последней строки, равна единице. Это небольшое различие было необходимо потому, что состояние вне системы не было определено.

Вводя матрицы с размерами m и n

$$\mathbf{K}_m(q) = \begin{bmatrix} -q & q & & & & \\ & -q & q & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -q & q & \\ 0 & & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \dots \\ (m-1 \\ (m \end{matrix}, \mathbf{K}'_n(q) = \begin{bmatrix} 1-q & q & & & & \\ & 1-q & q & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1-q & q & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ \dots \\ (n-1 \\ (n \end{matrix} \quad (23a, b)$$

и принимая во внимание определение непосредственного произведения (Кронеккера), имеем

$$\mathbf{K}_{m,n} = \mathbf{K}_m(q_2) \oplus \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \oplus \mathbf{K}'_n(q_1) - (q_1 + q_2)_{nm, nm}, \quad (24)$$

где \oplus — обозначение непосредственного произведения,

\mathbf{I} — единичная матрица с размерами n и m , и $(q_1 + q_2)_{nm, nm}$ символизируют, что от элемента нижнего правого угла следует отнять q_1 и q_2 .

Как видно, в случае зависимостей (9) и (11) из произвольного состояния $\mathbf{S}(0)$ состояние $\mathbf{S}(t)$ тоже может быть определено ($\mathbf{S}(t)$ принимается согласно (21)):

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(0) \cdot \mathbf{C}^t. \quad (25)$$

Наконец, рассмотрим коротко систему последовательно и параллельно соединенных водохранилищ для случая подпора воды (рис. 5а).

Пусть $S_{i,j}(t)$ будет состояние водохранилища (i, j) в момент времени t , тогда вероятности течения вниз q_1 и q_2 (в направлении нумерации), а также вероятность течений p_1 и p_2 (в противоположном направлении нумерации), то уравнение неразрывности

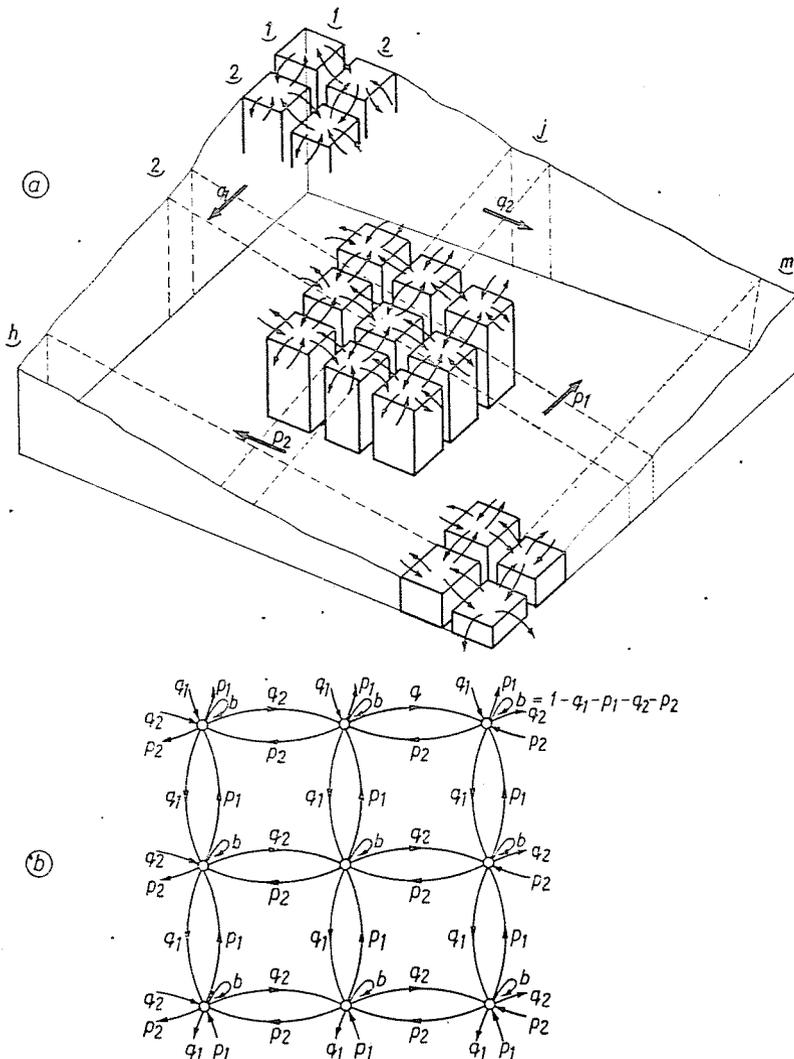
$$\begin{aligned} S_{i,j}(t) = & S_{i,j}(t-1) + q_1 S_{i-1,j}(t-1) + q_2 S_{i,j-1}(t-1) - \\ & - q_1 S_{i,j}(t-1) - q_2 S_{i,j}(t-1) + p_1 S_{i+1,j}(t-1) + p_2 S_{i,j+1}(t-1) - \\ & - p_1 S_{i,j}(t-1) - p_2 S_{i,j}(t-1). \end{aligned} \quad (26)$$

Написав состояния наполнения в виде гипервектора $\mathbf{S}(t)$ генерирование

из начального состояния $S(0)$

$$S(t) = S(0) \cdot D^t, \tag{27}$$

где D — гиперматрица в ряде, соответствующем случаю равнинной территории, описывающая систему параллельно соединенных водохранилищ. Графовое представление матрицы D показано на рис. 5, *b*.



$$D_{mn} = H_m(q_2, p_2) \oplus I_n + I_m \oplus H_n(q_1, p_1)$$

Рис. 5. Каскады, соединенные последовательно и параллельно для случая накопления, подверженного влиянию

Введя

$$\mathbf{H}_m(q, p) = \begin{bmatrix} -q & q & & & \\ p & -q-p & q & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p & -q-p & q \\ & & & p & -p \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ \\ (m) \end{matrix}, \quad \mathbf{H}'_n(q, p) = \begin{bmatrix} 1-q & q & & & \\ p & 1-p-q & q & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p & 1-p-q & q \\ & & & p & 1-p \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ \\ (n) \end{matrix} \quad (28a, b)$$

и учитывая определение непосредственного произведения, получаем

$$D_{m \ n} = \mathbf{H}_m(q_2, p_2) \oplus \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_m \oplus \mathbf{H}'_n(q_1, p_1) - (q_1 + q_2)_{nm, nm}. \quad (29)$$

Определение состояния $\mathbf{S}(t)$ из начального состояния $\mathbf{S}(0)$ может производиться с помощью формулы

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(0) D^t. \quad (30)$$

6. Обобщение

В третьей главе матрицей A была описана модель каскада Нэша. Для временного ряда истока каскада, состоящего из водохранилищ $y_n(t) = q\mathbf{S}_n(t)$, в случае притоков x_1, x_2, \dots, x_k следует пользоваться зависимостью (10), где входной величиной являются первые элементы векторов x_k , а остальные равны нулю. Также в векторе \mathbf{S}_t следует обращать внимание только на последний элемент $S_{n,t}$ (промежуточные состояния не представляют интереса). Единичный гидрограф $y_n(t)$, возникающий под действием единичного импульса $\mathbf{S}_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} h_n(t) &= q \cdot [1, 0, 0, \dots, 0] \cdot \mathbf{A}_n^t = \\ &= q \cdot p^{(t)}(1, n) = \begin{cases} \binom{t}{n-1} (1-q)^{t-n+1} q^n, & t \geq n \\ h_n(t) = 0, \dots, & t < n \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Обобщение каскада Нэша является системой с матрицей B , допускающей и обратное течение. Единичный гидрограф может быть вычислен аналогично предыдущим: $y_n(t) = q\mathbf{S}_0(t)$ может генерироваться с помощью начального вектора $\mathbf{S}_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$:

$$\left. \begin{aligned} h_n(t) &= q \cdot [1, 0, 0, \dots, 0] \cdot \mathbf{B}_n^t \dots, & t \geq n \\ h_n(t) &= 0 \dots, & t < n \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

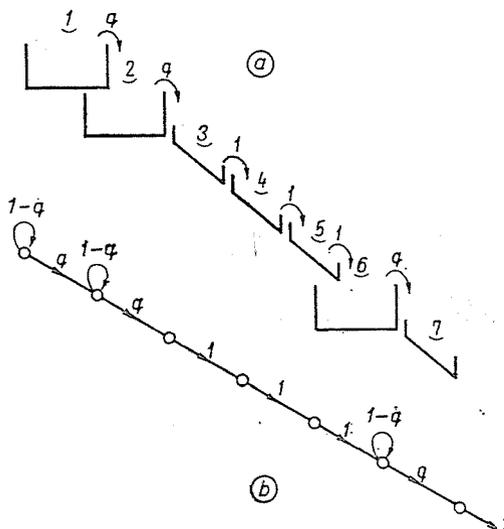


Рис. 6. Модель Дюжа: линейная комбинация водохранилище-канал

где $\mathbf{M}(t)$ — вариантная во времени матрица данных измерений;

$\mathbf{y}(t)$ — вектор измеренных переменных, размером r ;

\mathbf{S}' — трансформированный вектора состояния.

При использовании формул (31) и (32) специально принимались значения $r = 1$ и $\mathbf{M} = (0, 0, \dots, 0)$.

Объединение формул (36) и (37) дает выражение

$$\mathbf{y}(t) = \underset{(r \cdot 1)}{\mathbf{M}} \cdot \underset{(r \cdot n)}{\Phi} \cdot \underset{(n \cdot n)}{\mathbf{s}(t-1)} + \underset{(r \cdot n)}{\mathbf{M}} \cdot \underset{(n \cdot m)}{\Gamma} \cdot \underset{(m \cdot 1)}{\mathbf{x}(t)}, \quad (38)$$

для инвариантного во времени случая. (Знак преобразования был пропущен.)

Приведенным применением зависимостей (36), (38) может быть записано

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{t-1} \mathbf{M} \Phi^k \Gamma \mathbf{x}(t-k) + \mathbf{M} \Phi^t \mathbf{S}_0. \quad (39)$$

Специальное свойство Φ упрощает формулу.

Метод расчета трансформации паводковых волн МАСКИНГУМА представляет собой случай двух водохранилищ, где $\mathbf{S}_1(t)$ — накопление, $\mathbf{S}_2(t)$ — отлив:

$$\mathbf{S}_1(t) = K \cdot X \cdot R(t) + (1 - X) \cdot K \cdot \mathbf{S}_2(t), \quad (40)$$

где K и X — параметры, $R(t)$ — функция прилива.

Уравнение неразрывности

$$\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_1(t-1) + R(t) - \mathbf{S}_2(t). \quad (41)$$

Из двух уравнений для описания состояния получаем

$$\begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-X)K-1}{(1-X)K} & 0 \\ 1 & -(1-X)K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1(t-1) \\ S_2(t-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{KX}{(1-X)K} \\ 1 & -KX \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R(t) \\ R(t-1) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

7. Примеры

Системы, рассмотренные в предыдущих пунктах, иллюстрируются несколькими примерами. На рис. 7. видна модель серии простых линейных водохранилищ, описанных матрицей A для случая $q = 0,2$. Это значит, что за

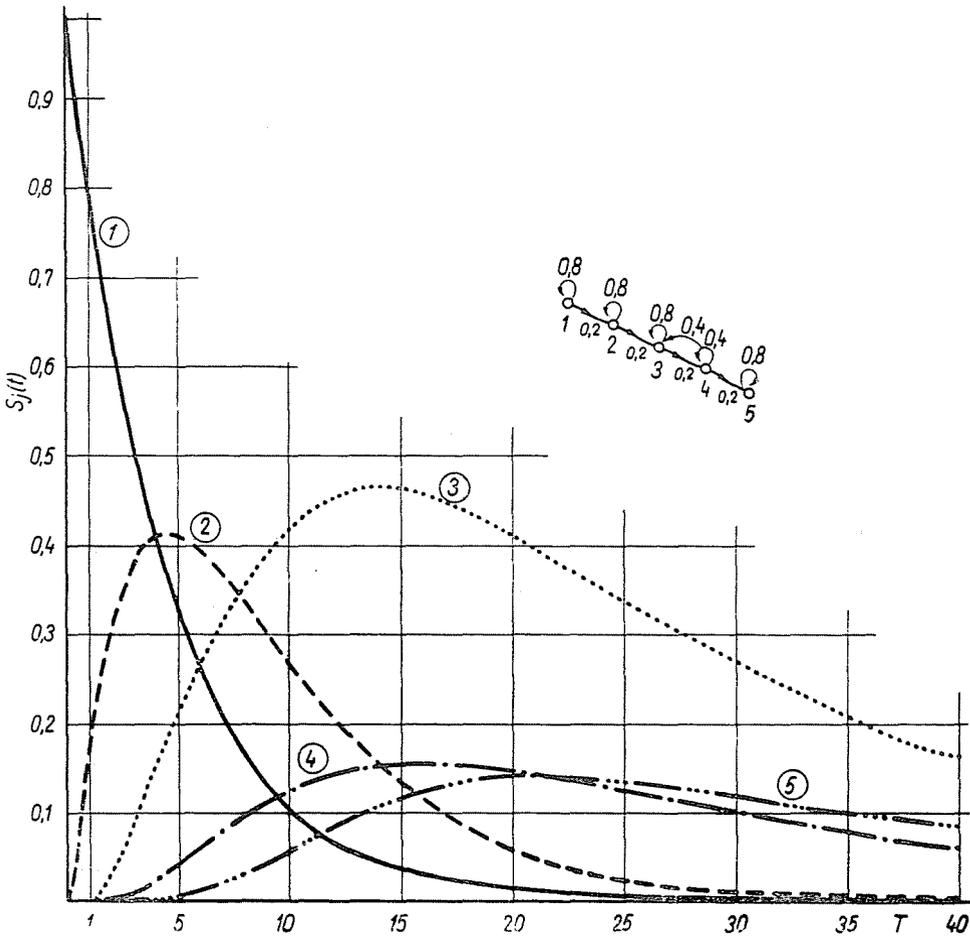


Рис. 7. Единичные гидрографы притока традиционной модели каскада, $q = 0,2$.

единицу времени из водохранилища вытекает одна пятая доля накопленного там количества воды. На рисунке показано последовательное соединение пяти водохранилищ, накопленное в отдельных водохранилищах количество воды для случая, если запас воды $S(0)$ в начальный период в первом водохранилище в момент времени $t = 0$ был единичным. Кратные количества воды могут быть получены в процессе линейного расчета.

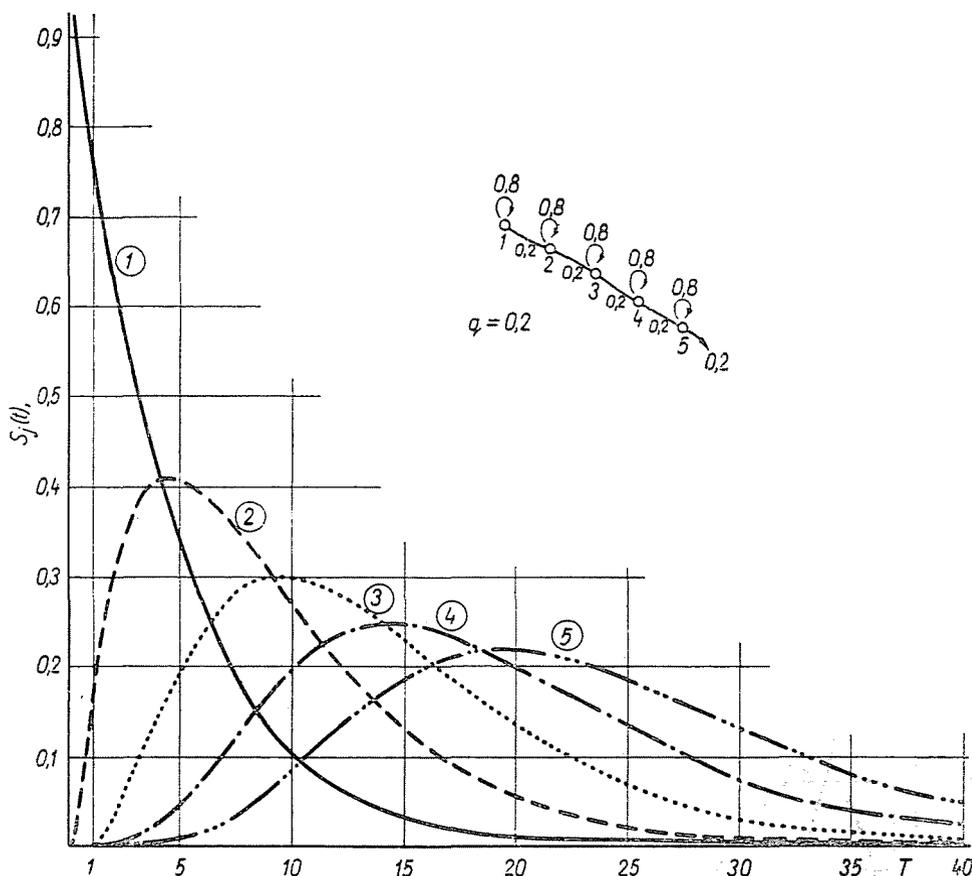


Рис. 8. Единичные гидрографы притока модели каскада для случая обратного подпора в одном водохранилище

На рис. 8 представлена такая специальная система, где из водохранилища 4 (состояния) происходит обратное течение с вероятностью, равной 0,4, в водохранилище 3. На рисунке хорошо видно, что состояние 3 «поглощает» воду, в результате чего возникает значительное накопление, а приращение водохранилищ 4 и 5 появляется со значительным замедлением (водохранилище 3 играет роль действительного водохранилища).

На рис. 9 дается пример для случая каскадной модели равнинной местности, характеризуемой матрицей \mathbf{B} при параметрах $q = 0,3$ и $p = 0,1$. Средняя вероятность течения вниз тут тоже равна $0,2$, но изменения состояния водохранилищ показывают другую картину, чем в предыдущем случае: набегание круче, но образование пика менее резко, однако распластывание во времени более значительно.

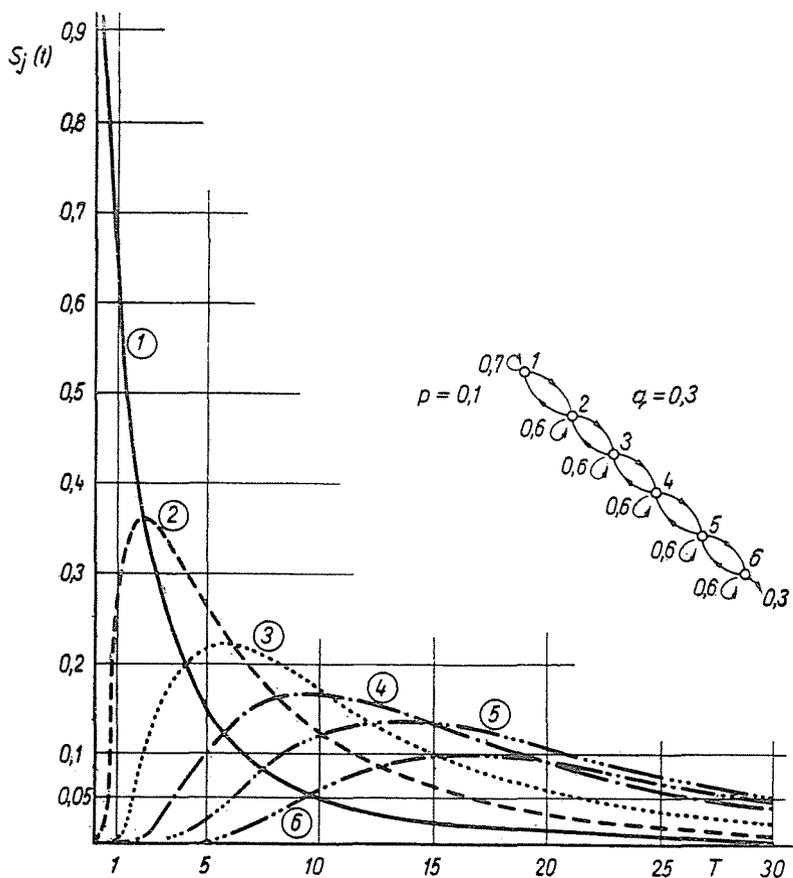


Рис. 9. Единичные гидрографы притока обобщенной модели каскада $p = 0,1$, $q = 0,3$

На рис. 10 показана серия, состоящая из шести водохранилищ, характеризуемых параметрами $q = 0,5$ и $p = 0,4$, откуда видно, что почти тождественная величина течений вниз и в обратную сторону и небольшая вероятность остаться на месте ($1-p-q$) создают колебания, неустойчивость системы. В случае всех четырех примеров в первом узле в момент времени $t = 0$ предполагался единичный импульс. Значит, на рисунках видны ответные

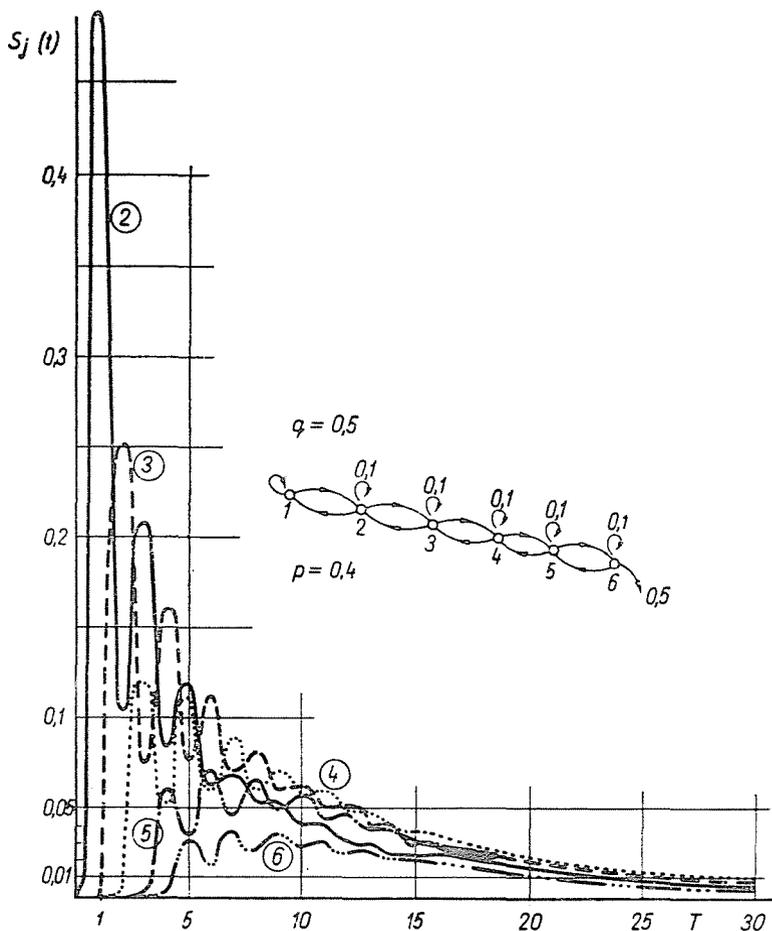


Рис. 10. Осциллирующие единичные гидрографы обобщенной модели каскада, $p = 0,4$, $q = 0,5$

функции импульса для случая последовательного соединения 1, 2, 3-го водохранилищ.

Настоящая работа появилась в результате дискуссий, проведенных К. М. О'Коннором, за что автор выражает ему благодарность.

Резюме

Модель водохранилища может быть расширена и обобщена. Модель, допускающая и обратное течение, описывает более широкий круг гидрологических явлений и может быть применена и для случаев равнинных территорий с обратным подпором. Метод матриц представляет собой возможность единого способа изложения. В модель пространственного состояния могут быть включены различные случаи линейных моделей. В работе не обсуждался вопрос определения параметров системы, их отождествления, описывалось лишь

действие системы. Для определения параметров, при наличии данных измерений, представляются либо симуляция и вариация параметров применением ЭВМ. Этот прием еще не разработан. Дальнейшее развитие конструирования модели возможно и для случая изменяющихся во времени систем и нелинейных моделей. Первый прием может быть простым образом введен уже в настоящем описании матрицей $\mathbf{K}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и т. д. путем матриц, описывающих систему в функции времени. Нелинейность делает сомнительной аналогию с моделью случайного блуждания, и ее решение в теперешней конструкции невозможно.

Д-р Иштван Коитур, Н-1521 Будапешт