

ÜBER EINIGE PROBLEME DER HÖHENBESTIMMUNG IM ZEITLICH VARIABLEN SCHWEREFELD

Von

P. BIRÓ

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, Geodätisches Institut, T U Budapest

(Eingegangen am 1. September 1974)

Durch Nivellement und Schweremessungen werden die Höhenunterschiede bzw. Meereshöhen einzelner Punkte der Erdoberfläche bestimmt. Die Niveauflächen des Erdschwerfeldes bilden das Referenzsystem der Höhenmessungen. Die Eindeutigkeit der Höhenbestimmung wird durch die Stabilität des Referenzsystems entscheidend beeinflußt. Diese Frage wird mit besonderer Schärfe aufgeworfen, wenn man aus den Meßergebnissen von wiederholten Höhenbestimmungen auf vertikale Bewegungen bzw. Deformationen der Erdoberfläche folgern will. Die in der heutigen Praxis der Erdkrustenbewegungsforschungen übliche Grundannahme ist, daß das Referenzsystem, d. h. Gestalt und Lage der Potentialflächen des Erdschwerfeldes im Laufe der Zeit unverändert bleiben.

Die modernen Erkenntnisse der heutigen Geophysik, die ganze Problematik der Geodynamik weisen aber darauf hin, daß in dem Erdkörper stetige Umformungen und Massenverlagerungen vor sich gehen, die natürlich auch die zeitlichen Änderungen des Schwerfeldes mit sich bringen. So erhebt sich die Frage, inwiefern die Höhenbestimmungen durch die zeitlichen Änderungen des Erdpotentials beeinflußt werden, d. h. was der eigentliche Inhalt der aus den wiederholten Nivellements abgeleiteten Höhenänderungen der Oberflächenpunkte ist.

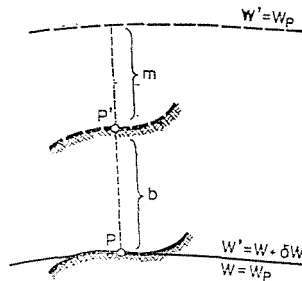


Abb. 1

In Abb. 1 ist der Oberflächenpunkt P des elastischen Erdkörpers sowie seine Niveaufläche mit dem Potentialwert $W - W_p$ dargestellt. Nun ändert

sich aus irgendeinem Grund das Potential in Punkt P um den Wert δW . Dann muß sich die ursprüngliche Niveaulfläche von Punkt P in eine Lage verschieben, wo das veränderte Schwerfeld gerade den Potentialwert $W' = W_P$ aufweist. Aufgrund der elastischen Eigenschaften wird die Oberfläche des Erdkörpers dieser vertikalen Verschiebung der Niveaulfläche in einem gewissen Grade folgen und dadurch verschiebt sich der Punkt P in die Lage P' . Der Abstand b ist die *absolute Vertikalverschiebung des Punktes P* , d. h. die Änderung der Länge des geozentrischen Ortsvektors von P . Der Unterschied m ist die *relative Verschiebung der Niveaulfläche* dem Oberflächenpunkt gegenüber. Diese relative Verschiebung läßt sich sehr einfach aus dem Potentialunterschied im Punkt P' und der Niveaulfläche $W' = W_P$ berechnen und ergibt sich zu

$$m = \delta W_{P'} / g'. \quad (1)$$

Im Hinblick auf die geringe Größe der Änderungsbeträge $g' - g = \delta g$ kann im Nenner von (1) mit hinreichender Genauigkeit g' durch g ersetzt werden.

Da die Potentialänderung δW im Punkt P nicht gemessen werden kann, wird sie als Funktion der Schwereänderung δg ausgedrückt. So erhält man

$$m = \frac{W}{2g^2} \delta g_{P'}, \quad (2)$$

wobei m vom Punkt P' gegen den Außenraum als positiv gezählt wird.

Um die *Änderung des Höhenunterschieds* zwischen den Oberflächenpunkten P und Q des elastischen Erdkörpers zu bestimmen, wird die Situation in Abb. 2 dargestellt. Der ursprüngliche Höhenunterschied der genannten Punkte sei mit H_Q^P bezeichnet. Nach einer Änderung des Schwerkraftpotentials um δW_P bzw. δW_Q wird die Oberfläche des elastischen Erdkörpers mit den Punkten P und Q in die Lage P' bzw. Q' verschoben. Diese Vertikalverschiebungen der Erdoberfläche werden mit b_P bzw. b_Q bezeichnet. Der Höhenunterschied der verschobenen Punkte in dem veränderten Kraftfeld beträgt nun $H_{Q'}^{P'}$.

Die Veränderung des Höhenunterschieds läßt sich folgenderweise ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta H_Q^P &= H_{Q'}^{P'} - H_Q^P = \\ &= \frac{W_P - W_Q}{\bar{g}_P} - \frac{W_P - W_Q}{\bar{g}'_P} - \frac{\delta W_{P'} - \delta W_{Q'}}{\bar{g}'_P}, \end{aligned} \quad (3)$$

wo \bar{g}_P bzw. \bar{g}'_P die Mittelwerte der Schwere entlang der Lotlinie von Punkt P zwischen den Niveaulflächen der Punkte P und Q bzw. P' und Q' bezeichnen.

Nach geeigneten Umformungen erhält man

$$\delta H_Q^P = - \frac{\bar{g}'_P - \bar{g}_P}{\bar{g}'_P} H_Q^P - \frac{1}{\bar{g}'_P} (\delta W_{P'} - \delta W_{Q'}) \quad (4)$$

oder unter Berücksichtigung der Gl. (1), (2) und für kleine Änderungen $\bar{g}'_P \approx \bar{g}_P \approx g$

$$\delta H_Q^P = -(m_P - m_Q) = -\frac{W}{2g^2} (\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}), \quad (5)$$

wo m_P und m_Q die *relativen Vertikalverschiebungen der Niveauflächen von P und Q* sind.

Gl. (5) zeigt, daß im zeitlich variablen Schwerfeld der Erde in jedem Fall, außer bei $\delta g_{P'} = \delta g_{Q'}$ mit einer zeitlichen *Veränderung des Höhenunterschieds gerechnet werden muß*.

Diese Veränderung des Höhenunterschieds kann außer dem bisher beschriebenen direkten Weg auch aus den durch die Änderungen des Erdschwerfeldes herbeigeführten Richtungsänderungen der örtlichen Vertikalen bestimmt werden [7], [15]. Dazu werden die Schwereänderungen in Lotabweichungsänderungen umgeformt [8], [10].

Nun erhebt sich die Frage, inwiefern durch diese Änderung des Höhenunterschieds die *wahren (absoluten) Vertikalbewegungen* unserer Oberflächenpunkte gekennzeichnet werden.

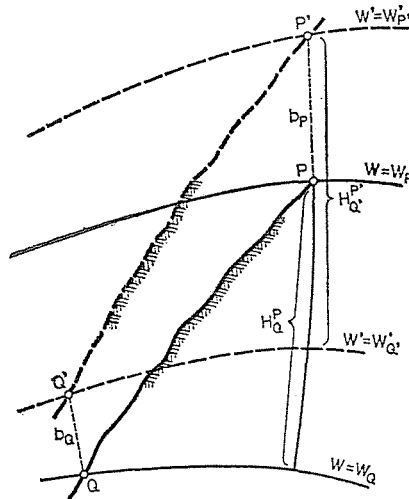


Abb. 2

Mit den Bezeichnungen in Abb. 2 ist $b_P - b_Q$ der Unterschied der absoluten Vertikalverschiebungen der Punkte P und Q. Es sei nun vorausgesetzt, daß vertikale Oberflächenbewegungen *nur als elastische Oberflächendeformationen* infolge der Variation des Schwerfeldes vorkommen können. Sie lassen sich nach der Loveschen Theorie der Elastizität des Erdkörpers bestimmen:

$$b_P = \frac{h}{G} \frac{W}{2g^2}; \quad \delta g_{P'} = \frac{h}{G} m_P, \quad (6)$$

wobei b_P von P in Richtung des Außenraumes positiv ist, $G = 1 + h - 3/2 k$ und h, k die Loveschen Zahlen sind.

Gl. (6) kann in ähnlicher Weise auch für Punkt Q aufgestellt werden, und damit ist der *Unterschied der absoluten (wahren) Punktbewegungen* der Punkte P und Q :

$$b_P - b_Q = \frac{h}{G} \frac{W}{2g^2} (\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}) = \frac{h}{G} (m_P - m_Q). \quad (7)$$

Vergleichen wir Gl. (7) mit Gl. (5), so ergibt sich eine Differenz:

$$d = b_P - b_Q - \delta H_Q^P = \left(\frac{h}{G} + 1 \right) (m_P - m_Q) = \left(\frac{h}{G} + 1 \right) \frac{W}{2g^2} (\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}). \quad (8)$$

Es seien W und g durch die Näherungswerte $W \approx 6,26 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2\text{s}^{-2}$ und für eine mittlere Breite durch $g \approx 981 \text{ cm s}^{-2}$ ersetzt und δg in mGal angegeben, so erhält man d in cm wie folgt:

$$d = b_P - b_Q - \delta H_Q^P = \left(\frac{h}{G} + 1 \right) \cdot 325 (\delta g_{P'} - \delta g_{Q'}). \quad (9)$$

Gl. (9) zeigt, daß sich eine bedeutende Differenz d zwischen der (meßbaren) Änderung des Höhenunterschieds δH_Q^P und dem Unterschied der absoluten (wahren) vertikalen Punktbewegungen der Punkte P und Q ($b_P - b_Q$) ergibt. D. h. *die entstandenen Höhenunterschiede kennzeichnen nicht die wahren Oberflächenbewegungen!*

Z. B. mit den Ausgangsdaten

$$W = 6,26 \cdot 10^{11} \text{ cm}^2\text{s}^{-2} \quad h = 0,6$$

$$g = 981 \text{ cm s}^{-2} \quad k = 0,3$$

$$\delta g_{P'} - \delta g_{Q'} = + 0,01 \text{ mGal} \quad G = \left(1 + h - \frac{3}{2} k \right) = 1,15$$

erhält man unter Anwendung von Gl. (4), (7) und (9):

$$\delta H_Q^P = - 3,3 \text{ cm}$$

bzw.

$$b_P - b_Q = + 1,7 \text{ cm}$$

und daraus

$$d = + 5,0 \text{ cm.}$$

Das vorher angenommene einfache Modell gilt nur für den Fall, wenn keine anderen vertikalen Bewegungen neben den durch die Variation des

Näherung $n_Q = 0$ geschrieben und die Änderung der Meereshöhe δH^P des Punktes P einfach ausgedrückt werden:

$$\delta H^P = -n_P = -\frac{W}{2g^2} \delta g_{P''}. \quad (12)$$

Für die wahre (absolute) Vertikalbewegung c_P der Erdoberfläche gilt (Abb. 3 und Gl. (11), (12)), daß

$$c_P = a_P - n_P = \delta H^P + a_P \quad (13)$$

oder für den Unterschied gilt analog

$$c_P - c_Q = a_P - a_Q - (n_P - n_Q) = \delta H_Q^P + a_P - a_Q. \quad (14)$$

Aus Gl. (13), (14) folgt, daß zur Bestimmung der wahren (absoluten) Vertikalbewegung der Erdoberfläche allein die Kenntnis der Änderung der Meereshöhe bzw. der Höhenunterschiede nicht ausreicht, es wäre nötig, auch die absolute Vertikalverschiebung a_P der Niveaufläche bzw. ihren Unterschied $a_P - a_Q$ zu kennen.

Leider muß aber festgestellt werden, daß im allgemeinen Fall — wenn zeitliche Änderungen des Erdschwerefeldes mit geologischen oder anderen Bewegungen zusammen auftreten — weder für c_P noch für a_P ein eindeutiger Zusammenhang mit der Höhenänderung bzw. Schwereänderung gefunden werden kann. Es gibt nämlich immer mehrere Unbekannte als Bestimmungsgleichungen. Daraus folgt, daß auf die Bestimmung von absoluten (wahren) Vertikalbewegungen der Erdoberfläche mit der derzeitigen Methode (Nivellement) verzichtet werden muß.

Was bleibt uns übrig? — Betrachten wir die relative Verschiebung der Niveaufläche gegenüber der Erdoberfläche mit umgekehrtem Vorzeichen als relative Vertikalbewegung der Oberfläche und bezeichnen wir sie mit r_P bzw. r_Q ; dann lassen sich Gl. (11) und (12) in folgender Form schreiben:

$$r_P = \delta H^P = -\frac{W}{2g^2} \delta g_{P''} \quad (15)$$

bzw.

$$r_P - r_Q = \delta H_Q^P = -\frac{W}{2g^2} (\delta g_{P''} - \delta g_{Q''}). \quad (16)$$

Die durch Gl. (15) und (16) beschriebenen relativen vertikalen Oberflächenbewegungen (bzw. ihre Unterschiede) zeigen also die vertikalen Oberflächenbewegungen gegenüber der Niveaufläche des Erdschwerefeldes; diese können in ungünstigem Fall von den absoluten (wahren) Oberflächenbewegungen ziemlich stark abweichen.

In diesem Sinne zeigen z. B. die *Änderungen der Meereshöhen* von Höhenfestpunkten die *relativen vertikalen Oberflächenbewegungen* im Vergleich zum mittleren Meeresniveau. Sie können — wie es Gl. (15) und (16) zeigen — *sowohl durch ein an das Meeresniveau angeschlossenes Wiederholungsnivellement als auch durch wiederholte absolute Schweremessungen bestimmt werden*. Für kontinentale Gebiete in großer Entfernung von Pegelstationen kann eine Lösung in Frage kommen, wo die relativen vertikalen Oberflächenbewegungen einiger ausgewählter kontinentaler Festpunkte (Superkontrollpunkte) durch Präzisionsschweremessungen (z. B. nach dem Verfahren von SAKUMA) bestimmt werden. Die kontinentalen Nivellementsnetze können dann zwischen diese Punkte eingeschaltet werden. Die zweckmäßige Entfernung dieser Punkte wird durch die erreichbaren Genauigkeiten der absoluten Schweremessungen und des Nivellements fehlertheoretisch bestimmt.

Bei den heutigen Meßgenauigkeiten liegt die Grenze bei einer Entfernung von etwa 1000–1500 km, bei der relative vertikale Oberflächenbewegungen durch Nivellement oder Schweremessung ungefähr zu derselben Genauigkeit ($\pm 2-3$ cm) bestimmt werden können.

Verzichtet man aber bei kontinentalen Netzen sowohl auf die absoluten Schweremessungen wie auch auf die Anschlußmessungen zu einer Pegelstation und summiert man einfach aus einem beliebigen kontinentalen Ausgangspunkt ausgehend die durch das wiederholte Nivellement bestimmten Änderungen der Höhenunterschiede, werden *örtliche relative Oberflächenbewegungen gegenüber der durch den Ausgangspunkt durchgehenden jeweiligen Niveaufläche* des zeitlich variablen Schwerefeldes der Erde bestimmt.

Um *absolute (wahre) Oberflächenbewegungen* bestimmen zu können, wäre es nötig, die absoluten vertikalen Verschiebungen und Kippungen des Geoids bzw. der Niveaufläche des kontinentalen Ausgangspunktes zu kennen. Diese Größen können aber z. Z. leider weder durch Nivellement noch durch Schweremessungen abgeleitet werden.

Zusammenfassung

Die Niveauflächen des Erdschwerefeldes spielen eine bestimmende Rolle in der geodätischen Höhenbestimmung, sie bilden das Referenzsystem der Höhenmessungen. Die Eindeutigkeit der Höhenbestimmung wird durch die Stabilität des Referenzsystems entscheidend beeinflusst. Die modernen Kenntnisse der heutigen Geophysik, die ganze Problematik der Geodynamik weisen darauf hin, daß in dem Erdkörper stetige Umformungen und Massenverlagerungen vor sich gehen, die natürlich auch zeitliche Änderungen des Schwerefeldes mit sich bringen. So erhebt sich die Frage, inwiefern die Höhenbestimmungen durch die zeitlichen Änderungen des Erdpotentials beeinflusst werden, d. h. was der eigentliche Inhalt der aus den wiederholten Nivellements abgeleiteten Höhenänderungen der Oberflächenpunkte ist.

Es wird festgestellt, daß die beobachteten Höhenänderungen im allgemeinen die *relativen vertikalen Oberflächenbewegungen* gegenüber der Niveaufläche des Erdschwerefeldes zeigen, die in ungünstigem Falle von den *absoluten (wahren) Oberflächendeformationen* ziemlich stark abweichen können.

Es wird darauf hingewiesen, daß längere (z. B. transkontinentale) Nivellementslinien für die Bestimmung von zeitlichen Höhenänderungen entfernter Punkte (z. B. für Erdkrustenbewegungsforschungen) durch absolute bzw. relative Schweremessungen ersetzt bzw. kontrolliert werden können.

Schrifttum

1. BARTA, GY.: On the Secular Variation of the Level Surface of Gravity. *Annales Univ. Sci. Budapestinensis, Sectio Geologica* II. Budapest, 1959.
2. BARTA, GY.: On the Hypothesis of the Secular Variation of Gravity Field. *Bulletin Géodésique*, Paris, No. 100, 1971.
3. BIRÓ, P.: Die vertikalen Erdkrustenbewegungen und Säkularvariationen des Erdschwerefeldes. *Periodica Polytechnica*, C. E. Budapest, Vol. 16. (1972). No. 1–2.
4. BIRÓ, P.: Der Einfluß von zeitlichen Änderungen des Erdschwerefeldes auf die Höhe von Nivellements festpunkten. *Wiss. Mitteilungen aus dem Inst. für theor. Geod. der Univ. Bonn*, No. 12, Bonn, 1973.
5. BIRÓ, P.: Der Einfluß der Säkularänderung des Erdschwerefeldes auf die nivellierten Höhenunterschiede. 2. Internationales Symposium »Geodäsie und Physik der Erde« Potsdam, 1973.
6. BOULANGER, Y. D.—SCHEGLOW, S. N.: On Secular Changes of Gravity. *Bulletin Géodésique*, Paris, No. 100, 1971.
7. Еремеев, В. Ф.—Юркина, М. И.: Теория высот в гравитационном поле Земли. Москва, 1972.
8. Файтельсон, А. Ш.—Юркина, М. И.: Влияние вековых изменений силы тяжести на результаты повторного нивелирования. Доклады Академии Наук СССР, Том 213, № 6, Москва, 1973.
9. HELMERT, F. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Zweite Auflage. Leipzig, 1962.
10. Юркина, М. И.—Файтельсон, А. Ш.: Вековые вариации земного гравитационного поля и движения полюса. Симпозиум КАПГ Рабочие группы 6.2 и 6.8, Прага, 1974.
11. PARIYSKY, N. N.: Study of Time Changes of Gravity in the Caucasus. Intern. H. Geolog. Congress, XVIII. Session, Theses of Reports, M.—L., 1973.
12. SAKUMA, A.: Observations expérimentales de la pesanteur au Bureau International des Poids et Mesures. *Bulletin Géodésique*, Paris, No. 100, 1971.
13. SCHLEUSENER, A.—TORCE, W.: Investigations of Secular Gravity Variations in Iceland. *Zeitschrift für Geophysik*, Würzburg, 37, 1971.
14. VOGEL, A.: The Question of Secular Variations in the Earth's Gravity Field. *Bulletin Géodésique*, Paris, No. 88, 1968.
15. VOGLER, A. CH.: Über Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präzisions-Nivellements. München, 1873.

Dr. Péter BIRÓ, H-1521 Budapest