# EIN HÖHERER ANNÄHERUNGSGRAD DER GRAVIMETER-GANGKURVEN BEI DER BEARBEITUNG VON MESSUNGEN AUF DEM GELÄNDE

Von

M. FÖLDVÁRY-VARGA

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, Geodätisches Institut, TU Budapest

(Eingegangen am 1. Oktober 1974)

Vorgelegt von Dr. Péter BIRÓ

Bei der Bearbeitung von Gravimetermessungen wird der Gravimetergang im allgemeinen mit einer Geraden angenähert, d. h. der Gang als lineare Funktion der Zeit betrachtet. Die wachsenden praktischen Forderungen, die zunehmenden Genauigkeitsansprüche, die Anlegung immer größerer einheitlicher Schwerenetze erfordern hingegen die Verfeinerung der bisherigen Bearbeitungsmethoden, wobei der Gravimetergang mit einer der Wirklichkeit näher liegenden Kurve höherer Ordnung angenähert wird.

Das wird auch in der Arbeit F. CHARAMSAS und L. TRÄGERS [1] versucht, wo die Verfasser eine von der traditionellen abweichende Bearbeitung der gravimetrischen Meßergebnisse auf einem Schwerepolygonzug darlegen. Die $G$-Werte der Polygonpunkte werden von ihnen durch Ausgleichung bestimmt und gleichzeitig mit der Ausgleichung werden die Koeffizienten des Polynoms zweiten oder dritten Grades für die Annäherung der Gangkurve sowie die aus dem Gang herrührenden Verbesserungen berechnet.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Näherung höheren Grades der Gravimetergangkurve gezeigt, die von der späteren Ausgleichung unabhängig ist. Daraus ergeben sich gewisse Vorteile der vorgeführten Methode, da durch die Bestimmung der Gangkurve bereits die Gangwerte berechnet sind, durch deren Berücksichtigung (und der Berücksichtigung der Gezeitenkorrektion) eine Datenmenge erhalten wird, in der die einzelnen Meßergebnisse durch unvermeidliche zufällige und etwaige regelmäßige Fehler behaftet sind. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die Meßergebnisse mit Hilfe verschiedener statistischer Tests zu filtern, auszuwählen, vor der Ausgleichung kritisch auszuwerten, wodurch sich u. a. die Zuverlässigkeit, die Wahrscheinlichkeit der bei der Ausgleichung erhaltenen Ergebnisse erhöhen läßt. Durch die von der Ausgleichung unabhängige Bestimmung der Gangkurvenpolynome ergeben sich außerdem bei der großen Masse der Rechenarbeit rechentechnische Vorteile.

Zuerst soll ein Überblick über die übliche lineare Annäherung der Gravimetergangkurve gegeben werden. Dies geschah bisher im allgemeinen in der Weise, daß die in einem gleichen Punkt mit einem Gerät in verschiedenen

Zeitpunkten $t_1$, $t_2$, $t_3$, . . . , $t_n$ abgelesenen Skalenwerte $s_1$, $s_2$, $s_3$, . . . $s_n$ in einem Koordinatensystem Zeit-Skalenwert aufgetragen und die Punkte miteinander verbunden wurden (Abb. 1).

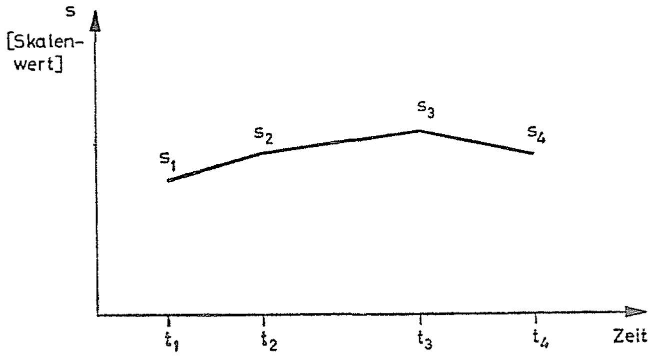


*Abb. 1*

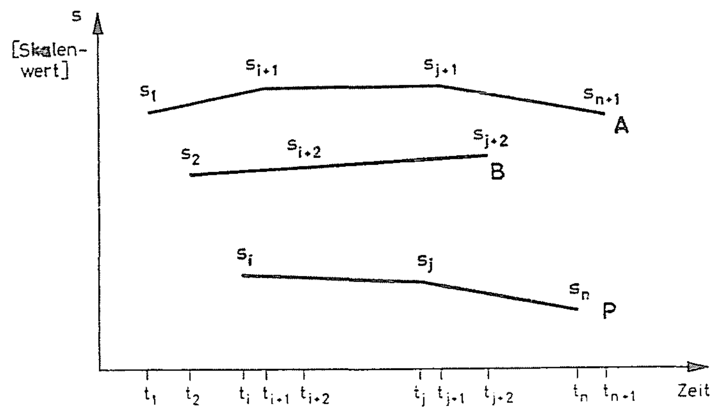


*Abb. 2*

Nach allen gravimetrischen Meßverfahren werden jedoch die Messungen wenigstens in zwei, jedoch meistens in mehreren Punkten abwechselnd durchgeführt. So erhält man für jeden Meßpunkt zwei oder noch mehr Meßergebnisse, aus denen der Anzahl der Meßpunkte $A$, $B$, . . . $P$ entsprechend eine Anzahl $P$ von linearen Gangkurvennäherungen konstruiert werden können (Abb. 2).

Nähern wir nun die Gangkurve des Instruments so an, daß wir die Mittelwerte je Intervall der Richtungstangenten aller linearen Abschnitten innerhalb der Zeitintervalle $t_1-t_2$, $t_2-t_3$, $t_3-t_4$, . . . $t_n-t_{n+1}$ bilden. Damit wird für ein Gerät eine aus einer einzigen gebrochenen Linie bestehende Gangkurvennäherung erhalten, die sämtliche Meßergebnisse eines Meßzeitraums, z. B.

eines Tages, enthält. Eine derartige Gangkurvennäherung wird in folgender Weise konstruiert:

1. Es wird ein Achsenkreuz gezeichnet, wo die Horizontalachse die Zeitachse ist und auf die Vertikalachse die Gangwerte aufgetragen werden.
2. Es wird im Zeitpunkt $t_1$ ein Anfangsgangwert $u_1 = 0$ angesetzt, und aus diesem Anfangspunkt ausgehend eine Gerade mit der gleichen Richtungstangenten wie die des Gangkurvenabschnitts im Intervall $t_1$—$t_2$ bis zu der durch $t_2$ durchgehenden Parallelen zur Gangwertachse gezeichnet. So erhält man Punkt $u_2$.
3. Aus Punkt $u_2$ wird kontinuierlich das Näherungspolygon mit der mittleren Richtungstangenten der Geradenabschnitte im Intervall $t_2$—$t_3$ bis zu der durch $t_3$ durchgehenden Parallelen mit der Gangwertachse gezeichnet, damit erhält man den Punkt $u_3$.

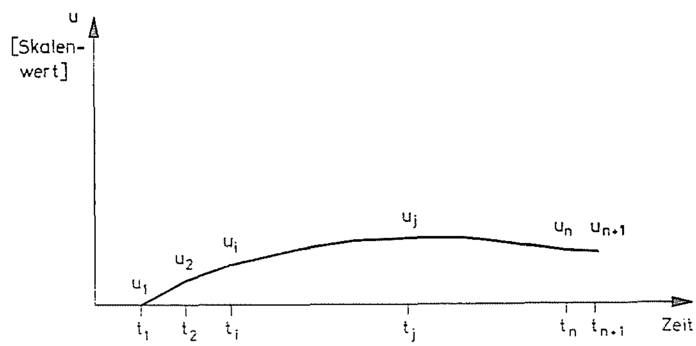


*Abb. 3*

Ist einschließlich des letzten Abschnitts die ganze Operation durchgeführt, erhält man das in Abb. 3 dargestellte Polygon.

Das die Gangkurve annähernde Polygon läßt sich selbstverständlich auch rein rechnerisch ermitteln. Das Rechenverfahren wird durch folgende Formeln beschrieben:

Die Skalenwerte der aus den Meßergebnissen der während eines Meßzeitraums, z. B. eines Tages, mit demselben Instrument durchgeführten sämtlichen Messungen bestimmten, in eine einzige Gangkurve zusammengefaßten Punkte werden in zeitlicher Aufeinanderfolge bezeichnet:

$$s_{A_1},\ s_{B_2},\ s_{A_3},\ s_{C_4},\ s_{C_5},\ s_{B_6},\ s_{A_7},\ s_{C_8} \text{ usw.}$$

wo die Buchstaben den Namen oder die Nummer des Meßpunkts, die Ziffern die Indizes der Meßzeitpunkte $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ usw. bedeuten.

Die Richtungstangenten seien durch $q$ bezeichnet, wo im Index angegeben ist, in welchem Punkt, aus wievielten zwei Messungen sie berechnet wurden; damit lauten die Richtungstangenten:

$$q_{A_{1,3}} = \frac{s_{A3} - s_{A1}}{t_3 - t_1}$$

$$q_{B_{2,6}} = \frac{s_{B6} - s_{B2}}{t_6 - t_2}$$

$$q_{C_{4,5}} = \frac{s_{C5} - s_{C4}}{t_5 - t_4}$$

$$q_{A_{3,7}} = \frac{s_{A7} - s_{A3}}{t_7 - t_3}$$

Die zu den Zeitpunkten $t_1$, $t_2$, $t_3$ usw. gehörenden Gangwerte $u_1$, $u_2$, $u_3$ usw. sind wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
t_1 & u_1 = 0 \\
t_2 & u_2 = q_{A_{1,3}}(t_2 - t_1) \\
t_3 & u_3 = u_2 + \dfrac{q_{A_{1,3}} + q_{B_{2,6}}}{2}(t_3 - t_2) \\
t_4 & u_4 = u_3 + \dfrac{q_{A_{3,7}} + q_{B_{2,6}} + q_{C_{4,5}}}{3}(t_4 - t_3) \\
\vdots & \\
t_i & u_i = u_{i-1} + \dfrac{\sum\limits_1^n q_{P_{j,k}}}{n}(t_i - t_{i-1})
\end{array}$$

wo die Zahl $n$ der Richtungstangenten im Zähler durch die Erfüllung der Bedingungen

$$j \leq i$$
$$k \geq i$$

bestimmt wird. Nach diesem Verfahren kann zu jedem Skalenwert ein Gangwert berechnet werden. (Zu den einzelnen Skalenwerten werden die entsprechenden Gangwerte durch den Meßzeitpunkt koordiniert.)

Die Schritte des Rechenverfahrens sind also: 1. Es werden je Instrument (und je Tag) in jedem Punkt der Meßreihenfolge entsprechend die Differenzen der aufeinander folgenden Skalenwerte sowie die Zeitdifferenzen der Ablesungen gebildet.

2. Die Differenzen der Skalenwerte werden durch die dazugehörigen Zeitdifferenzen dividiert, und man erhält die für die Neigung der Sehnen der Gangkurvenabschnitte, die im Beobachtungspunkt gezeichnet werden können, kennzeichnenden Richtungstangenten $q$. Neben den Richtungstangenten sind Anfang und Ende des bei der Berechnung berücksichtigten Zeitraums einzutragen. Das ist für die weiteren Berechnungen notwendig. Die Richtungstangenten sind in der Dimension Skalenwert/Min ausgedrückt.

Diese Operation wird für sämtliche zu einer einzigen Gangkurve gehörende Meßpunkte durchgeführt. Die in verschiedenen Punkten bestimmbaren Gangkurvenabschnitte überdecken sich selbstverständlich in der Zeit. Diese Überdeckung muß bei der Berechnung der Gangkurve berücksichtigt werden.

3. Die Koordinatenpaare der Punkte des die wirkliche Gangkurve annähernden Polygons (Sehnenpolygons) werden rechnerisch hergestellt. Eines der Koordinatenpaare ist der tatsächliche Meßzeitpunkt. Wir haben soviel solche Zeitpunktkoordinaten wie Messungen in einer zu einer Gangkurve gehörenden Meßreihe gemacht wurden.

Den einzelnen Meßzeitpunkten $t$ wird rechnerisch je eine in Skalenwerten ausgedrückte Koordinate $u$ zugeordnet. Der Anfangspunkt der Kurve (des Sehnenpolygons) wird auf der Zeitachse im Zeitpunkt der ersten Messung angenommen. Der zweite Punkt wird der Zeitpunkt der zweiten Messung sein. Der Gangwert wird berechnet, indem man die vorher für den ersten Meßpunkt errechnete Richtungstangente mit dem Zeitintervall zwischen der ersten und der zweiten Messung multipliziert. Der dritte Punkt des Polygons wird im Zeitpunkt der dritten Messung liegen, wobei der Gangwert in der Weise berechnet wird, daß man das arithmetische Mittel aller Richtungstangenten bildet, wo das als deren Berechnungsgrundlage benutzte Zeitintervall die fragliche Zeitdauer (zwischen der 2. und der 3. Messung) enthält; diese mittlere Richtungstangente wird dann mit der Länge der Zeitdauer zwischen den Messungen 2 und 3 multipliziert. Das Produkt zu der für den Zeitpunkt der 2. Messung bereits berechneten Ordinate hinzugezählt, erhält man die Ordinate des Punktes 3 der Gangkurve, die dem Zeitpunkt der 3. Messung als Abszisse zugeordnet wird. Die Gangwerte der weiteren Punkte werden in ähnlicher Weise wie für den dritten Punkt berechnet; selbstverständlich werden die Produkte aus den mittleren Richtungstangenten mit den Zeitdauern stets zu dem vorhergehenden Gangwert hinzugezählt.

Das Gesagte sei an einem Zahlenbeispiel veranschaulicht. Bevor das Beispiel angeführt wird, sollen noch einige Bemerkungen über die Dimension des Gangwerts gemacht werden. Die Praxis macht es erforderlich, in einzelnen Fällen für jedes einzelne Meßergebnis die Gezeitenverbesserungen $\delta_g$ gesondert zu berechnen, diese nacheinander aus den mit der Multiplikationskonstanten $k$ des Instruments multiplizierten, in mgal ausgedrückten Skalenwerten $s$ in Abzug zu bringen; somit erhält man die gezeitenfreien Werte $s'$:

$$s' = ks - \delta_g .$$

Selbstverständlich ist auch die Dimension des erhaltenen $s'$-Wertes mgal. Die Gangkurve des Instruments wird dann unter Anwendung der gezeitefreien Werte berechnet oder aufgetragen; sie ist in der Regel einer Kurve zweiter Ordnung ähnlich und spiegelt eigentlich, von den zufälligen Meßfehlern abgesehen, nur den eigenen Gang des Instruments. Der so bestimmte Gangwert sei durch $u'$ bezeichnet. In anderen Fällen wird hingegen von der umständlichen Berechnung der Gezeitenverbesserung abgesehen und es werden mit einem gewissen Zugeständnis in bezug auf die Genauigkeit Gangwerte berechnet oder konstruiert, die sowohl die Gezeitenverbesserung als auch die Verbesserung wegen des eigenen Instrumentalfehlers enthalten. In diesem Falle wird für die Berechnung gleich der $s$-Wert benutzt. Als Ergebnis werden die Gangwerte $u$ erhalten, die selbstverständlich mit den durch $u'$ bezeichneten Gangwerten nicht identisch sind.

Im angeführten Zahlenbeispiel wurden unter Anwendung der gezeitenfreien Werte $s'$ die Gangwerte $u'$ bestimmt, deren Dimension also mgal ist. Des Vergleichs halber wurden die Ausgangsdaten im Beispiel aus [1] übernommen. Die Meßpunkte stehen in der Reihenfolge der Messungen in Tabelle I mit dem Meßzeitpunkt, der Differenz der gezeitenfreien Werte und der dazugehörigen Zeitdauer, den Richtungstangenten, den Anfangs- und Endpunkten der als Berechnungsgrundlage für diese benutzten Zeitdauer sowie mit den Gangwerten.

In Abb. 4a sind die in den einzelnen Meßpunkten in der üblichen Weise aufgetragenen Gangkurvenabschnitte und das Sehnenpolygon der berechneten Gangkurve zu sehen.

Um einen Vergleich zu ziehen, sind in der letzten Spalte der Tabelle I zahlenmäßig und in Abb. 4b zeichnerisch die für die Punkte derselben Linie in [1] mitgeteilten gleichzeitig mit der Ausgleichung bestimmten Gangwerte angegeben. Es ist zu erkennen, daß die auf zweifache Weise bestimmte Gangkurve eine gute Übereinstimmung aufweist.

Es wurden auch weitere versuchsmäßige Berechnungen durchgeführt, die in [2] ausführlich behandelt werden. Es konnte der Schluß gezogen werden, daß das vorgeschlagene Rechen- oder Konstruktionsverfahren fast die gleiche Gangkurve ergab wie die gleichzeitig mit der Ausgleichung erhaltene.

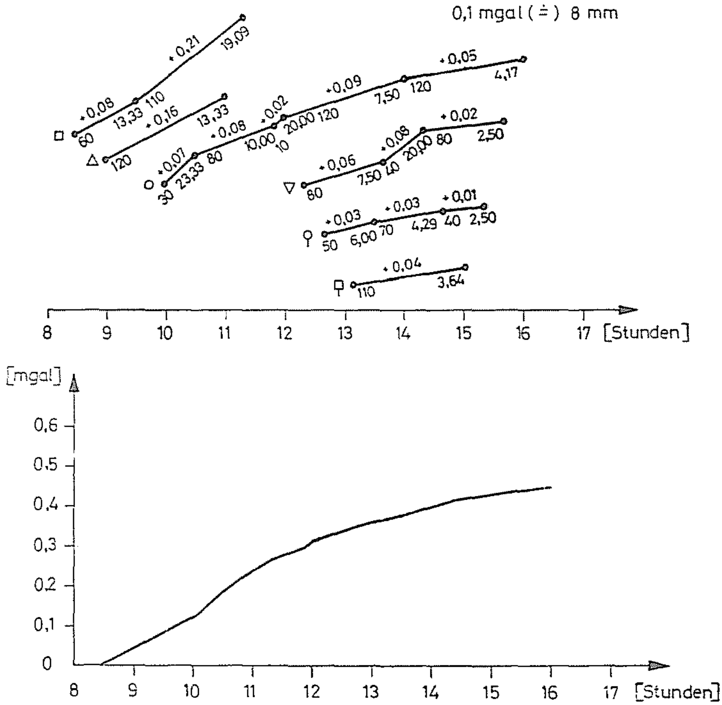
0,1 mgal (≙) 8 mm
+0,08
+0,21
13,33 110
19,09
60
+0,16
13,33
120
+0,07
+0,08
+0,02
20,00 120
+0,09
7,50 120
+0,05
4,17
23,33 80
10,00
30
10
+0,06
+0,08
+0,02
7,50 40
20,00 80
2,50
80
+0,03
+0,03
+0,01
50
6,00 70
4,29 40 2,50
+0,04
110
3,64
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 [Stunden]
[mgal]
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 [Stunden]

*Abb. 4a*

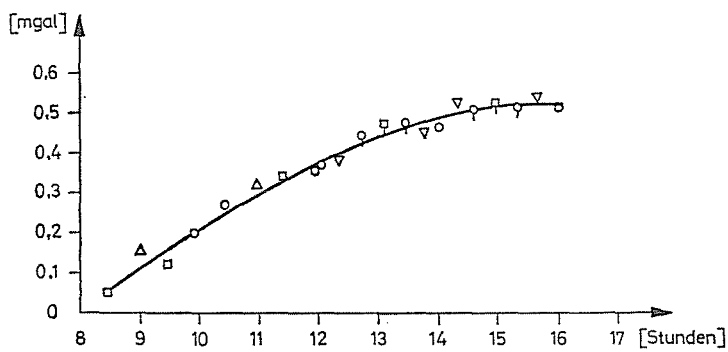
[mgal]
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 [Stunden]

*Abb. 4b*

## Tabelle I

| $P$ Meßpunkt | $t_i$ Meßzeitpunkt | $s'_k - s'_j$ Differenz der gezeitefreien Werte [mgal] | $t_i - t_{i-1}$ Differenz der Zeitpunkte [Min.] | $q_{P_{j,k}}$ Richtungstangente [$10^{-4}$mgal/ /Min] | $t_j$ Auf den Quotienten bezogene Zeitdauer: Anfang | $t_k$ Auf den Quotienten bezogene Zeitdauer: Ende | $u_i$ Gangwert [mgal] | Gangwert aus Ausgleichung [mgal] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 8,30 | | | | | | 0,000 | 0,00 |
| B | 9,00 | | | | | | 0,040 | 0,06 |
| A | 9,30 | +0,08 | 60 | +13,33 | 8,30 | 9,30 | 0,080 | 0,10 |
| C | 10,00 | | | | | | 0,128 | 0,15 |
| C | 10,30 | +0,07 | 30 | +23,33 | 10,00 | 10,30 | 0,184 | 0,19 |
| B | 11,00 | +0,16 | 120 | +13,33 | 9,00 | 11,00 | 0,226 | 0,23 |
| A | 11,20 | +0,21 | 110 | +19,09 | 9,30 | 11,20 | 0,264 | 0,28 |
| C | 11,50 | +0,08 | 80 | +10,00 | 10,30 | 11,50 | 0,294 | 0,30 |
| C | 12,00 | +0,02 | 10 | +20,00 | 11,50 | 12,00 | 0,314 | 0,31 |
| D | 12,20 | | | | | | 0,329 | 0,34 |
| E | 12,40 | | | | | | 0,344 | 0,36 |
| F | 13,10 | | | | | | 0,365 | 0,39 |
| E | 13,30 | +0,03 | 50 | + 6,00 | 12,40 | 13,30 | 0,377 | 0,40 |
| D | 13,40 | +0,06 | 80 | + 7,50 | 12,20 | 13,40 | 0,382 | 0,42 |
| C | 14,00 | +0,09 | 120 | + 7,50 | 12,00 | 14,00 | 0,400 | 0,43 |
| D | 14,20 | +0,08 | 40 | +20,00 | 13,40 | 14,20 | 0,416 | 0,44 |
| E | 14,40 | +0,03 | 70 | + 4,29 | 13,30 | 14,40 | 0,423 | 0,44 |
| F | 15,00 | +0,04 | 110 | + 3,64 | 13,10 | 15,00 | 0,429 | 0,45 |
| E | 15,20 | +0,01 | 40 | + 2,50 | 14,40 | 15,20 | 0,435 | 0,45 |
| D | 15,40 | +0,02 | 80 | + 2,50 | 14,20 | 15,40 | 0,441 | 0,46 |
| C | 16,00 | +0,05 | 120 | + 4,17 | 14,00 | 16,00 | 0,449 | 0,45 |


## Zusammenfassung

Verfasserin zeigt ein Verfahren zur Annäherung der Gangkurve des Gravimeters durch ein Polynom höheren Grades, für das sich zu praktischen Zwecken dienende auf dem Gelände bestimmte Meßergebnisse direkt verwenden lassen. Die gewonnenen Ergebnisse stimmen mit den durch Ausgleichung bestimmten Näherungen höheren Grades der Gangkurve gut überein. Das Verfahren ist einfach, erfordert keinen größeren Rechenaufwand; die näherungsweise Gangkurve kann sowohl auf graphischen als auch auf numerischen Wege bestimmt werden.


## Schrifttum


1. CHARAMZA, F.—TRÄGER, L.: Bearbeitung der Messungsergebnisse auf den Schwerepolygonen. Geofysikálni Sbornik, XIX (1971) 109—119.
2. Zeitgemäßes Ausgleichungsverfahren für gravimetrische Messungen*. Forschungs-Schlußbericht des Lehrstuhls für Höhere Geodäsie des Geodätischen Instituts an der TU Budapest. Manuskript. Budapest, 1974.

* In ungarischer Sprache.



Oberassistentin Dr. Magda FÖLDVÁRY-VARGA, H-1521 Budapest