

UMRECHNUNG ZWISCHEN DEN GAUSS – KRÜGER- PROJEKTIONSSTREIFEN DURCH TRANSFORMATION DER RICHTUNGSWINKEL

Von

I. HAZAY

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, Geodätisches Institut, TU Budapest

(Eingegangen am 15. Mai 1974)

I

In zahlreichen Ländern wird schon für die großmaßstäbige Kartenherstellung die *Gauß–Krüger-Projektion* benutzt und die Zahl der diese Projektion anwendenden Länder wird in der Zukunft voraussichtlich noch zunehmen. Die Theorie dieser Projektion ist in den Fachbüchern zu finden (u. a. in [1–4]). Wie bekannt, werden Systeme von 2, 3 bzw. 6 Grad Streifeneinteilung benutzt. Da in der Regel ein Streifen für die Darstellung eines Landes nicht genügt und noch weniger ausreicht, um die Triangulationsnetze benachbarter Länder zu verbinden, wird es oft erforderlich, einzelne Punkte bzw. Punktgruppen auf den Nachbarstreifen oder von einem schmälere auf einen breiteren Streifen (oder umgekehrt) umzurechnen.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß eine massenhafte Umrechnung auf einer leistungsfähigen elektronischen Rechenanlage am schnellsten mit Polynomen durchzuführen ist.

Zur Verminderung der Anzahl der Koeffizienten der Polynome läßt sich die Berücksichtigung der Konformitätsbedingung heranziehen. Solche Umrechnungsreihen findet man z. B. in [1]. Es ist jedoch auch eine Umrechnungsmethode erforderlich, die sich für einen kleinen Tischcomputer oder sogar für die Handrechenmaschine eignet. Ein derartiges, vom Verfasser ausgearbeitetes Verfahren ist z. B. in [2], [3] und [4] beschrieben. Zwar kommt eine geübte Rechenkraft auch mit diesem Verfahren ziemlich rasch zu einem Ergebnis, wird hier eine noch übersichtlichere und raschere Methode vorgeschlagen. Es wurden drei Stufen des Verfahrens entwickelt.

Die *erste Stufe* ist am wenigsten arbeitsaufwendig, die genau umgerechneten Koordinaten werden jedoch in der Regel nur innerhalb mehrerer Zentimeter angenähert. Die *zweite* hat eine Genauigkeit von etwa 4 bis 5 mm; die *dritte Stufe* liefert sozusagen vollkommen genaue Ergebnisse, die Abweichung beträgt höchstens 1 bis 2 mm. Aber auch die beiden letzteren Stufen erfordern keinen allzu großen Rechenaufwand.

Nach dem hier beschriebenen Verfahren wird das Problem durch eine *rasche Transformation der Richtungswinkel* gelöst. Nach § 161 in [3] und Abschnitt 8134 in [4] wird für einen Punkt *die Differenz der Meridiankonvergenzen* der beiden Projektionen durch den Zusammenhang

$$z = \mu_1 - \mu_2 = (\delta_2 - \delta_1) - (\Delta_2 - \Delta_1) \quad (1)$$

angegeben. Dabei bedeuten: μ die *Meridiankonvergenz der Projektion*, δ den *Richtungswinkel* einer der von dem Punkt ausgehenden Richtungen und Δ die zu der Richtung gehörende *Richtungsreduktion*; der Index 1 weist auf die Projektion (den Projektionsstreifen) hin, von der die Umrechnung erfolgt, der Index 2 auf jene Projektion, auf die umgerechnet wird. Die als *Orientierungskonstante* bezeichnete Größe z ist — sofern die Punkte exakt umgerechnet wurden — für je einen Punkt selbstverständlich konstant, d. h. für alle von dem Punkt ausgehenden beliebigen Richtungen gleich. Hat man bereits exakt umgerechnete Punkte in geeigneten Abständen voneinander (z. B. Triangulierungspunkte erster Ordnung in Abständen von 25 bis 30 km), für die die Größe z bekannt ist, so werden die Richtungswinkel δ_1 der den neu zu berechnenden Punkt mit den 2 bis 3 nächsten derartigen Punkten verbindenden Richtungen ermittelt, auf die andere Projektion transformiert, und mit Hilfe der so erhaltenen Richtungswinkel δ_2 werden aus einem oder zwei Dreiecken durch Vorwärtseinschneiden die Koordinaten des Punktes im zweiten Koordinatensystem bestimmt.

Der *transformierte Richtungswinkel* ist nach (1):

$$\delta_2 = \delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + z. \quad (2)$$

Für die Transformation muß also nichts anderes getan werden als die *Reduktionsdifferenz* $(\Delta_2 - \Delta_1)$ in der einfachsten Weise herzustellen. (Aus der erforderlichen Genauigkeit derselben ergeben sich die im vorigen genannten drei Stufen.)

Sind die z -Werte für die als Ausgang gewählten Punkte nicht bekannt, werden in jedem solchem Punkt in beiden Projektionen für je zwei bekannte Richtungen die den Genauigkeitsgraden entsprechenden $(\Delta_2 - \Delta_1)$ Werte errechnet, die zu der durch Weglassung von z transformierten Orientierungsrichtung und zur neuen Richtung gehörenden Richtungswerte

$$\delta'_2 = \delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) \quad (3)$$

werden als Richtungssatz betrachtet und dieser mit Hilfe der Orientierungsrichtungen in die dem zweiten System entsprechende Lage gedreht. Da auch

die Reduktionsdifferenzen nach dem Näherungsverfahren berechnet werden, zeichnet sich auch bei den Orientierungsrichtungen z' der der Stufe entsprechende Widerspruch ab, der Richtungssatz wird also um den *mittleren Orientierungswinkel* verdreht.

Es soll bemerkt werden, daß für die Berechnung auf dem Tischcomputer sowohl der Richtungswinkel als auch des Vorwärtseinschneidens gute Programme zur Verfügung stehen und diese Operationen sich auch mit der Handrechenmaschine rasch ausführen lassen. Werden zwei Vorwärtseinschnitte berechnet, erhält man auch eine Kontrolle, die sowohl im Polynom- als auch im von uns früher entwickelten, bereits erwähnten Verfahren fehlt.

Die im weiteren gezeigten Berechnungen und Tabellen beziehen sich auf die zu dem *Hayford-Ellipsoid* gehörenden Projektionsstreifen. Die Grundlagen des Verfahrens lassen sich jedoch an jedes Erdellipsoid anpassen.

II

Der Beschreibung der Ermittlung von Richtungsreduktionsdifferenzen vorangehend werden einige Bezeichnungen eingeführt und die entsprechenden Werte für das *Hayford-Ellipsoid* angegeben.

Durch D wird der Näherungswert der *Streifenbreite* in 100 000 m (100 km)-Einheiten bezeichnet:

$$D = \frac{N \cos \varphi}{\varrho} S. \quad (4)$$

Hierin bedeuten: N den *Querkrümmungsradius* für die *geographische Breite* φ (in der genannten Längeneinheit), S die *Streifenbreite* in Graden und ϱ die *analytische Winkleinheit* in derselben Dimension.

Die Werte von D sind bei Streifenbreiten von 2° und 3° für den x -Bereich von 5000 bis 5500 km in *Tabelle 1* je 50 km angegeben. Die Ziffer unmittelbar vor dem Komma der Differenz d je Kilometer entspricht der Dimension der angegebenen letzten Dezimalzahl von D . (Dasselbe bezieht sich auch auf *Tabelle 4*. In beiden Tabellen stehen die d -Werte in den einzelnen x -Bereichen von 50 km in derselben Zeile wie die niedrigeren Grenzwert von x . Mit zunehmendem x -Wert nehmen D und γ im Absolutwert ab (*Tabelle 4*), d wird also in jedem Fall von negativem Vorzeichen sein.)

Durch β wird der Näherungswert der *Differenz der* auf denselben Punkt bezogenen *Meridiankonvergenzen* der Projektionen auf zwei Nachbarstreifen bezeichnet. Seine Formel lautet:

$$\beta'' = 3600 S^\circ \sin \varphi. \quad (5)$$

Dieser Wert wird bei den Berechnungen nur in runden Minuten verwendet. Die β -Werte nach x sind in *Tabelle 2* angeführt. Multiplikationsfaktoren:

$$a = \frac{\varrho''}{2R^2} \quad b = \frac{\varrho''}{12R^2} \quad (6)$$

Tabelle 1

S:	2°		3°	
	D	d	D	d
x km				
5000	1,57331	24,84	2,35997	37,26
050	1,56089	25,03	2,34134	37,54
100	1,54838	25,22	2,32257	37,83
150	1,53577	25,41	2,30366	38,11
200	1,52307	25,59	2,28460	38,39
250	1,51027	25,78	2,26540	38,67
300	1,49738	25,96	2,24607	38,95
350	1,48440	26,15	2,22659	39,23
400	1,47132	26,34	2,20698	39,52
450	1,45815	26,54	2,18722	39,80
500	1,44488		2,16732	

Tabelle 2

S:	2°	3°
	β	β
x km		
5000	1°25'	2°08'
050	26	09
100	26	10
150	27	11
200	28	12
250	28	13
300	29	14
350	30	15
400	30	16
450	31	17
500	32	18

wobei R den *mittleren Krümmungsradius* in 100 000 m-Einheiten; ϱ'' die *analytische Winkeleinheit* in Sekunden bedeutet.

Die Werte von hinreichender Genauigkeit für die Berechnung sind in *Tabelle 3* zusammengefaßt.

die Reduktionsdifferenzen nach dem Näherungsverfahren berechnet werden, zeichnet sich auch bei den Orientierungsrichtungen z' der der Stufe entsprechende Widerspruch ab, der Richtungssatz wird also um den *mittleren Orientierungswinkel* verdreht.

Es soll bemerkt werden, daß für die Berechnung auf dem Tischcomputer sowohl der Richtungswinkel als auch des Vorwärtseinschneidens gute Programme zur Verfügung stehen und diese Operationen sich auch mit der Handrechenmaschine rasch ausführen lassen. Werden zwei Vorwärtseinschnitte berechnet, erhält man auch eine Kontrolle, die sowohl im Polynom- als auch im von uns früher entwickelten, bereits erwähnten Verfahren fehlt.

Die im weiteren gezeigten Berechnungen und Tabellen beziehen sich auf die zu dem *Hayford-Ellipsoid* gehörenden Projektionsstreifen. Die Grundlagen des Verfahrens lassen sich jedoch an jedes Erdellipsoid anpassen.

II

Der Beschreibung der Ermittlung von Richtungsreduktionsdifferenzen vorangehend werden einige Bezeichnungen eingeführt und die entsprechenden Werte für das *Hayford-Ellipsoid* angegeben.

Durch D wird der Näherungswert der *Streifenbreite* in 100 000 m (100 km)-Einheiten bezeichnet:

$$D = \frac{N \cos \varphi}{\varrho} S. \quad (4)$$

Hierin bedeuten: N den *Querkrümmungsradius* für die *geographische Breite* φ (in der genannten Längeneinheit), S die *Streifenbreite* in Graden und ϱ die *analytische Winkleinheit* in derselben Dimension.

Die Werte von D sind bei Streifenbreiten von 2° und 3° für den x -Bereich von 5000 bis 5500 km in *Tabelle 1* je 50 km angegeben. Die Ziffer unmittelbar vor dem Komma der Differenz d je Kilometer entspricht der Dimension der angegebenen letzten Dezimalzahl von D . (Dasselbe bezieht sich auch auf *Tabelle 4*. In beiden Tabellen stehen die d -Werte in den einzelnen x -Bereichen von 50 km in derselben Zeile wie die niedrigeren Grenzwert von x . Mit zunehmendem x -Wert nehmen D und γ im Absolutwert ab (*Tabelle 4*), d wird also in jedem Fall von negativem Vorzeichen sein.)

Durch β wird der Näherungswert der *Differenz der* auf denselben Punkt bezogenen *Meridiankonvergenzen* der Projektionen auf zwei Nachbarstreifen bezeichnet. Seine Formel lautet:

$$\beta'' = 3600 S^\circ \sin \varphi. \quad (5)$$

Dieser Wert wird bei den Berechnungen nur in runden Minuten verwendet. Die β -Werte nach x sind in *Tabelle 2* angeführt. Multiplikationsfaktoren:

$$a = \frac{\varrho''}{2R^2} \quad b = \frac{\varrho''}{12R^2} \quad (6)$$

Tabelle 1

S:	2°		3°		
	x km	D	d	D	d
5000		1,57331	24,84	2,35997	37,26
050		1,56089	25,03	2,34134	37,54
100		1,54838	25,22	2,32257	37,83
150		1,53577	25,41	2,30366	38,11
200		1,52307	25,59	2,28460	38,39
250		1,51027	25,78	2,26540	38,67
300		1,49738	25,96	2,24607	38,95
350		1,48440	26,15	2,22659	39,23
400		1,47132	26,34	2,20698	39,52
450		1,45815	26,54	2,18722	39,80
500		1,44488		2,16732	

Tabelle 2

S:	2°	3°
x km	β	β
5000	1°25'	2°08'
050	26	09
100	26	10
150	27	11
200	28	12
250	28	13
300	29	14
350	30	15
400	30	16
450	31	17
500	32	18

wobei R den *mittleren Krümmungsradius* in 100 000 m-Einheiten; ϱ'' die *analytische Winkeleinheit* in Sekunden bedeutet.

Die Werte von hinreichender Genauigkeit für die Berechnung sind in *Tabelle 3* zusammengefaßt.

Tabelle 3

x km	a	b
5000	25,35	4,22
050		
100		
150	25,34	
200		
250		
300		
350	25,33	
400		
450		
500	25,32	

Tabelle 4

$S:$ x km	2°		3°	
	γ	d	γ	d
5000	39,883	6,40	59,825	9,60
050	563	42	345	64
100	242	48	58,863	72
150	38,918	52	377	78
200	592	56	57,888	84
250	264	62	396	92
300	37,933	66	56,900	10,00
350	600	70	400	06
400	265	74	55,897	14
450	36,928	80	390	20
500	588		54,880	

Die Daten für den 6° Streifen werden aus den Tabellen 1 und 2 sowie der noch nicht behandelten *Tabelle 4* erhalten, indem man die Werte für den 3° Streifen mit 2 multipliziert.

III

Nach einem vereinfachten Verfahren wird die Richtungsreduktionsdifferenz ($\Delta_2 - \Delta_1$) zwischen *Nachbarstreifen gleicher Breite* wie folgt errechnet.

Für alle drei Stufen werden die Richtungswinkel δ_1 des Verbindungsgeradenabschnitts zwischen den beiden Endpunkten berechnet, es werden mit km-Schärfe die Koordinate \bar{x}_1 des mittleren Punktes des Linienabschnitts und mit m-Schärfe die Differenz Δx_1 zwischen den Koordinaten x_1 der beiden Endpunkte bestimmt. Wird der Punkt, für den man die Richtungsreduktion berechnet, durch I, und der andere Endpunkt des Linienabschnitts durch II bezeichnet, so ist δ der Richtungswinkel von I gegen II und vorzeichenrichtig:

$$\Delta x = x_{II} - x_I. \quad (7)$$

Die letztere Beziehung wird in 100 000 km-Einheiten mit fünf Dezimalstellen (also mit Meterschärfe) ausgedrückt.

a) In der *ersten Stufe*:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = aD \cdot \Delta x_1 \quad (8)$$

bzw. unter Anwendung der Angaben aus Tabelle 4:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \gamma \cdot \Delta x_1 \quad (9)$$

wo γ das Produkt aus den zu \bar{x}_1 gehörenden Werten von a und D ist.

(Da mit zunehmendem \bar{x} sich D und damit auch γ vermindern, sind die Differenzen d negativ.)

γ ist dann positiv, wenn von einem östlichen Halbstreifen auf einen westlichen transformiert wird, und negativ, wenn die Transformation von West nach Ost erfolgt.

b) Auf der *zweiten Stufe* wird aus δ_1 mit Hilfe von Tabelle 2 der Näherungswert für δ_2 mit Minutenschärfe ermittelt:

$$(\delta_2) = \delta_1 + \beta. \quad (10)$$

(Für das Vorzeichen von β gilt dasselbe, wie bei der ersten Stufe für das Vorzeichen von γ .) Sodann werden mit Richtungswinkeln von Minutenschärfe $\cos \delta_1$ und $\cos (\delta_2)$ bis zur fünften Dezimalstelle angeschrieben, worauf der Näherungswert für Δx_2 errechnet wird:

$$(\Delta x_2) = \frac{\cos (\delta_2)}{\cos \delta_1} \Delta x_1. \quad (11)$$

Es wird die Koordinate \bar{y}_1 des mittleren Punktes des Linienabschnitts in 100 000 km-Einheiten bis zu fünf Dezimalstellen bestimmt und deren Absolutwert von dem D -Wert für \bar{x}_1 in Abzug gebracht. Das ermittelte Ergebnis mit

umgekehrtem Vorzeichen gegenüber y_1 genommen, erhält man

$$|\bar{y}_2| = D - |\bar{y}_1| \quad (12)$$

dann

$$\Delta_2 - \Delta_1 = a [\bar{y}_1 \cdot \Delta x_1 - (\bar{y}_2) \cdot (\Delta x_2)]. \quad (13)$$

Der Multiplikator a wird der Tabelle 3 entnommen.

c) Für die *dritte Stufe* ist auch der Wert Δy_1 notwendig, der im Sinne der Gl. (7) errechnet wird. Die Richtungswinkel δ_1 und (δ_2) mit Minutenschärfe angenommen, schreibt man auch die Sinusse (ebenfalls bis fünf Dezimalstellen) an und damit berechnet man den Näherungswert

$$(\Delta y_2) = \frac{\sin(\delta_2)}{\sin \delta_1} \Delta y_1. \quad (14)$$

Nachfolgend wird an der in der zweiten Stufe erhaltenen Richtungsreduktionsdifferenz noch mit der Größe

$$\Delta' = b [-\Delta x_1 \cdot \Delta y_1 + (\Delta x_2) \cdot (\Delta y_2)] \quad (15)$$

eine Korrektur durchgeführt. (Den Multiplikator b erhält man aus Tabelle 3; im untersuchten Bereich beträgt er 4,22.)

Es kann vorkommen, daß Δx_1 (und damit auch $\cos \delta_1$) gleich Null oder ein ganz niedriger Wert ist. Dann ist die erste Stufe unbrauchbar. Mit der Formel

$$(\Delta x_2) = \Delta x_1 - \Delta y_1 \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (16)$$

werden der Näherungswert von Δx_2 sowie mit der Formel (12) auch (\bar{y}_2) ermittelt und weiter rechnet man mit der zweiten (oder dritten) Stufe. Ist Δy_1 (und damit auch $\sin \delta_1$) gleich Null oder ein sehr niedriger Wert, so wird für die dritte Stufe

$$(\Delta y_2) = \Delta y_1 + \Delta x_1 \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (17)$$

benutzt.

Es soll ein *Zahlenbeispiel* für die Berechnung von $(\Delta_2 - \Delta_1)$ zwischen zwei benachbarten 3° Streifen auf allen drei Stufen gelöst werden.

Es seien für den Geradenabschnitt:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &\sim 5121 \text{ km}; \bar{y}_1 = +0,73295; \\ \Delta y_1 &= +0,23016; \Delta x_1 = +0,11393; \delta_1 \sim 63^\circ 40'. \end{aligned}$$

Die Endpunkte auf die Projektion 2 exakt umgerechnet, ergeben sich die genauen Werte der Richtungsreduktionen in Punkt I zu

$$\Delta_1 = -2,0056''; \Delta_2 = +4,3180''$$

also nach exakter Berechnung (mit Millisekundengenauigkeit):

$$\Delta_2 - \Delta_1 = +6,324''.$$

a) Mit der *ersten Stufe* erhält man aus Tabelle 4

bei 5100 km	$\gamma = +58,863$
für d 21 km ($9,72 \cdot 21$)	$= - 0,204$
	$\gamma = +58,659$

(Die Interpolation läßt sich auf der Rechenmaschine einfach durchführen!)
Nach Formel (9) ist:

$$(\Delta_2 - \Delta_1) = +6,683''.$$

Die Abweichung von dem genauen Wert (wobei der genaue Wert aus dem Näherungswert in Abzug gebracht wird) beträgt: $\varepsilon = +0,359''$, dem Unsicherheiten von 17,4 mm für eine Entfernung von 10 km und von 34,8 für 20 km entsprechen.

(Die Abweichungen ε werden auch im weiteren in der hier angewandten Weise bestimmt!)

b) Mit der *zweiten Stufe* erhält man nach Tabelle 1

bei 5100 km	$D = 2,32257$
für d 21 km ($37,83 \cdot 21$)	$= - 794$
	$D = 2,31463$
	$\bar{y}_1 = +0,73295$
	$\bar{y}_2 = -1,58168$

Nach Tabelle 2 gilt:

$$\begin{aligned} (\delta_2) &\sim \delta_1 + \beta = 63^\circ 40' + 2^\circ 10' = 65^\circ 50' \\ \cos \delta_1 &= 0,44359 \quad \cos(\delta_2) = 0,40939 \end{aligned}$$

und nach der Formel (11):

$$(\Delta x_2) = \frac{0,40939}{0,44359} \Delta x_1 = + 0,10514.$$

Sodann erhält man mit Formel (13):

$$\Delta_2 - \Delta_1 = +6,332''; \quad \varepsilon = +0,008''.$$

Die Unsicherheit ist also 0,3 mm für 10 km; 0,6 mm für 20 km.

c) Für die dritte Stufe sind noch die Größen

$$\sin \delta_1 = 0,89623 \quad \text{und} \quad \sin(\delta_2) = 0,91236$$

erforderlich. Mit Formel (14) erhält man

$$(\Delta y_2) = \frac{0,91236}{0,89623} \Delta y_1 = +0,23430$$

ferner nach Formel (15):

$$\Delta' = -0,007''.$$

Mit den Ergebnissen der zweiten Stufe zusammengezogen ergeben sich

$$\Delta_2 - \Delta_1 = +6,332'' - 0,007'' = +6,325'' \quad \text{und} \quad \varepsilon = +0,001''.$$

Die Unsicherheit beträgt 0,05 mm für 10 km, 0,1 mm für 20 km.

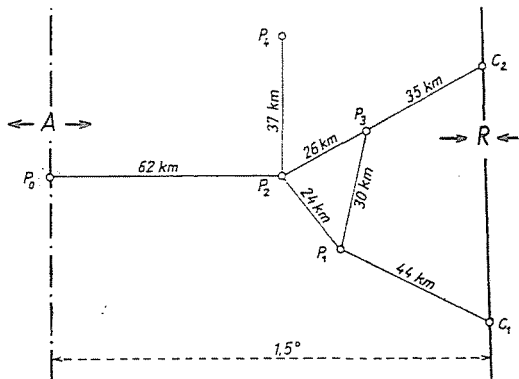


Abb. 1

Von der Ostseite des 3° Streifens ausgehend werden für die in Abb. 1 schematisch dargestellten Linienabschnitte die Richtungswinkel transformiert. Die angeschriebenen km-Werte sind abgerundet, daher geben sie nur darüber Aufschluß, daß die Untersuchung auch für längere Linienabschnitte als üblich durchgeführt wurde. Die Abbildung zeigt, daß auch Punkte in extremer Randlage herangezogen wurden, die in viel größerer Entfernung vom Randmeridian liegen als bis wohin sich die Berechnungen üblicherweise erstrecken (z. B. liegt der Punkt P_0 auf dem Anfangsmeridian der Projektion I). Durch

beide Tatsachen werden selbstverständlich die Abweichungen ε noch erhöht, d. h. daß bei der Berechnung von Punkten in der üblichen Entfernung von 30 bis 40 km vom Anfangsmeridian die ε -Werte noch niedriger sind als im angeführten Beispiel. (In den Abbildungen sind die Anfangsmeridiane durch A , die Randmeridiane durch R bezeichnet; die Linie A gehört z. B. zu beiden Hälften des Streifens I — es wurde aber nur der östliche Halbstreifen gezeichnet —, die Linie R stellt den gemeinsamen Randmeridian der beiden Nachbarstreifen dar.)

In *Tabelle 5* wurden die exakten Rechenwerte von $\Delta_2 - \Delta_1$ für aus den Punkten P_1, P_2, P_3 ausgehende Linienabschnitte, und dann auf allen drei Stufen die Abweichungen ε angegeben. Die Indizes weisen auf die Stufen hin.

Tabelle 5

Endpunkte		$(\Delta_2 - \Delta_1)''$	ε_1''	ε_2''	ε_3''
P_1	P_2	+11,033	-0,232	-0,004	-0,002
	P_3	+17,375	+0,098	-0,015	-0,002
	C_1	-11,089	+0,522	-0,018	0,000
P_2	P_0	+ 1,127	—	+0,062	+0,001
	P_4	+21,704	-0,013	-0,024	-0,002
	P_3	+ 6,324	+0,359	+0,008	+0,001
	P_1	-11,027	+0,236	-0,002	0,000
P_3	P_1	-17,349	-0,124	-0,011	+0,002
	P_2	- 6,337	-0,346	+0,006	-0,001
	C_2	+ 9,656	+0,398	+0,009	-0,002

In *Tabelle 6* sind für einige ε -Werte die linearen Abweichungen e in mm angegeben, die für Entfernungen von 10 bzw. 20 km gelten.

Nehmen wir nun ein Beispiel für die 6° Streifen. Notwendige Ausgangsdaten:

$$\bar{x}_1 \sim 5128 \text{ km}; \bar{y}_1 = +2,12040; \Delta y_1 = +0,37914;$$

$$\Delta x_1 = +0,19864; \gamma = +117,181; D = 4,62396;$$

$$\delta_1 \sim 62^\circ 21'; \beta = 4^\circ 20'.$$

(Die Länge des Linienabschnitts beträgt etwa 40 km.)

Aus der genauen Umrechnung erhält man:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = +21,389''.$$

Tabelle 6

ε''	ε mm	
	für 10 km	für 20 km
1,0	48,5	97,0
0,8	38,8	77,6
0,5	24,2	48,5
0,1	4,8	9,7
0,08	3,9	7,8
0,06	2,9	5,8
0,03	1,5	2,9
0,01	0,5	1,0
0,008	0,4	0,8
0,006	0,3	0,6
0,005	0,2	0,5
0,003	0,1	0,3
0,001	0,0	0,1

Die Abweichungen ε sind

- auf Stufe 1: $+1,888''$ (für 10 km 91,6 mm)
- auf Stufe 2: $+0,032''$ (für 10 km 1,6 mm)
- auf Stufe 3: $-0,005''$ (für 10 km 0,2 mm)

Im 6° Streifensystem kann auch die Abweichung der Stufe 1 nicht für hoch gehalten werden, da ja in der Nähe des Randmeridians die *Längenverzerrung* der Projektion ohnehin etwa 60 bis 70 cm pro km erreicht.

IV

Das im vorigen dargelegte Verfahren läßt sich auch zwischen Streifen *verschiedener Breite* anwenden. Hier wird vor allem an Transformationen von 3° bzw. 2° Streifen auf den 6° Streifen gedacht. Vorläufig wird angenommen, daß der Anfangsmeridian des 6° Streifens zugleich der Anfangsmeridian des einen schmaleren (inneren) Streifens in dessen Bereich ist. Demnach liegen im 6° Streifen in beiden Richtungen vom Anfangsmeridian (also in je 3° Breite) die benachbarten Halbstreifen zweier 3° Streifen. Im östlichen Halbstreifen des 6° Streifens befinden sich z. B. die östliche Hälfte des inneren 3° Streifens und die westliche Hälfte des äußeren 3° Streifens (in *Abb. 2* ist diese Lage auch schematisch dargestellt). Da der Anfangsmeridian des inneren 3° Streifens mit dem Anfangsmeridian des 6° Streifens identisch ist, sind auch ihre Koor-

dinaten gleich; damit erübrigt sich die Umrechnung. Aus diesem Umstand ergibt sich auch, daß bei der Umrechnung vom äußeren auf den inneren 3° Streifen gleich die Koordinaten für den 6° Streifen erhalten werden. Das Verfahren stimmt also mit der Umrechnung auf den Nachbarstreifen überein.

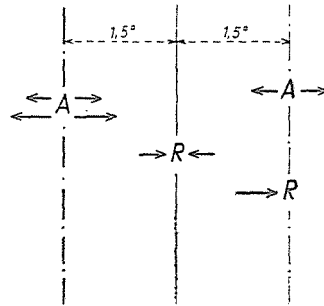


Abb. 2

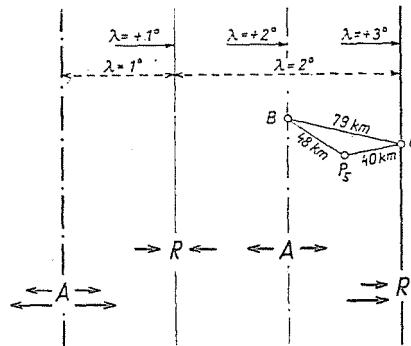


Abb. 3

Befinden sich im Bereich des 6° Streifens 2° Streifen, so fallen auf beide Hälften je ein halber innerer und je ein äußerer 2° Streifen (Abb. 3). Von dem inneren 2° Streifen ist wegen des gemeinsamen Anfangsmeridians keine Umrechnung nötig. Für die Umrechnung von der inneren Seite des äußeren 2° Streifens auf die Nachbarstreifen läßt sich das beschriebene Verfahren anwenden. Die Transformation von der äußeren Streifenseite aus unterscheidet sich nur insofern von diesem Verfahren, daß

$$|(\bar{y}_2)| = D + |\bar{y}_1| \quad (18)$$

und das Vorzeichen mit dem Vorzeichen von \bar{y}_1 übereinstimmt. D , γ und β sind für den 2° Streifen angegebene Werte (siehe die Tabellen 1, 4 bzw. 2). Die Vorzeichenregel für β und γ lautet: Rechnet man nach Osten um, so sind

beide Werte positiv. (Sie haben also ein positives Vorzeichen, wenn der 2° Streifen vom Anfangsmeridian des 6° Streifens nach Westen liegt und von 2° Streifen auf den 6° Streifen transformiert wird, oder man vom 6° Streifen auf den von seinem Anfangsmeridian nach Osten liegenden 2° Streifen übergeht.) Beide Werte sind negativ, wenn gegen Westen umgerechnet wird.

Als Beispiel wurden für die in der ebenfalls schematischen Abbildung 3 dargestellten drei Geradenabschnitte $\Delta_2 - \Delta_1$ der genaue Wert der Differenz und drei Stufenwerte berechnet. Die Endpunkte *B* und *C* liegen auf dem Anfangs- bzw. äußeren Randmeridian des äußeren 2° Streifen. In der Abbildung zeigen die kürzeren Pfeile auf die 2° Streifen, die längeren auf die 6° Streifen hin.

Betrachten wir den Linienabschnitt $C - P_5$. Die Ausgangsdaten sind:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &\sim 5120 \text{ km}; \bar{y}_1 = +0,57867; \Delta y_1 = -0,38500; \\ \Delta x_1 &= -0,09628; \gamma = -39,112; D = 1,54334; \\ \delta_1 &\sim 255^\circ 58'; \beta = -1^\circ 26'. \end{aligned}$$

(Die Länge des Linienabschnitts beträgt etwa 40 km.)

Der durch exakte Berechnung erhaltene Wert von $\Delta_2 - \Delta_1$ sowie die Abweichungen ϵ wurden auch für die in der Abbildung skizzierten beiden anderen Linienabschnitte im oberen Teil von *Tabelle 7* zusammengestellt. Der untere Teil der Tabelle bezieht sich auf dieselben Linienabschnitte, jedoch für den Fall einer Transformation vom breiteren Streifen auf den schmäleren.

Tabelle 7

	Endpunkte		$(\Delta_2 - \Delta_1)^*$	ϵ_2	ϵ_2'	ϵ_3
Von 2° Streife auf 6° Streife	<i>C</i>	<i>P₅</i>	+ 4,306	-0,540	-0,018	-0,003
		<i>B</i>	- 6,020	-1,002	-0,067	-0,001
	<i>P₅</i>	<i>B</i>	-10,364	-0,442	-0,009	-0,001
		<i>C</i>	- 4,277	+0,489	-0,011	+0,003
	<i>B</i>	<i>C</i>	+ 6,141	+0,899	-0,054	+0,007
		<i>P₅</i>	+10,380	+0,442	-0,007	+0,001
Von 6° Streife auf 2° Streife	<i>C</i>	<i>P₅</i>	- 4,306	+0,162	+0,019	+0,004
		<i>B</i>	+ 6,020	+0,258	+0,066	+0,005
	<i>P₅</i>	<i>B</i>	-10,364	+0,158	+0,009	+0,001
		<i>C</i>	+ 4,277	-0,133	+0,010	-0,004
	<i>B</i>	<i>C</i>	- 6,141	-0,137	+0,055	-0,004
		<i>P₅</i>	-10,380	-0,042	+0,007	-0,001

Aus der Tabelle ist zu erkennen, daß bei den letzteren Berechnungen die Abweichungen ε_1 bedeutend kleiner sind als bei den ersteren. Das ist auch so richtig, da — wie bereits gesagt wurde — der 6° Streifen wegen der ungünstigeren Längenverzerrungsverhältnisse eine größere Unsicherheit verträgt als der 2° Streifen. Die zweite und die dritte Stufe sind in beiden Beziehungen gleich befriedigend.

Wird von dem breiteren Streifen auf den schmäleren transformiert, dann gilt

$$|(\bar{y}_2)| = |\bar{y}_1| - D \quad (19)$$

und die beiden \bar{y} haben das gleiche Vorzeichen.

Schließlich soll noch erwähnt werden, daß die notwendigen Tabellen auch dann, wenn die schmälere Streifen auf dem breiteren eine von letzterem abweichende Einteilung aufweisen (wenn sie also keinen gemeinsamen Anfangsmeridian haben) leicht zusammengestellt werden können, wobei Prinzip und Verlauf der Transformation unverändert bleiben.

Zusammenfassung

Eine massenhafte Umrechnung zwischen den Gauß—Krüger-Projektionsstreifen auf der elektronischen Rechenanlage läßt sich am raschesten mit Hilfe von Polynomen durchführen. Es ist jedoch auch ein Verfahren notwendig, das sich für einen kleineren Tischrechner oder für die manuelle Rechenmaschine eignet. Es sind mehrere derartige Verfahren bekannt, darunter auch das vom Verfasser empfohlene und in Ungarn allgemein angewandte Verfahren. Im vorliegenden Beitrag wird eine einfachere und besser übersichtliche derartige Methode vorgeschlagen. Für die Umrechnung werden die Richtungswinkel transformiert, dann werden die Koordinaten der Punkte zwischen exakt umgerechneten Punkten in Entfernungen von 25 bis 30 km voneinander (z. B. zwischen Triangulationspunkten I. Ordnung) durch Vorwärtseinschneiden bestimmt. Für die Berechnung der Richtungswinkel und des Vorwärtseinschneidens sind einfache Programme für Tischcomputer vorhanden, diese Operationen können aber auch mit der Rechenmaschine manuell rasch durchgeführt werden.

Das vorgeschlagene Verfahren hat drei Stufen. Auf der ersten Stufe werden die genauen Koordinaten in der Regel nur mit einer Genauigkeit von mehreren Zentimetern angenähert, die Genauigkeit der zweiten Stufe kann auf 4 bis 5 mm geschätzt werden, die dritte Stufe liefert — sozusagen — vollkommen genaue Ergebnisse.

Schrifttum

1. HRISTOW, WL. K.: Die Gauß—Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid. Leipzig, 1943.
2. HAZAY, I.—TÁRCZY-HORNOCH, A.: A Gauss—Krüger koordináták számítása (Berechnung der Gauß—Krügerschen Koordinaten). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
3. HAZAY, I.: Földi vetületek (Terrestrische Projektionen). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
4. HAZAY, I.: Vetülettan (Projektionslehre). Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

Prof. Dr. István HAZAY, Korr. Mitgl. d. Ung. Ak. Wiss. H-1521 Budapest