EIN NEUES BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR DIE PRÜFUNG VON HORIZONTALBEWEGUNGEN

Von

O. L'Auné

Lehrstuhl für Vermessungskunde, Geodätisches Institut, TU Budapest

(Eingegangen am 7. Oktober 1974)

Am Lehrstuhl für Vermessungskunde des Geodätischen Instituts an der Technischen Universität Budapest wurden im Auftrag der Straßenbaudirektion des Ministeriums für Verkehrs- und Postwesen in den Jahren 1971/73 an der Straßenbrücke bei Ráckeve Bewegungsprüfungen durchgeführt.

Die Prüfung war deshalb notwendig, weil die Gründungskörper der Brückenköpfe mit der Zeit durch das Wasser unterwaschen und durch das Eishochwasser 1956 beschädigt waren.

Es sollte ermittelt werden, ob sich nach der Verrückung die Bewegung der Brückenkopfe fortsetzt oder ob sie schon aufgehört hat.

Die horizontalen Verrückungen der Brückenköpfe wurden durch wiederholte Triangulation mit einem mittleren Fehler von ± 3 mm bestimmt. Die Messungen sind in [1] ausführlich beschrieben.

In Abb. 1 ist das Prinzip der Bestimmung der einzelnen geprüften Punkte schematisch dargestellt. Für die Bestimmung der Horizontalver-

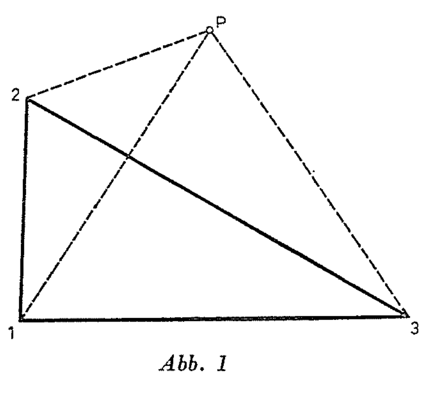

Abb. 1

rückung des geprüften Punktes P wurden in den Punkten 1, 2 und 3 Beobachtungspfeiler aus Beton gebaut und von diesen aus drei Jahre lang alle zwei Monate (also insgesamt 18mal) mit einem Theodolit Wild T2 Winkelmessungen mit einem durchschnittlichen mittleren Fehler von $\pm 1''$ durchgeführt. Zwischen den Punkten 1 und 2 wurde auch eine Basismessung mit einer relativen Zuverlässigkeit von 1:900 000 unternommen.

Um die Verrückung zu berechnen, wurden die Koordinaten des Punktes P in Ausgangslage und nach jeder Messung durch Vorwärtseinschnitt bestimmt. Die Differenzen der Koordinaten ergaben die Verrückungskomponenten in den Richtungen der Koordinatenachsen.

Das Vorwärtseinschneiden wurde aus den zwei Dreiecken, die in Punkt P den günstigsten Schnitt ergeben, also im dargestellten Fall aus den Dreiecken $1P3$ und $2P3$ errechnet. Die gleichzeitig aus verschiedenen Dreiecken ermittelten Abweichungen der Koordinaten der einzelnen Punkte waren für die Genauigkeit der Bestimmung kennzeichnend. Der zuverlässigste Wert für die Punktlage wurde durch Mittelbildung erhalten.

In der vorliegenden Arbeit werden nur die Horizontalverrückungen behandelt. Das bekannte Berechnungsverfahren ist ziemlich umständlich und es lohnt sich, die Berechnungen des Vorwärtseinschneidens irgendwie zu vereinfachen, da ja außerordentlich oft Vorwärtseinschneiden durchzuführen ist. Am günstigsten ist, den Umstand auszunutzen, daß — da es sich um kleine Bewegungen handelt — die lineare Verschiebung der Verdrehung proportional ist. Die Berücksichtigung dieser Proportionalität ist sehr vorteilhaft, weil statt komplizierter trigonometrischer Funktionen nur einfache Zusammenhänge berechnet werden müssen.

Es soll z. B. das Vorwärtseinschneiden des Punktes P von den Punkten 1 und 3 aus geprüft werden. Nach den Ergebnissen der ersten Messung — im weiteren Grundmessung genannt — werden die Koordinaten des geprüften Punktes P mit Vorwärtseinschnitt berechnet. Diese seien y_P und x_P.

Die Ordinate y_P des Punktes erhält man durch Vorwärtseinschneiden aus der Beziehung: [3]

$$y_P = y_B + \frac{-(y_B - y_A)\operatorname{cotg}\beta + (x_B - x_A)}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$$

wo $y_B = y_3$, $x_B = x_3$, $y_A = y_1$, $x_A = x_1$, $\alpha = P13$ und $\beta = P31$.

Die Abszisse des Punktes P erhält man aus

$$x_P = x_B + \frac{-(x_B - x_A)\operatorname{cotg} - (y_B - y_A)}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} .$$

Anstatt die Vorwärtseinschneiden massenhaft zu geben, suchen wir ein einfacheres Verfahren.

Wird das Vorwärtseinschneiden symbolisch bezeichnet (die Ableitung nur für die Ordinate durchgeführt, was für x in ähnlicher Weise geschieht), gilt

$$y_P = f_y(\alpha, \beta) ;$$

y_P ist also von den gemessenen Winkeln α und β abhängig und damit gilt

$$y'_P = f_y(\alpha', \beta')$$

wo der mit einem Akzent bezeichnete Wert die Ordinate nach der Verschiebung, der Wert ohne Akzent die aus der Grundmessung berechenbare Ordinate bedeuten.

Die Komponente in y-Richtung der Verschiebung ist

$$y'_P - y_P = f_y(a', \beta') - f_y(\alpha, \beta).$$

Der Zusammenhang zwischen den Vorwärtseinschneidewinkeln des Punktes in Anfangslage und nach der Verschiebung lautet

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha \quad \text{und} \quad \beta' = \beta + \Delta\beta$$

wo Δa und $\Delta\beta$ die der Verschiebung entsprechenden Verdrehungen sind. Die von den Verdrehungen abhängige Verschiebung darf wegen ihrer Kleinheit auch in linearer Form angeschrieben werden. Das geschieht indem die Funktion der Verrückung

$$y'_P - y_P = f_y(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) - f_y(\alpha, \beta)$$

an den Stellen α und β in Reihe entwickelt wird:

$$y'_P - y_P = f_y(\alpha, \beta) + \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial f_y}{\partial \beta} \Delta\beta - f_y(\alpha, \beta)$$

wo die Potenzen über der linearen wegen ihrer geringen Größe vernachlässigt werden.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Verrückungskomponente $x'_P - x$ in Reihe entwickeln.

Die Komponente in y-Richtung der ersten Verschiebung eines Punktes durch y_1 bezeichnet, erhält man

$$\Delta y_1 - \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} \Delta\alpha_1 + \frac{\partial f_y}{\partial \beta} \Delta\beta_1 .$$

Der Einfachheit halber seien im weiteren die Koeffizienten der Verdrehungen (die partialen Ableitungen) nacheinander mit a_x und b_y bezeichnet, damit ergeben sich die ersten zwei Verrückungen zu

$$\Delta y_1 = a_y \Delta\alpha_1 + b_y \Delta\beta_1$$

und

$$\Delta y_2 = a_y \Delta\alpha_2 + b_y \Delta\beta_2 .$$

Hierin bedeuten der Index 1 die erste, der Index 2 die zweite Verschiebung. Das gilt sowohl für die lineare Verschiebung als auch für die Verdrehung.

Berechnen wir in der weiter obengenannten Weise durch Vorwärtseinschneiden die beiden axialen Komponenten der Koordinaten derselben beiden Punkte. In Kenntnis der Verdrehung können dann durch die Lösung der obigen beiden Lineargleichungen a_y und b_y errechnet werden. Die Linearisierung läßt sich also auch durch die Lösung eines Gleichungssystems, nicht nur durch Reihenentwicklung durchführen. Die Koeffizienten a_y und b_y sind für eine jeweilige lineare Verrückung des betreffenden Punktes gültig; nachdem die Verdrehung gemessen und in die vorstehende Gleichung eingesetzt ist, erhält man die Komponenten in Koordinatenrichtung des Punktes genau so als ob die Differenz der durch Vorwärtseinschneiden ermittelten Koordinaten berechnet worden wäre.

Durch die Linearisierung — auf welche Weise sie auch durchgeführt wird — läßt sich dem Vorwärtseinschneiden gegenüber eine beträchtliche Zeitersparnis erzielen. Es stellt sich die Frage, ob sich diese Zeitersparnis noch vergrößert werden könnte? Die bisherige Ersparnis ergab sich aus der Auflösung von linearen Formeln statt trigonometrischer Funktionen. Auch die Auflösung der linearen Formeln läßt sich ersparen, wenn statt zu rechnen, ein Nomogramm benutzt wird.

Nach OLTAY [2] »dienen die Nomogramme dazu, die in einem Arbeitsbereich durchzuführenden Berechnungen zu erleichtern«. Das wird erreicht, da in Kenntnis von n-1 Veränderlichen einer Funktion mit n Veränderlichen die n-te Veränderliche sozusagen auf den ersten Blick erhalten wird. Es handelt sich zwar um eine graphische Methode, mit der jedoch eine beliebige Genauigkeit erreicht werden kann.

Es sind viele Arten der Nomogramme bekannt, zweckmäßigerweise wird jedoch die einfachste herangezogen, wo sowohl der Gebrauch als auch die Konstruktion des Nomogramms einfach sind. Das ist das sog. Punktreihen- (Kollinear-) Nomogramm oder D'OCAGNEsche Nomogramm. Da es sich im untersuchten Fall um eine Funktion mit drei Veränderlichen handelt, liegen die Punktreihen in drei parallelen Geraden. Die allgemeine Form des Nomogramms lautet

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

wo die α-Werte die Veränderlichen sind. Ein Nomogramm aus drei Geraden läßt sich nur dann konstruieren, wenn die Veränderlichen in der Form

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3)$$

getrennt werden können. Widrigenfalls muß erst die Trennung durchgeführt werden. Hier wurde bereits durch die Linearisierung die Trennung ausgeführt.

Im folgenden wird die Konstruktion des Nomogramms beschrieben. Es werden die Geraden der Funktionen f_1 und f_2 angenommen und durch 1 und 2 bezeichnet (Abb. 2).

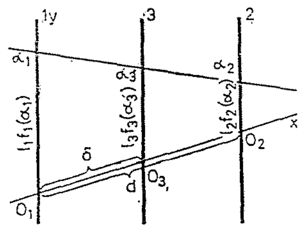

Abb. 2

Die die Funktionen f_1 und f_2 betreffenden, numerierten Punktreihen werden auf die Geraden 1 und 2 von den Ursprüngen O_1 und O_2 aus mit den Moduli (Schritten) l_1 und l_2 aufgetragen.

O_3, der Ursprung der dritten Punktreihe liegt in der Geraden O_1 O_2, wenn nämlich

$$f_1 = f_2 = 0$$

muß auch f_3 gleich Null sein. Die dritte Punktreihe ist bestimmt, wenn die Entfernung δ und f_3 bekannt sind (δ ist der Ort der Geraden auf der Geraden $O_1\,O_2$ von O_1 aus gemessen).

Es seien die Gerade 1 die y-Achse und die Gerade $O_1\,O_2$ die x-Achse und schreiben wir an, daß die Punkte α_1, α_2 und α_3 in derselben Geraden liegen. Durch diesen Zusammenhang wird das d'Ocagne-Nomogramm gekennzeichnet.

Die Kollinearität (die Lage in derselben Geraden) bedeutet, daß die Fläche des durch die drei Punkte durchgehenden Dreiecks gleich Null ist, d. h.

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & l_1 f_1 & 1 \\ d & l_2 f_2 & 1 \\ \delta & l_3 f_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Daraus ist

$$(\delta - d)\, l_1 f_1 - \delta\, l_2 f_2 + d\, l_3 f_3 = 0,$$

wo

$$f_3 = f_1 + f_2,$$

also gilt

$$(\delta l_1 - d l_1 + d l_3)\, f_1 - (\delta l_2 - d\, l_3)\,)\, f_3 = 0.$$

Da die Identität (also die Unabhängigkeit von den α-Werten) nur dann wahr ist, wenn die Koeffizienten von f_1 und f_3 gleich Null sind, gilt also

$$\delta l_1 - dl_1 + dl_3 = 0 \text{ und}$$

$$\delta l_2 - \delta l_3 = 0.$$

Daraus ist

$$\delta = d \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

Im vorliegenden Fall gilt

$$l_1 = a_y \quad \text{und} \quad l_2 = b_y$$

da der Zusammenhang

$$f_3(\alpha_3) = f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2)$$

im vorliegenden Fall wie folgt lautet:

$$\Delta y = a_y \Delta\alpha + b_y \Delta\beta\ .$$

Schließlich erhält man

$$\delta = d \frac{a_y}{a_y + b_y}$$

und damit kann das Nomogramm konstruiert werden.

Das Nomogramm wird benutzt, indem man ein Lineal an die entsprechenden Werte von $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ ansetzt, das auf der Achse Δy den Wert

$$\Delta_y = a_y \Delta\alpha + b_y\, \Delta\beta$$

herausschneidet.

Ein Beispiel für das fertige Nomogramm ist in Abb. 3 zu sehen. Bei der Bewegungsprüfung wurden alle geprüften Punkte aus zwei Dreiecken geeigneter Form vorwärtseingeschnitten. Damit gehört zu jeder Bestimmung aus einem Dreieck der Verrückungskomponenten in y- bzw. x-Richtung der

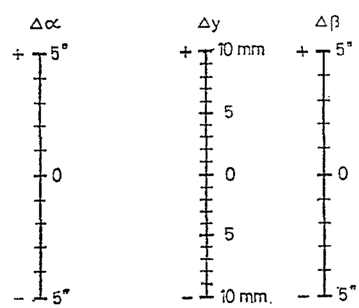

Abb. 3

einzelnen geprüften Punkte je ein ähnliches Nomogramm, mit dessen Hilfe die einzelnen Koordinatenveränderungen in Abhängigkeit von den Verdrehungen—ohne Vorwärtseinschnittberechnung — einfach und rasch, jedoch mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt werden können.

Damit haben wir nachgewiesen, wie ohne das geringste Zugeständnis hinsichtlich der Genauigkeit zu machen, bei Verrückungsprüfungen ein beträchtlicher Rechenaufwand erspart werden kann. Es wurde nämlich eine Methode gefunden, nach der sich Bewegungen von Bauwerken mit Hilfe eines Nomogramms mit geringer Rechenarbeit bestimmen lassen. Das Verfahren ermöglicht, das Ergebnis mit einem um eine Größenordnung kleineren Arbeitsaufwand dem ursprünglichen Verfahren gegenüber zu erhalten, also eine beträchtliche Zeit zu sparen.

Zusammenfassung

Es wird die Berechnung der Verschiebungsprüfung einer Straßenbrücke mit Hilfe eines Nomogramms behandelt. Nach diesem Verfahren werden Ergebnisse gleicher Genauigkeit erhalten wie aus den üblichen umständlichen Berechnungen. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Methode ist, daß es sich um kleine Bewegungen handle, weil dann die Verschiebung eine Linearfunktion der Verdrehung ist. Die Methode ermöglicht eine beträchtliche Arbeitsersparnis, wenn vielmals die Koordinatenänderungen eines Punktes aufgrund von aus demselben Aufstellungspunkt durchgeführten Messungen aus Vorwärtseinschneiden berechnet werden müßten.

Schrifttum

1. HORVÁTH, K.: Bewegungsprüfung an der Brücke über den Donauarm bei Ráckeve.* Geodézia és Kartográfia H. 4, Jg. 25 (1973).
2. OLTAY, K.: Geodäsie,* Bd. I. (Lehrbuch II. Auflage) Németh József Verlag, Budapest, 1923.
3. L'AUNÉ, O.: Rechentechnik in der Geodäsie* I. — Lehrstoffheft. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

* In ungarischer Sprache.

Dozent Ottó L'AUNÉ, H-1521 Budapest