DIE BERECHNUNG VON TRAGWERKEN MIT BEDINGTEN STÜTZEN UND VERBINDUNGEN DURCH QUADRATISCHE PROGRAMMIERUNG

Von

B. Roller—B. Szentiványi

Lehrstuhl für Mechanik, TU Budapest

Eingegangen am 15. Januar 1975

1. Einführung

Bei der Berechnung von Fertigbauten auf nachgiebigem Untergrund kommen verschiedene Arten von bedingten Stützen und Verbindungen vor. Solche sind z. B. Stützen, die nur auf Druck beansprucht werden können und sich sonst anheben, oder Knoten von Großtafelbauten bzw. Rahmenecken mit beschränkter Tragfähigkeit, ferner Knotenverbindungen, wo wegen der Ungenauigkeiten der Bauelemente oder baulicher Ungewißheiten mit einer sicheren Berührung nicht gerechnet werden darf.

Es wird außerdem der Anspruch gestellt, daß diese Fragen nach der Theorie zweiter Ordnung geprüft werden. Die ständige Last ist nämlich erheblich, darum verursachen schon verhältnismäßig kleine Verrückungen bzw. anfängliche Formfehler große sekundäre Steifigkeitsverminderungen. Die Wirkung auf eine Konstruktion aus einer abschnittsweisen Bauausführung, d. h., aus der stufenweisen Eintragung der ständigen Last, kann auch nach der Theorie zweiter Ordnung behandelt werden.

Die Berücksichtigung der Trennung ist eine Frage, die im Hochbau ebenso wichtig ist wie im Tiefbau, bei der Berechnung von Flachgründungen.

Von der allgemeinen Theorie der Stabwerke ausgehend sollen nun einige Methoden der Matrizenstatik überblickt werden. Wegen der Umständlichkeit der numerischen Berechnungen wird zum Ziel gesetzt, Aufgaben zu konstruieren, deren Lösungsprogramme entweder in Rechenzentren vorhanden sind oder — wenn das nicht der Fall ist — einfach programmiert werden können.

Der Zustand eines Tragwerks wird im allgemeinen entweder durch unmittelbare energetische Betrachtungen oder mittelbar, auf Grund von Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen geprüft. Ist der Werkstoff ideal elastisch, sind aber die Stützen unvollkommen, d. h. bedingt (sie arbeiten z. B. nur in einer Richtung), so führt die Energiemethode zu einem *quadratischen* Programmierungsproblem. Eine gleichwertige »pseudolineare« Variante dieser Aufgabe kann sowohl nach mathematischen als auch nach statischen Überlegungen aufgeschrieben werden. Ist der Werkstoff entweder starr-plastisch oder vollkommen elastisch-plastisch, wird die Aufgabe in mittelbarer Weise behandelt. Das Traglastverfahren der Stabkonstruktionen ergibt eine *lineare Programmierungsaufgabe* [9]. Sollen schließlich die dem Grenzzustand vorangehende Zustandsänderung der Tragkonstruktion oder der Versteifungsprozeß behandelt werden, der während einer stufenweisen Schließung von Anfangslücken in einem elastischen System stattfindet, wobei vorausgesetzt wird, daß die schon einmal aufgelösten Zwangsverbindungen nicht mehr wirken, bzw. die bedingten Verbindungen, die schon wirksam wurden, nicht mehr aufgelöst werden können, so besteht die Möglichkeit, die Programmierungsaufgabe zu vermeiden. In diesem Gedankengang dürfte das betreffende Verfahren »Programmierung 0-ten Grades« genannt werden [7].

Dieser Aufsatz beschränkt sich bloß auf die Erörterung der ersten Frage.

2. Die Theorie der Zustandsanalyse

Bei der prinzipiellen Analyse vollkommen elastischer Stabwerke, die bedingte Stützen und Verbindungen enthalten, gehen wir von der allgemeinen Zustandsgleichung der Stabwerke aus [14].

Die Gleichung in Hypermatrizenform lautet:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{q}$ — Spaltenvektor der Knotenlasten;
$\mathbf{t}$ — Spaltenvektor der kinematischen Belastungsglieder (Temperaturveränderungen usw.) an den Stäben;
$\mathbf{u}$ — Knotenpunktverrückungen;
$\mathbf{s}$ — Vektor der Schnittkräfte;
ferner
$\mathbf{F}$ — Nachgiebigkeitsmatrix der Stäbe als selbständiger Einheiten;
$\mathbf{G}$ — Matrix der Geometrie des Stabwerks;
$\mathbf{D}$ — Matrix der sekundären Steifigkeit, die von den bereits entwickelten Schnittkräften abhängt [2].

Die erste Blockzeile des Zusammenhangs (1) drückt die Gleichgewichtsbedingung, die zweite die Verträglichkeitsbedingung aus.

Die zu (1) gehörende energetische Grundformel lautet:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{p} = \text{staz.} \tag{2}$$

bzw. blockweise zerlegt:

$$E(\mathbf{u},\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^*\mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{u}^*\mathbf{G}^*\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{u}^*\mathbf{q} + \mathbf{s}^*\mathbf{t} = \text{staz.} \tag{3}$$

Aus diesen Formen ergeben sich die Gleichgewichtsbedingung gemäß $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ und die Verträglichkeitsbedingung zu $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}$.

Sollen aus Bedingung (3) noch andere für die weiteren Zwecke geeignete Formeln mit einer *einzigen* vektoriellen Unabhängigen abgeleitet werden, so muß die Gradientengleichung, die sich auf den anderen unabhängigen Vektor bezieht, als Nebenbedingung befriedigt werden. Nötigenfalls werden zuerst die Matrizen und Vektoren in Gleichung (1) noch weiter zerlegt und erst dann die Nebenbedingungen gebildet.

Von den auf diese Weise abgeleiteten Extremumprinzipien werden hier nur einige behandelt, für das Weitere wird auf [11], [12] und [16] verwiesen.

Ist z. B. kein Sekundäreffekt vorhanden ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$), so folgt aus (3)

$$E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{s}^*\mathbf{t} = \min! \tag{4a}$$

und als Nebenbedingung dient

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{G}^*\mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0}\,. \tag{4b}$$

Das ist der Satz von *Castigliano*. Von dem Gesichtspunkt des Extremums aus kommen nach (4b) nur die »statisch zulässigen« Beanspruchungsverteilungen in Frage.

Ist hingegen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, wird also eine zwangsläufige Kette aus vollkommen starren Stäben geprüft, so folgt aus (3) für die potentielle Energie des Systems

$$\pi(\mathbf{u}) = -E(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}^*\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{q} = \min! \tag{5a}$$

und die Nebenbedingung lautet

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{t} = \mathbf{0}\,. \tag{5b}$$

Das ist ein *Sonderfall* des Minimumsatzes der potentiellen Energie.

Nun kommen von dem Gesichtspunkt des Extremums aus nur die »kinematisch verträglichen« Knotenverrückungssysteme in Frage.

Um ganz allgemeingültige Aufgaben aufzustellen, ist die Matrix $\mathbf{A}$ auf 3×3 Teilmatrizen aufzuspalten. Da die meisten Rechenzentren das Formänderungsverfahren der Statik dem Kraftgrößenverfahren gegenüber bevorzugen, wird zuerst das dieser Methode entsprechende Extremumprinzip der potentiellen Energie angeführt.

Unsere Überlegungen betreffen statisch unbestimmte Tragwerke, deren Stützen sich anheben können. Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{G}_1^* \\ \mathbf{D}_{12}^* & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{G}_2^* \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\mathbf{u}_1$ = Vektor der Verrückungen der bedingten Stützen;
$\mathbf{u}_2$ = Vektor der Verrückungen der übrigen Knoten;
$\mathbf{q}_1$ bzw. $\mathbf{q}_2$ bedeuten je eine diesen beiden Vektoren entsprechende Lastgruppe.

Durch Zerspaltung von (2) gemäß (6) erhält man:

$$E(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1^* \mathbf{D}_{11}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1^*\mathbf{D}_{12}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1^*\mathbf{G}_1^*\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2^*\mathbf{D}_{22}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2^*\mathbf{G}_2^*\mathbf{s} +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{u}_1^*\mathbf{q}_1 + \mathbf{u}_2^*\mathbf{q}_2 + \mathbf{s}^*\mathbf{t} = \text{staz}\,! \tag{7}$$

Soll nun anstatt (3) ein Ausdruck der Form $E(\mathbf{u}_1) = \min!$ eingeführt werden, lauten die Nebenbedingungen:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{u}_2} = \mathbf{0}\,; \qquad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}\,,$$

also

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{12}^* & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{G}_2^* \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Die Lösung der Gleichung (8) lautet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{B}_u & \mathbf{C}_u \\ \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

wobei

$$\mathbf{A}_u = \mathbf{K}_2^{-1} = (\mathbf{G}_2^*\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}_2 - \mathbf{D}_{22})^{-1}$$
$$\mathbf{B}_u = -\mathbf{K}_2^{-1}\mathbf{G}_2^*\mathbf{F}^{-1} \qquad \mathbf{C}_u = -\mathbf{K}_2^{-1}(\mathbf{G}_2^*\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}_1 - \mathbf{D}_{12}^*)$$
$$\mathbf{A}_s = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{K}_2^{-1}$$
$$\mathbf{B}_s = (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{G}_2\,\mathbf{K}_2^{-1}\,\mathbf{G}_2^* - \mathbf{E})\,\mathbf{F}^{-1} \quad \mathbf{C}_s = \mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{G}_2\,\mathbf{K}_2^{-1}\,(\mathbf{G}_2^*\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{G}_1 - \mathbf{D}_{12}^*) - \mathbf{G}_1\}$$

Auf Grund dieser Formeln läßt sich die Funktion $E(\mathbf{u}_1)$ schon einfach ableiten.

Die Beziehungen (9) in (7) eingesetzt, erhält man als Extremumprinzip der potentiellen Energie

$$\pi(\mathbf{u}_1) = -E(\mathbf{u}_1) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_1^*\mathbf{L}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^*\mathbf{m} + \text{const.} = \min! \tag{10}$$

wobei

$$\frac{1}{2}\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_{11} + \mathbf{C}_u^*\mathbf{D}_{22}\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_s^*\mathbf{F}\mathbf{C}_s) + \mathbf{D}_{12} + (\mathbf{G}_1^* + \mathbf{C}_u^*\mathbf{G}_2^*)\,\mathbf{C}_s$$

ferner

$$\mathbf{m} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{M}_q\mathbf{q}_2 + \mathbf{M}_t\mathbf{t}$$

mit

$$\mathbf{D}_{12,\,\mathrm{red}} = \mathbf{D}_{12} + \mathbf{C}_u^*\,\mathbf{D}_{22} + \mathbf{C}_s^*\,\mathbf{G}_2$$

$$\mathbf{G}_{1,\,\mathrm{red}}^* = \mathbf{G}_1^* + \mathbf{C}_u^*\,\mathbf{G}_2^* + \mathbf{C}_s^*\,\mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_q = \mathbf{D}_{12,\,\mathrm{red}}\cdot\mathbf{A}_u + \mathbf{G}_{1,\,\mathrm{red}}^*\cdot\mathbf{A}_s + \mathbf{C}_u^*$$

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{D}_{12,\,\mathrm{red}}\cdot\mathbf{B}_u + \mathbf{G}_{1,\,\mathrm{red}}^*\cdot\mathbf{B}_s + \mathbf{C}_s^*.$$

Ähnlicherweise läßt sich eine Variante des Satzes von *Castigliano* für die Theorie zweiter Ordnung als Funktional eines *einzigen* Unterspaltenvektors anführen. Sie wird für Stabwerke mit einigen inneren bedingten Verbindungen angewendet.

Nun schreibt man anstatt (6) als Anordnung der Blockmatrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}_1^* & \mathbf{G}_2^* \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{F}_{12}^* & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dabei bedeuten:

$\mathbf{s}_2$ den Vektor der Schnittkräfte, die an den bedingten inneren Verbindungen entstehen;

$\mathbf{s}_1$ den Vektor der übrigen Schnittkräfte;

$\mathbf{t}_1$ bzw. $\mathbf{t}_2$ die den beiden Vektoren entsprechenden kinematischen Belastungsgliedergruppen. Die Extremumaussage lautet:

$$E(\mathbf{s}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_2^*\mathbf{L}'\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2^*\mathbf{m}' + \text{const.} = \min! \tag{12}$$

Der Inhalt von $\mathbf{L}'$ und $\mathbf{m}'$ ist analog zu (10).

Mit Berücksichtigung der Vorzeichenbeschränkungen darf schließlich festgestellt werden, daß die Zustandsberechnung eines elastischen Stabwerks, wo einige Stützen sich anheben können, zu der quadratischen Programmierungsaufgabe:

$$\pi(\mathbf{u}_1) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}_1^*\mathbf{L}\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^*\mathbf{m} + \text{const.} = \min! \tag{13}$$

$$\mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0}$$

und die Berechnung eines Stabwerks mit bedingten inneren Verbindungen zu der analogen Aufgabe:

$$E(\mathbf{s}_2) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_2^*\mathbf{L}'\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2^*\mathbf{m}' + \text{const.} = \min! \tag{14}$$

$$\mathbf{s}_2 \geqq \mathbf{0}$$

führen.

Für einen zwangsläufigen Mechanismus mit starren Stäben gilt:

$$\pi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}^*\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\mathbf{q} = \min! \tag{15}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$$

Ferner ist mangels eines Effekts zweiter Ordnung anstatt (14):

$$E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{s}^*\mathbf{t} = \min! \tag{16}$$

$$\mathbf{G}^*\mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{s} \geqq \mathbf{0}$$

anzuschreiben.

Der positive Sinn von $\mathbf{u}$ bzw. $\mathbf{s}$ stimmt mit dem Sinn der zur Trennung gehörenden Verrückung bzw. mit der für den Werkstoff vertragbaren Schnittkraft überein.

In der Fachliteratur sind für die Lösung der Aufgaben (13) bis (16) fertige Programme zu finden [8], die z. B. auf der Simplexmethode, der Gradientenmethode, der Methode der Schnittebenen und auf anderen Methoden der Operationsforschung beruhen [6]:

Vom Gesichtspunkt der Statik aus scheint die Methode von WOLFE [17] von dem größten Interesse zu sein, die die Aufgabe auf eine solche zurückführt, die an und für sich ein *lineares* Programmierungsproblem sein würde, wenn sie nicht durch eine Sonderbedingung gebunden wäre. Auch so besteht jedoch die Möglichkeit, das Simplexverfahren zu verwenden [4]. Die mathematische Grundlage des Verfahrens von WOLFE lautet [3]:

Die Lösung der quadratischen Programmierungsaufgabe

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{b} = \min! \tag{17}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

— wobei S positiv und semidefinit ist — ist der Lösung der Aufgabe

$$\begin{gathered} \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{T}^*\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x}^*\mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0} \end{gathered} \tag{18}$$

gleichwertig. $\boldsymbol{\lambda}$ bedeutet hier einen *Lagrange*schen Multiplikator, während $\mathbf{v}$ eine Schlupfvariable ist.

Von der Bedingung $\mathbf{x}^*\mathbf{v} = 0$ abgesehen ist die Beziehung (18) linear. Dazu muß aber eine künstliche Zielfunktion gebildet werden [5]. Da weder $\mathbf{x}$, noch $\mathbf{v}$ negativ sein darf, ist die erwähnte Sonderbedingung der Behauptung äquivalent, daß beide Elemente mit dem gleichen Index der Matrizen $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{v}$ nicht gleichzeitig vom 0 abweichend sein dürfen.

Aus dem Vergleich von (13) bis (16) mit (18) läßt sich folgendes feststellen:

Die Zustandsanalyse eines elastischen Tragwerks mit bedingten Stützen führt zu der Aufgabe:

$$\begin{gathered} \mathbf{L}\mathbf{u}_1 + \mathbf{m} - \mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1^*\mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0} \qquad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{19}$$

Die statische Bedeutung dieser Aufgabe ist offenbar. Die erste Gleichung ist nichts anderes als eine Gleichgewichtsbedingung der unvollkommenen Stützen.

$$\boldsymbol{\lambda} = - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{s} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{H}^*\boldsymbol{\lambda}$ ist der Vektor der durch $\boldsymbol{\lambda}$ erzeugten Knotenkräfte bei den bedingten Stützen,

$\mathbf{v}$ der Vektor der entsprechenden Stützkräfte.

$\mathbf{u}_1^*\mathbf{v} = 0$ bedeutet, daß bei den bedingten Stützen Reaktionskraft und Trennung gleichzeitig nicht auftreten können.

Das Problem der Zustandsanalyse eines elastischen Tragwerks mit bedingten inneren Verbindungen lautet:

$$\begin{gathered} \mathbf{L's_2} + \mathbf{m'} + \mathbf{H'^*\lambda} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{s_2^*v} = 0 \\ \mathbf{s_2} \geqq \mathbf{0} \qquad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{20}$$

Die erste Gleichung drückt die Verträglichkeitsbedingung der Stäbe aus, wo eine Trennung überhaupt vorkommen kann.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s_1} \end{bmatrix}.$$

Ferner enthält der Vektor $\mathbf{v}$ die relativen Verschiebungen bei der Trennung.

$\mathbf{s_2^*v} = 0$ bedeutet, daß sich bei den bedingten Verbindungen gleichzeitig keine Schnittkräfte und relative Verrückungen herausbilden können.

Diese Behauptungen können am einfachsten an Hand der Beziehungen (15) und (16) erläutert werden.

(15) entsprechend gilt

$$\begin{gathered} \mathbf{Du} + \mathbf{q} - \mathbf{G^*\lambda} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{Gu} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{u^*v} = 0 \\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \qquad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{21}$$

Nun lautet die erste Teilmatrizengleichung von (1), also die *allgemeine* Gleichgewichtsbedingung der Tragwerke, wie folgt:

$$\mathbf{Du} + \mathbf{G^*s} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

wir haben also in der ersten Reihe von (21)

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{s}.$$

Dabei stellt diese Reihe die Gleichgewichtsbedingung eines Mechanismus dar, dessen Knotenpunkte bedingte Stützen sind, auf die also neben Lasten auch etwaige Stützkräfte wirken können. Insofern sich das Tragwerk von der Stütze trennt, entsteht keine Stützenkraft ($\mathbf{u^*v} = \mathbf{0}$). (16) entsprechend gilt

$$\begin{gathered} \mathbf{Fs} + \mathbf{t} + \mathbf{G}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G^*s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{s^*v} = 0 \\ \mathbf{s} \geqq 0 \qquad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{22}$$

Die zweite Teilmatrizengleichung von (1), also die *allgemeine* Verträglichkeitsbedingung der Stabwerke lautet:

$$\mathbf{Gu} + \mathbf{Fs} + \mathbf{t} = \mathbf{0}.$$

Demgemäß haben wir in der ersten Zeile von (22)

$$\lambda = \mathbf{u}$$

und diese Zeile bedeutet die Verträglichkeitsbedingung eines Stabwerks, das als entsprechende Anschlüsse bedingte Verbindungen enthält. Hier sind relative Verrückungen mit dem Vektor $\mathbf{v}$ möglich, die aber mit der entsprechenden Schnittkraft gleichzeitig nicht vorkommen können ($\mathbf{s}^*\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

Es liegt also nahe, die Aufgaben (19) bis (22) unmittelbar aus (1), d. h. ohne energetische Überlegungen abzuleiten. Die energetische bzw. die Gaußsche Fehlerquadratsummen-Methode ermöglichen jedoch auch von der *Wolf*eschen Methode abweichende besondere nichtlineare Programmierungsverfahren anzuwenden [10].

Der Zusammenhang zwischen den Aufgaben (17) und (18), der eine Grundfrage der quadratischen Programmierung darstellt, wird in der Literatur der Optimierungsprobleme ausführlich, jedoch umständlich erläutert [3]. Dagegen liegt er als Ergebnis des Vergleichs von unmittelbaren und mittelbaren statischen Analysen sogar durch Anwendung elementarer Überlegungen nahe.

Bisher wurde die Frage des Tragwerks auf Stützen, die sich anheben, anhand des Extremumprinzips der potentiellen Energie, das dem Formänderungsverfahren der Statik entspricht, behandelt, während die Probleme der Tragwerke, die auf keinen Druck beansprucht werden können, mit dem Extremumprinzip der Ergänzungsarbeit, d. h. entsprechend der Kraftgrößenmethode erläutert wurden. Nun soll noch gezeigt werden, daß auch dieselbe statische Aufgabe auf zweifache Weise behandelt werden kann, u. zw. in Form zweier einander gegenüber dualer Probleme der quadratischen Programmierung. Wir beschränken uns hier auf die Theorie erster Ordnung.

Betrachten wir ein Tragwerk, das auf den Stützen nicht verankert ist, und kommen wir auf die Beziehungen (4a) und (4b) zurück. Auf Grund dieser Gleichungen wird mit direkten Überlegungen folgende quadratische Programmierungsaufgabe vorgeführt:

$$\frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{s}^*\mathbf{t} = \min! \tag{23}$$

$$\mathbf{G}^*\mathbf{s} + \mathbf{q} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}.$$

Gemäß (23) bietet sich eine Möglichkeit, die Frage nach dem Kraftgrößen-Verfahren zu behandeln. Der Vektor $\mathbf{v}$ in der Nebenbedingung bedeutet wieder die Stützkräfte der bedingten Verbindungen. (Es wird darauf hingewiesen, daß die Aufgabe (23) mit der Aufgabe (16) *nicht* identisch ist.)

Dasselbe Tragwerkproblem kann auch auf Grund des Zusammenhangs (3) behandelt werden. Nun ist $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, d. h.:

$$\mathbf{D} = \mathbf{0},$$

$$E(\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{u}^*\mathbf{G}^*\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{u}^*\mathbf{q} + \mathbf{s}^*\mathbf{t} = \text{staz}\,! \tag{24}$$

Da

$$\frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} = \mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s}$$

und wegen der Verträglichkeitsbedingung

$$\mathbf{u}^*\mathbf{G} + \mathbf{s}^*\mathbf{F} + \mathbf{t}^* = \mathbf{0}, \tag{25}$$

folgt aus (24):

$$\mathbf{u}^*\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} = \max\,! \tag{26}$$

Mit (25) und (26) läßt sich das Problem auch als quadratische Programmierungsaufgabe anschreiben:

$$\mathbf{u}^*\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} = \max\,! \tag{27}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0}.$$

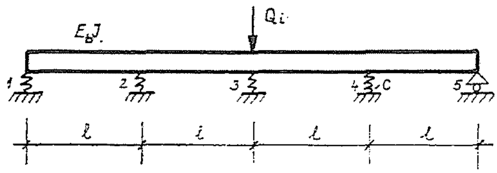
(23) und (27) sind in der mathematischen Fachliteratur als Dualaufgabenpaar der quadratischen Programmierungsaufgaben zu finden [1]. Es läßt sich beweisen, daß die erste ein endliches Maximum hat, und daß die Extremwerte beider Probleme gleich sind. Auch die Optimalwerte der mit den gleichen Buchstaben bezeichneten Programmvektoren stimmen überein.

Daher liefern (23) und (27) unbedingt übereinstimmende statische Ergebnisse.

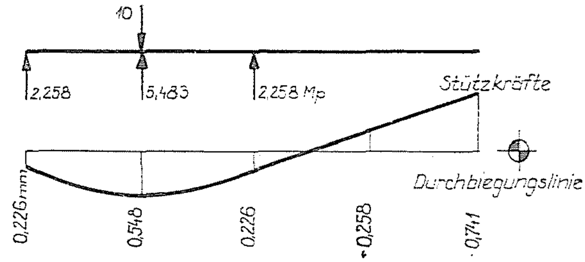
3. Zahlenbeispiel

Um unsere theoretischen Erörterungen zu illustrieren, wird die Untersuchung eines Durchlaufträgers mit elastisch senkbaren Stützen als Zahlenbeispiel vorgeführt.

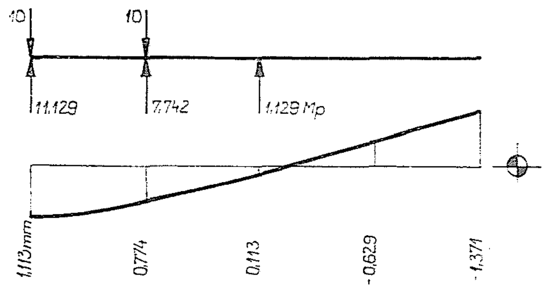
Wie in Abb. 1 zu sehen ist, sind vier von den fünf Stützen des Durchlaufträgers mit gleichen Spannweiten elastisch. Die Biegesteifigkeit des Balkens und die Federkonstante der Stützen sind unveränderlich. Keine der Stützen kann Zugkräfte aufnehmen. Es sollen die Stützkräfte unter Wirkung



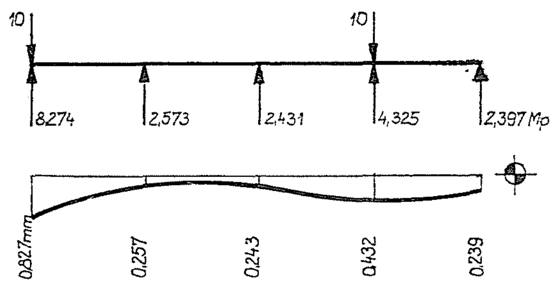
–Abb. 1–



–Abb. 2–



–Abb. 3–



–Abb. 4–

verschiedener Lastgruppen berechnet werden, wobei alle Kräfte derselben auf die Stützen wirken.
Angaben: $l = 60$ cm, $c = 100$ Mp/cm, $E_g = 2100$ Mp/cm², $J = 2400$ cm⁴, $Q_i = 10$ Mp (an den verschiedenen Stützen).

Die Berechnung wird vom Satz von *Castigliano* ausgehend durchgeführt.

Für die Formänderungsarbeit gilt

$$E = \frac{1}{2}\,\mathbf{s}^*\mathbf{F}\mathbf{s} = \frac{1}{2\,E_b J}\int_L M^2 ds + \frac{1}{2\,c}\sum_{i=1}^{5} A_1^2 = \min\,, \tag{28}$$

wobei A_i die Stützkräfte bedeutet.

Der Anteil der Biegemomente kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$E_m = \frac{1}{2\,E_b J}\int_L M^2 ds = \frac{l}{12\,E_b J}\,\mathbf{m}^*\mathbf{F}_m\mathbf{m}\,. \tag{29}$$

Hier ist

$$\mathbf{m}^* = [M_1\ \ M_2\ \ M_3\ \ M_4\ \ M_5]$$

der Vektor der Stützmomente, ferner

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Der Anteil der Stützkräfte lautet:

$$E_a = \frac{1}{2\,c}\,\mathbf{s}_2^*\mathbf{s}_2\,. \tag{30}$$

wobei

$$\mathbf{s}_2^* = [A_1\ \ A_2\ \ A_3\ \ A_4\ \ A_5]\,.$$

Die Biegemomente hängen von der Belastung und den Stützkräften ab.

Auf Grund einer Reihe von Momentengleichungen

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}\,(\mathbf{s}_2 - \mathbf{q})\,l \tag{31}$$

wobei

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = [Q_1 \;\; Q_2 \;\; Q_3 \;\; Q_4 \;\; Q_5]$$

Wir bemerken, daß Q abwärts, A hingegen aufwärts positiv gerichtet ist. Unter Anwendung der Beziehungen (29), (30) und (31) ergibt sich die Zielfunktion von (28) zu

$$E = \frac{1}{2}\mathbf{s}_2^* \left(\frac{l^3}{6\,E_b J}\mathbf{B}^*\mathbf{F}_m\mathbf{B} + \frac{1}{c}\mathbf{E}\right)\mathbf{s}_2 - \frac{l^3}{6\,E_b J}\mathbf{s}_2^*\mathbf{B}^*\mathbf{F}_m\mathbf{B}\mathbf{q} + \text{const.} = \min \tag{32}$$

($\mathbf{E}$ = Einheitsmatrix).

Es ist zweckmäßig, die folgenden Abkürzungen einzuführen:

$$\mathbf{F} = \frac{l^3}{6\,E_b J}\mathbf{B}^*\mathbf{F}_m\mathbf{B} + \frac{1}{c}\mathbf{E} \qquad \mathbf{m}' = \mathbf{M}_q'\mathbf{q} = -\frac{l^3}{6\,E_b J}\mathbf{B}^*\mathbf{F}_m\mathbf{B}\mathbf{q}\,. \tag{33}$$

Nach den Nebenbedingungen gelten am Balken die Kraftkomponenten- und Momentengleichungen

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{s}_2 - \mathbf{q}) = \mathbf{0} \tag{34}$$

wobei

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Die Programmierungsaufgabe besteht also darin, bei Aufrechterhaltung der Nebenbedingung (34) das Minimum bei der Zielfunktion (32) zu erreichen, während $\mathbf{s}_2^* \geqq \mathbf{0}$ *sei.*

Die Matrizen, die in der Zielfunktion vorkommen, lassen sich numerisch folgendermaßen aufschreiben:

$$\mathbf{M}_q = -\begin{bmatrix} 91{,}392 & 57{,}834 & 28{,}560 & 7{,}854 & 0 \\ & 38{,}556 & 19{,}992 & 5{,}712 & 0 \\ & & 11{,}424 & 3{,}570 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & 1{,}428 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}\ \text{cm/Mp}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 46{,}196 & 28{,}917 & 14{,}280 & 3{,}927 & 0 \\ & 19{,}778 & 9{,}996 & 2{,}856 & 0 \\ & & 6{,}212 & 1{,}785 & 0 \\ & & & 1{,}214 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}\ \text{cm/Mp} .$$

Drei Lastfälle werden behandelt (Abb. 2, 3 und 4). Die Vektoren der Belastung und der davon abhängenden Anfangswerte sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

q	−m′	−j	q	−m′	−j	q	−m′	−j
0	5,7834	10	10	14.9226	20	10	9,9246	20
10	3,8556	30	10	9.6390	70	0	6,3546	50
0	1,9992	—	0	4,8552	—	0	3,2130	—
0	0,5712	—	0	1,3566	—	10	0,9282	—
0	0	—	0	0	—	0	0	—

Die Aufgabe wurde auf der Rechenanlage Typ CDC 3300 des Forschungsinstituts für Rechentechnik und Automatisierung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften nach dem Verfahren von *Wolfe* gelöst.* Das Verfahren verwendet im wesentlichen den Zusammenhang (20), demnach erhält man nicht nur die gesuchten Stützkräfte als Ergebnis, sondern auch den Vektor **v**, der die Anhebung der Stützen vom Boden kennzeichnet, und den Vektor **u** der absoluten Verrückungen.

Die Nebenbedingung (34) enthält eine Komponentengleichung auf eine vertikale Achse und eine Momentengleichung auf den Punkt 5 des Balkens bezogen, daher liefern der Komponent u_1 des Verrückungsvektors den Betrag der Translation des Balkens und der Komponent u_2 den Betrag der Rotation um den Punkt »5«.

Die Ergebnisse sind:

s_2	v	u	s_2	v	u	s_2	v	u
2,25836	0	0,074164	11,1292	0	0,13708	8,27350	0	0
5,48329	0	−0,00081	7,74164	0	−0,00123	2,57276	0	−0,00101
2,25836	0	—	1,12918	0	—	2,43139	0	—
0	0,02579	—	0	0,06289	—	4,32495	0	—
0	0,074164	—	0	0,13708	—	2,39741	0	—

* Das Programm wurde von Dipl. Math. Heinz Bernau verfertigt.

Die Dimension der Elemente von s_2 ist Mp, diejenigen der Elemente v und u_1 sind cm. Die Ergebnisse sind auch in der Abb. 2, 3 und 4 vorgeführt.

In den ersten zwei Fällen verhält sich das Tragwerk als ein Träger auf drei Stützen, dessen rechtsseitiger Kragarm sich als starrer Körper verdreht, während in dem dritten Fall der bedingte Charakter der Reaktionen nicht zum Ausdruck kommt.

Hinsichtlich anderer Lastfälle haben wir auch Ergebnisse erhalten, deren Richtigkeit unmittelbar einzusehen ist.

Die Verwendung der Superposition kann auch dann wesentliche Rechenfehler verursachen, wenn das Ergebnis der Superposition keine Reaktion an einem Ort ergibt, wo sich die Stütze nach richtiger Berechnung anhebt. In dem Lastfall in Abb. 3 beträgt der Fehler zum Beispiel an der Stütze 3 100%.

Es sei noch erwähnt, daß der Rechner eine Aufgabe durchschnittlich in 1,5 sec löste.

Zusammenfassung

Der Beitrag behandelt die Berechnungstheorie der Stabtragwerke mit bedingten äußeren oder inneren Verbindungen. Auf Grund der allgemeinen Theorie der Stabwerke bzw. der entsprechenden energetischen Formeln werden einige quadratische Programmierungsaufgaben, die bei der Anwendung des Formänderungsverfahrens bzw. des Kraftgrößenverfahrens vorkommen, angeführt.

Schrifttum

1. Collatz, L.—Wetterling, W.: Optimierungsaufgaben. Springer-Verlag, Berlin, 1966. S. 106—109.
2. Gáspár, Zs.—Roller, B.: Über einige Fragen der Theorie zweiter Ordnung, in der Berechnung von Tragwerken mit endlichem Freiheitsgrad*. Építés-Építészettudomány IV. 3—4. Budapest, 1973. S. 373—394.
3. Gass, S.: Linear Programming. McGraw-Hill, New York 1964. S. 312—316.
4. Krekó, B.: Lineare Programmierung.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1962. S. 227—247.
5. Krekó, B.: Lineare Programmierung.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1962. S. 242—245.
6. Krekó, B.: Optimum-Rechnung (Nichtlineare Programmierung)*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972. S. 131—144; 154—156; 166—168.
7. Kurutz, M.: Analysis of Plastic Load Capacity of Plane Frameworks by Kinematic Loading. Per. Pol. C. E. Vol. 18, № 1—2, Budapest 1974. S. 71—81.
8. Land, A. H.—Powell, S.: Fortran Codes for Mathematical Programming: Linear, Quadratic and Discrete. John Wiley and Sons, London, 1973. S. 21—24; 91—104.
9. Livesley, R. K.: Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, Oxford, 1964. S. 171—176.
10. Páczelt, J.: Iterazionny metod dlja reschenija kontaktnoi zadaschi uprugich sistem's odnostoronnimi swjasami, Acta Technica Ac. Sci. Hung. Tom 76 (1—2). Budapest, 1974. S. 217—241.
11. Roller, B.—Szentiványi, B.: Extremumsätze und ihre Anwendungen in der Theorie zweiter Ordnung der Stab- und Flächentragwerke.* MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközösség Tudományos Ülésszakának (1974. okt. 9—10.) tanulmánykötete, Budapest, 1974. S. 35—46.
12. Sander, G.: Application of the Dual Analysis Principle. High-speed Computing of Elastic Structures. Proc. of the Symposium of IUTAM, Université de Liège. Liège, 1971. S. 167—207.

* In ungarischer Sprache

13. STAFFORD SMITH, B.: The Composite Behaviour of Infilled Frames. Proceedings, Symposium on Tall Buildings, University of Southampton (1966. 13—15. Apr.) Pergamon Press, Oxford, 1966. S. 163—174.
14. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Theorie und Berechnung der Stabwerke.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971. S. 196.
15. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Theorie und Berechnung der Stabwerke.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971. S. 121.
16. WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, Oxford, 1968. S. 27—38.
17. WOLFE, PH.: Anwendung der Simplexmethode für quadratische Programmierungsaufgaben*. MTA III. Oszt. Közl. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960. S. 373—391.

* In ungarischer Sprache

Dozent Dr. Béla Roller
Assistent Béla Szentiványi } H-1521 Budapest

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Botyánszky Pál
A kézirat nyomdába érkezett: 1975. VI. 16. — Terjedelem: 4,75 (A/5) ív, 23 ábra, 1 melléklet

75.1940 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György