ANWENDUNG VON WINKELFUNKTIONSTAFELN BEI FEHLERFORTPFLANZUNGSBERECHNUNGEN

Von

E. Hőnyi

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 31. Mai 1971)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. Hazay

Wird ein Wert aus fehlerbehafteten Größen bestimmt, so wird auch die ermittelte Größe fehlerbehaftet sein. Sind die Bestimmungswerte voneinander unabhängig und ist ihr mittlerer Fehler bekannt, wird der mittlere Fehler der ermittelten Größe anhand des Fehlerfortpflanzungsgesetzes berechnet. Diese allgemein bekannte Formel für die Funktion

$$U = f(x, y, z, \ldots)$$

aufgeschrieben, erhält man den mittleren Fehler des Wertes U aus der Beziehung:

$$\mu_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \mu_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mu_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \mu_z^2 + \cdots}$$

Um die Formel anzuwenden, müssen die partiellen Derivierten nach den Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ der Funktion dargestellt werden. Das bietet im Prinzip keine Schwierigkeiten, doch erfordert die zahlenmäßige Bestimmung der partiellen Derivierten oft eine langwierige Rechenarbeit. In einzelnen Fällen können Tafeln (Logarithmen-, Quadratnetztafeln) mit guter Wirtschaftlichkeit verwendet werden [1, 2, 3].

Neben den in der Praxis der Fehlerfortpflanzungsberechnung allgemein benutzten Logarithmen- bzw. Quadratnetztafeln läßt sich auch die Winkelfunktionstafel mit guter Wirtschaftlichkeit für die Lösung von Aufgaben, in denen Winkelfunktionen vorkommen, verwenden.

Die für die Bestimmung des gesuchten Wertes erforderlichen Längen und Winkel sowie deren mittlere Fehler sind bekannt. In der Funktion, die den gesuchten Wert ausdrückt, steht in der Regel eine trigonometrische Form der Winkel. Um die Winkelfunktionstafel anzuwenden, wird die Darstellung der Derivierten in der Formel der Fehlerfortpflanzung derart geändert, daß nach den Längen und *Winkelfunktionen* (nicht den Winkeln) als nach Veränderlichen partielle Derivierte berechnet werden. Das Quadrat letzterer wird dann mit den Quadraten der zu der Länge bzw. zur *Winkelfunktion* gehörenden mittleren Fehler multipliziert. Um derart zu verfahren, ist jedoch der zur Winkelfunktion gehörende mittlere Fehler notwendig. Dieser läßt sich aus der Winkelfunktionstafel in ähnlicher Weise ableiten, wie der zu lg x gehörende mittlere Fehler $\mu_{\lg x}$ aus der Logarithmentafel. So gilt z. B.

$$\mathrm{tg}\,(\alpha \pm \mu_\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha \pm \Delta_{\mathrm{tg}\alpha}\mu_\alpha,$$

also

$$\mu_{\mathrm{tg}\alpha} = \Delta_{\mathrm{tg}\alpha}\mu_\alpha$$

($\Delta_{\mathrm{tg}\alpha}$ ist die Tafeldifferenz des Wertes von tg α in der Einheit von μ_α).

Soll der mittlere Fehler eines Winkelwertes bestimmt werden, der in einer trigonometrischen Form ausgedrückt ist, wird unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes — mit Hilfe der Winkelfunktionstafel — als Ergebnis der mittlere Fehler der trigonometrischen Form des Winkels erhalten. Aus diesem erhält man den mittleren Fehler des Winkels, indem man den so berechneten mittleren Fehler durch die Tafeldifferenz je Winkeleinheit der trigonometrischen Form des Winkels teilt (Beispiel 1).

Wir wissen, daß in der für die Bestimmung des gesuchten Wertes angeschriebenen Funktion nur unabhängige Werte vorkommen dürfen. Kommt also in der Formel ein nichtgemessener Wert vor, muß dieser — für die erforderliche Unabhängigkeit — durch Meßwerte ausgedrückt werden. Die partiellen Differenzierungen können nun anhand der unabhängigen Werte durchgeführt werden. Um diese Forderung zu erfüllen, sind manchmal verwickelte Berechnungen erforderlich. Wenn es der Ausdruck der Funktion ermöglicht (z. B. eine Produktfunktion), lassen sich auch in einem solchen Falle sowohl die Logarithmen- als auch die Winkelfunktionstafel verwenden, durch deren Benutzung sich der erforderliche Rechenaufwand wesentlich vermindern läßt.

Bei der Anwendung der Winkelfunktionstafel verfährt man wie folgt: die Funktion wird nach den trigonometrischen Formen der gemessenen und der *nichtgemessenen Werte* in der Formel partiell differenziert, und aus der Tafel werden die entsprechenden (zu der Dimensionseinheit der angegebenen mittleren Fehler gehörenden) Tabellendifferenzen sämtlicher Werte herausgeschrieben, nach denen differenziert wurde. Um den mittleren Fehler der trigonometrischen Form der Winkel zu erhalten, wird diese Tabellendifferenz — beim Meßwert — mit dem dazu gehörenden mittleren Fehler multipliziert. Die zum nichtgemessenen Wert gehörende Tabellendifferenz wird mit den mittleren Fehlern aller Werte, die benutzt wurden, um den nichtgemessenen Wert auszudrücken, einzelweise multipliziert. Damit stehen die mittleren Fehler zur Verfügung, die zu den trigonometrischen Formen der einzelnen Winkel gehören. Diese mittleren Fehler werden nun für die weitere Berechnung mit der dazu gehörenden partiellen Derivierten multipliziert, quadriert und summiert. Kommt in der Funktion ein Winkelwert auch selbständig vor, der auch im Ausdruck des nichtgemessenen Wertes steht — ein häufiger Fall —, so müssen die zu diesen Größen aus dem nichtgemessenen Wert errechneten Produkte aus mittleren Fehlern und partiellen Derivierten zu dem in ähnlicher Weise ermittelten Produkt, das zur selbständig vorkommenden Größe gehört, hinzugerechnet werden. Diese Produktsumme wird quadriert und mit den weiteren Produktquadraten in der Formel summiert. Eine Anleitung ist in Beispiel 2 zu finden.

Dessen ungeachtet, ob die Fehlerfortpflanzungsaufgabe mit Hilfe der Logarithmen- oder der Winkelfunktionstafel gelöst wird, ist der zum Logarithmenwert oder zum trigonometrischen Funktionswert gehörende mittlere Fehler immer eine dimensionslose Zahl. Das ist leicht einzusehen Da die Tabellendifferenz für die Dimensionseinheit des angegebenen mittleren Fehlers ausgeschrieben wird, wird die Dimension der Tabellendifferenz der Reziprokwert der Dimension sein, auf die sich die Tabellendifferenz bezieht. Bei den weiteren Berechnungen wird diese mit dem dimensionalen Wert des mittleren Fehlers multipliziert, damit heben sich die Dimensionen einmal im Zähler, einmal im Nenner gegenseitig auf. Somit wird auch der ermittelte mittlere Fehler eines Logarithmenwertes oder einer trigonometrischen Funktion dimensionslos sein. Die Dimension des mittleren Fehlers zum gesuchten Wert erhält man, wenn man dieses dimensionslose Ergebnis durch die zur Einheit des gesuchten Wertes gehörende Tabellendifferenz, die immer eine dimensionale Größe ist, teilt.

Die Benutzung von Tafeln ermöglicht auch, daß man nicht dafür sorgen muß, daß in der Fehlerfortpflanzungsformel die Dimensionen sämtlicher Größen unter dem Wurzelzeichen Quadrate der Dimension des gesuchten mittleren Fehlers seien. Hier denken wir daran, daß — wenn nicht mit Tafeldifferenzen gearbeitet wird — beim gemeinsamen Vorkommen von Winkeln und Längen der Dimension des gesuchten mittleren Fehlers entsprechend entweder die mittleren Fehler der Winkel in analytischer Einheit ausgedrückt oder die mittleren Fehler der Längen mit ϱ'' multipliziert werden müssen. Nach den Ausführungen im vorigen Abschnitt fällt diese Transformation weg, wodurch nicht nur die Fehlermöglichkeiten in der Berechnung vermindert werden, sondern auch Arbeit gespart wird.

Beispiel 1. An einem rechtwinkligen Dreieck wurden die Längen der Katheten a und b gemessen und der mittlere Fehler der Meßergebnisse ist bekannt. Es sollen der Wert des der Seite a gegenüber liegenden Winkels und dessen mittlerer Fehler ermittelt werden.

$$a = 85{,}34 \text{ m} \qquad \mu_a = \pm 0{,}021 \text{ m}$$

$$b = 65{,}78 \text{ m} \qquad \mu_b = \pm 0{,}018 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{85,34}{65,78} = 1,297\,3548$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\alpha = 52^\circ\,22'\,30''$$

$$\mu_{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial a}\right)^2 \mu_a^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial b}\right)^2 \mu_b^2}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial a} = \frac{1}{b} = 0,015\,202$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial b} = -\frac{a}{b^2} = -\,0,019\,723$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial a}\mu_a = 3,19242 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial b}\mu_b = -\,3,55014 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial a}\mu_a\right)^2 &= 10,191\,545 \cdot 10^{-8} \\ \left(\frac{\partial \operatorname{tg}\alpha}{\partial b}\mu_b\right)^2 &= 12,603\,494 \cdot 10^{-8} \\ \Sigma \quad &= 22,795\,039 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

$$\mu_{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{22,795\;039 \cdot 10^{-8}} = \pm 4,775 \cdot 10^{-4}$$

Die Tafeldifferenz je 1″ von $\operatorname{tg}\alpha$ beträgt $\Delta_{\operatorname{tg}\alpha} = 0,000\,01301$

$$\mu_\alpha = \frac{\mu_{\operatorname{tg}\alpha}}{\Delta_{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{4,775 \cdot 10^{-4}}{0,1301 \cdot 10^{-4}} = \pm\,36,7''.$$

Beispiel 2. Es wurden die Seite a eines Dreiecks und die an dieser liegenden Winkel β und γ gemessen. Die mittleren Fehler der Meßwerte sind bekannt. Mit Hilfe des Sinussatzes sollen die zur Seite a des Dreiecks gehörende Höhe und deren mittlerer Fehler berechnet werden.

$$a = 248,58 \text{ m} \qquad \mu_a = \pm 0,11 \text{ m}$$

$$\beta = 38^\circ 56'\,42'' \qquad \mu_\beta = \pm 20''$$

$$\gamma = 57^\circ\,18'\,03'' \qquad \mu_\gamma = \pm 10''$$

Die gesuchte Höhe wird mit m bezeichnet.

$$m = a\,\frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\,(180 - \beta - \gamma)}$$

$$\alpha' = (180 - \beta - \gamma) = 83^\circ\,45'\,15''$$

$$\sin\beta = 0{,}628\ 5741$$

$$\sin\gamma = 0{,}841\ 5187$$

$$\sin\alpha' = 0{,}994\ 0642$$

$$m = 132{,}273\ \text{m}$$

Um μ_m zu bestimmen, werden die partiellen Derivierten nach a, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ und $\sin\alpha'$ gebildet

$$\frac{\partial m}{\partial a} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha'} = 0{,}5321$$

$$\frac{\partial m}{\partial \sin\beta} = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha'} = 210{,}43$$

$$\frac{\partial m}{\partial \sin\gamma} = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha'} = 157{,}18$$

$$\frac{\partial m}{\partial \sin\alpha'} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha'} = 133{,}06$$

Die Tafeldifferenz je 1″ des Winkelsfunktionswertes sei durch Δ bezeichnet.

$$\mu_a = 0{,}11\ \text{m}$$

$$\mu_{\sin\beta} = \Delta_{\sin\beta}\mu_\beta = 0{,}0377\cdot 10^{-4}\cdot 20 = 0{,}7540\cdot 10^{-4}$$

$$\mu_{\sin\gamma} = \Delta_{\sin\gamma}\mu_\gamma = 0{,}0262\cdot 10^{-4}\cdot 10 = 0{,}2620\cdot 10^{-4}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_{\sin(\beta)} &= \Delta_{\sin\alpha'}\mu_\beta = 0{,}0055\cdot 10^{-4}\cdot 20 = 0{,}1100\cdot 10^{-4}\\ \mu_{\sin(\gamma)} &= \Delta_{\sin\alpha'}\mu_\gamma = 0{,}0055\cdot 10^{-4}\cdot 10 = 0{,}0550\cdot 10^{-4}\end{aligned}\right\}\ \text{der sich aus } \alpha' \text{ ergebende Teil}$$

Der zu den Winkeln β und γ gehörende Wert setzt sich nun aus zwei Teilen zusammen, aus $\mu_{\sin\beta}$ und $\mu_{\sin(\beta)}$ bzw. $\mu_{\sin\gamma}$ und $\mu_{\sin(\gamma)}$.

$$\mu_m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial a}\mu_a\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \sin\beta}\mu_{\sin\beta} + \frac{\partial m}{\partial \sin\alpha'}\mu_{\sin(\beta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial \sin\gamma}\mu_{\sin\gamma} + \frac{\partial m}{\partial \sin\alpha'}\mu_{\sin(\gamma)}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial a}\mu_a\right)^2 = 342\ 587{,}7961\cdot 10^{-8}$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \sin\beta}\mu_{\sin\beta} + \frac{\partial m}{\partial \sin\alpha'}\mu_{\sin(\beta)}\right)^2 = 30\ 033{,}1742\cdot 10^{-8}$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \sin\gamma}\mu_{\sin\gamma} + \frac{\partial m}{\partial \sin\alpha'}\mu_{\sin(\gamma)}\right)^2 = 2\ 352{,}1976\cdot 10^{-8}$$

$$374\ 973{,}1679\cdot 10^{-8}$$

$$\mu_m = \sqrt{374\ 973{,}1679\cdot 10^{-8}} = \pm 0{,}0612\ \text{m}$$

Zusammenfassung

Die Anwendungsmöglichkeit von Winkelfunktionstafeln für Fehlerfortpflanzungsberechnungen wird behandelt. An zwei Beispielen wird die Berechnung der mittleren Fehler von trigonometrischen Winkelfunktionen und von nichtgemessene Werte enthaltenden Funktionen gezeigt, und auch die Dimensionsprobleme bei der Berechnung des mittleren Fehlers werden erörtert.

Schrifttum

1. HAZAY, I.: Ausgleichungsrechnungen.* Tankönyvkiadó Budapest, 1966.
2. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ferd. Dümmlers Verlag. Bonn. 1968.
3. REISSMANN, G.: Die Ausgleichungsrechnung. Berlin 1968. VEB Verlag für Bauwesen.

* In ungarischer Sprache.

Dozent Dr. Ede HŐNYI, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3, Ungarn