

# LÖSUNG EINES FEHLERTHEORETISCHEN PROBLEMS MIT HILFE STOCHASTISCHER SIMULATION

Von

O. L'AUNÉ

Lehrstuhl für Vermessungswesen, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 30. April 1971)

Vorgelegt von Dozent Dr. F. SÁRKÖZY

In der Wissenschaft wird die Nachbildung eines Ist-Zustands Simulation genannt. Ist dieser Zustand nicht deterministischer (funktioneller) Art, sondern zufallsbestimmt, wird die Nachbildung als stochastische Simulation bezeichnet. Meßfehler entstehen zufallsbestimmt, daher stellt deren Nachbildung eine typische stochastische Simulation dar, die als Monte-Carlo-Verfahren [1—5] bekannt ist.

Das simulierte Messen stellt ein Modell der wirklichen Messung dar, ein Modell, das aus der Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung gekennzeichnet, beobachtet und aus dem auf die Wirklichkeit geschlossen werden kann [3, 4]. Das Wesen der Methode ist wie folgt: es werden eine große Anzahl von Meßfehlern erzeugt und aus diesen werden allgemeine Schlüsse gezogen. Bei einer sehr hohen Zahl von Fehlern — mehreren Tausenden — lassen sich aus den Modellen allgemeingültige Regeln ableiten und so können u. U. aufgrund der Untersuchungsergebnisse Hypothesen angenommen oder abgelehnt werden. Die Simulierung der mehreren tausend Fehler wird auf mechanischem oder elektronischem Wege durchgeführt. Letzteres Verfahren ist wegen der großen Fehlerzahl zweckmäßiger. Die mechanische Simulation stellt in der Regel, aber nicht unbedingt, nur das Modell für die elektronische Simulation dar.

Zwischen der elektronischen und der mechanischen Simulation besteht kein grundsätzlicher Unterschied, lediglich ein mengenmäßiger. Sollen eine große Anzahl von Fehlern erfaßt werden, bedient man sich des elektronischen Verfahrens, während bei einer geringen Fehlerzahl die mechanische Simulation genügt.

Das Wesentliche letzterer läßt sich wie folgt zusammenfassen: ein Intervall wird mit einem gewissen Fehler halbiert und der Fehler abgelesen. Da die schätzungsmäßige Halbierung eines Intervalls ähnlich dem Treffen in die Mitte einer linearen Zielscheibe ist, wird der entstandene Fehler normaler Verteilung sein, da die Fehler des Treffens in die Zielscheibe auch einer Normalverteilung folgen. Zur Erstellung eines Fehlers sind 3 sec erforderlich. Dieser Fehler stellt ein Modell für den Meßfehler dar, mit dessen Hilfe Untersuchungen durchgeführt werden können [3]. Müssen eine sehr große Anzahl von Fehlern

— mehrere Tausende — benutzt werden, ist dieses Verfahren nicht mehr wirtschaftlich, u. zw. nicht wegen der Fehlererzeugung, sondern wegen der großen und verwickelten Rechenarbeit mit den Fehlern. Dazu ist ein Rechenautomat erforderlich, da mit diesem die Meßfehler erzeugt und mit diesen die komplizierten Berechnungen durchgeführt werden können. Mit jeder Rechenanlage können zufallsbestimmte Zahlen gleichmäßiger Verteilung simuliert (generiert) werden. Dazu stehen fertige Programme zur Verfügung. Die gleichmäßigen, zufälligen Zahlen lassen sich mit dem Gerät auf mehrfache Weise zu Veränderlichen von Normalverteilung transformieren. Der Grundgedanke der einfachsten Lösung ist wie folgt: Spielt man mit einem Geldstück »Kopf oder Schrift«, sind die Chancen gleich, es liegt also eine gleichmäßige Verteilung vor. Wird mit mehreren Geldstücken »geworfen«, ergibt sich nachweislich eine binominale Verteilung. Gesetzt, es werden die Wurfmöglichkeiten mit einem einzigen Geldstück untersucht. Es können Kopf (F) oder Schrift (I) geworfen werden. Werden zwei Geldstücke geworfen, können sich zweimal Kopf (FF) und zweimal Schrift (II) oder ein Kopf und eine Schrift (FI) sowie eine Schrift und ein Kopf (IF) ergeben. Die letzteren beiden Fälle sind analog, also gilt  $FI = IF$ . Die Möglichkeiten zusammengefaßt, erhält man einmal entweder nur Kopf oder nur Schrift und zweimal Kopf und Schrift. Werden drei Geldstücke geworfen, können sich dreimal Kopf oder dreimal Schrift und in drei Fällen ein Kopf und zwei Schriften sowie in drei Fällen eine Schrift und zwei Köpfe ergeben. Es gibt keine weitere Möglichkeit. Das läßt sich auf das gemeinsame Werfen von mehreren Geldstücken verallgemeinern. Die Regel liegt auf der Hand; die Wurfmöglichkeiten angeschrieben

1, 1

1, 2, 1

1, 3, 3, 1

erhält man das bekannte Pascal-Dreieck, das für die Binominalverteilung kennzeichnend ist. Die Münzenwürfe folgen also einer binominalen oder mit anderen Worten der Bernoullischen Verteilung.

Man erhält die allgemeine Form des Binominalsatzes  $(p + q)^n$  aus den Koeffizienten der Binominalreihe. Der Koeffizient des  $\nu$ -ten Gliedes lautet

$$\binom{n}{\nu} p^{\nu} q^{n-\nu}.$$

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird diese Formel durch  $P(\nu)$  bezeichnet und bedeutet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei  $n$  unabhängigen Versuchen das untersuchte Ergebnis  $\nu$ -mal eintritt. In diesem Falle ist  $p + q = 1$ .

Durch  $P(v)$  wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt. Im vorliegenden Falle ist diese — wie gesagt — eine Bernoullische, und deren Grenzfall ist die Normalverteilung; werden also sehr viele Geldstücke geworfen, so wird die Wurfverteilung eine normale sein.

Zur Beweisführung bedient man sich der sog. *Stirling-Formel*:

$$n! \cong n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

Als Endergebnis erhält man

$$P(v) = \binom{n}{v} p^v q^{n-v} \cong \frac{k}{\sqrt{\pi}} \exp(-k^2 v^2),$$

$$\text{wo } v = v - np \quad k^2 = \frac{1}{2npq}$$

und die rechte Seite die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Normalverteilung bedeutet.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß Meßfehler generiert werden können, indem mit der Rechenanlage zufallsbestimmte Zahlen gleichmäßiger Verteilung erzeugt, und diese gruppenweise summiert werden. Dasselbe folgt auch aus dem Ljapunow-Satz [6], nach dem, wenn die Schwankung von voneinander unabhängigen vielen Veränderlichen klein gegenüber deren Summe ist, die Summe normaler Verteilung sein wird. Diese Methode hat nur den Nachteil, daß sehr viele zufällige Zahlen in einer Gruppe zusammengefaßt werden müßten, um eine Normalverteilung zu erhalten. Es gibt auch günstigere Verfahren, nach denen mit weniger Arbeitsaufwand gleichmäßige Zufallszahlen zu zufälligen Zahlen normaler Verteilung umgeformt werden können.

Der Beschreibung dieser Verfahren vorangehend soll die Erstellung der Zufallszahlen gleichmäßiger Verteilung betrachtet werden. Auch das ist auf mehrere Art möglich: Würfelspiel, Roulett, Karten sind in gleicher Weise zur Erzeugung gleichmäßiger Verteilungen geeignet. Selbstverständlich können auch mit einer Rechenanlage derartige Verteilungen hergestellt werden. Auch dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine der einfachsten stammt von János Neumann. Eine geringfügig veränderte Form derselben wird hier kurz erörtert [1]. Das Wesen der Methode besteht darin, daß ein beliebiges Zahlenpaar ( $\alpha_0$  und  $\alpha_1$ ) gewählt wird. Es wird das Produkt  $\alpha_0 \alpha_1$  gebildet und dessen mittlere Ziffern werden als Zahl  $\alpha_2$  verwendet. Die Operation wird wiederholt:  $\alpha_1 \alpha_2$  und das Mittel des Produkte ergeben  $\alpha_3$  usw. Die dabei erhaltenen Zahlen sind sog. *Zufallszahlen* gleichmäßiger Verteilung.

Aus Zahlen gleichmäßiger Verteilung werden am einfachsten nach dem Bolschewtschen Verfahren Zahlen normaler Verteilung erhalten [1]. Nach

diesem Verfahren wird die Funktion dritten oder fünften Grades des Mittelwertes aus den Zufallszahlen transformiert. Dabei genügt es, bei der Mittelwertbildung zu einer Gruppe fünf bzw. zwei Zufallszahlen zu nehmen. Durch diese speziellen Transformationen läßt sich die Konvergenz mit der Normalverteilung wesentlich beschleunigen. Diese und ähnliche Methoden haben eine ausgedehnte Literatur [1].

Die *Monte-Carlo*-Methoden stellen neue Verfahren dar. Zuerst wurden sie 1949 von zwei amerikanischen Forschern, ULAM und METROPOLIS, beschrieben [11].

Obwohl diese Theorie in der Fachliteratur erst seit 20 Jahren bekannt ist, ist der Kern des Verfahrens viel älter [3]. Von Buffon, dem berühmten Naturforscher des 18. Jahrhunderts wurde der sog. »Nadelwurf«-Versuch angewandt, mit dem er den Wert des  $\pi$  auf experimentellem Wege ermittelte. Der Versuch, der als Vorläufer der Monte-Carlo-Methoden anzusehen ist, besteht im folgenden.

Auf ein Blatt Papier werden mehrere parallele Geraden in Abständen von  $2a$  gezeichnet und man nimmt eine Nadel der Länge  $a$ , die mehrmals auf das Papier fallen gelassen wird. Die Anzahl  $D$  der Würfe (Fallenlassen), dividiert mit der Zahl  $M$  der Schnitte der Nadel mit den Geraden, ergibt

$$\frac{D}{M} \cong \pi.$$

Die Übereinstimmung ist um so besser, aus einer je größeren Zahl von Versuchen  $\pi$  ermittelt wurde. Der Nadel-Versuch ist nicht besonders genau, er veranschaulicht jedoch sehr deutlich den versuchsmäßigen Charakter und den esoterischen Reiz des Monte-Carlo-Verfahrens [3].

In der Geodäsie wurden von uns die simulierten Messungen für die Entscheidung einer Hypothese verwendet, die die Verteilung von geringzahligen Messungen betrifft. Es ist bekannt, daß der aus normal verteilten Meßfehlern berechnete mittlere Fehler die folgende Bedeutung hat: der zuverlässigste Wert  $\bar{x}$ , vermindert oder erhöht um den mittleren Fehler des zuverlässigsten Wertes  $\mu_x$ , ergibt ein Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% den fehlerfreien Wert  $a$  deckt. Soll das Deckungsintervall vergrößert werden, wird der verlässlichste Wert um das  $\pm t$ -fache seines mittleren Fehlers geändert, wo  $t > 1$ ; damit erhöht sich jedoch auch die Deckungswahrscheinlichkeit. Der Zusammenhang zwischen dem Multiplikator  $t$  und der Deckungswahrscheinlichkeit  $P$  lautet

$$P(\bar{x} - t\mu_x < a < \bar{x} + t\mu_x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Dieser sehr alte Satz (*Gauß*, 1826) gilt als exakt lediglich bei einer sehr hohen Zahl von Messungen, doch ist er annehmbar, wenn die Anzahl der Messungen  $n$  über 30 liegt.

Nach einer neueren, doch nicht neuen Theorie (*STUDENT*, 1909) ist bei einer geringen Zahl von Messungen ( $n < 30$ ) die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $t$  keine normale, sondern die sog. Studentsche Verteilung.

Deren Funktion lautet

$$P(\bar{x} - t\mu_x < a < \bar{x} + t\mu_x) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt,$$

wo  $P$  die Wahrscheinlichkeit,  $n$  die Zahl der Messungen,  $a$  den fehlerfreien Wert,  $x$  den zuverlässigsten Wert,  $t$  den Studentschen Multiplikator,  $\Gamma$  die Gamma-Funktion bedeuten.

Die so erhaltene Größe  $t$  mit  $\mu$  multipliziert, ergibt das Konfidenzintervall (*NEYMAN*), das sich auch bei einer geringen Zahl von Messungen zur Abschätzung der Genauigkeit eignet, weil dabei die Anzahl der Messungen berücksichtigt wird [7]. Das bedeutet, daß bis dahin in der Geodäsie der mittlere Fehler sozusagen immer schlecht berechnet wurde, da ja die Zahl der Messungen fast immer 30 unterschreitet. Trotzdem hat sich die neuere Theorie in der Geodäsie noch immer nicht durchgesetzt. Die ersten Äußerungen darüber, daß man auch hier auf die neueren Methoden übergehen sollte, finden sich in den Werken von *KOLMOGOROW* (1946) und *ROMANOWSKI* (1947).

Die Abneigung gegen die Konfidenzmethode, die sich in der ganzen Welt abzeichnet, macht sich auch in den Arbeiten der ungarischen Geodäten bemerkbar, indem z. B. bemerkt wird, daß sie »praktisch unbegründete Streuungsgrenzen erbege« [8], bzw. »den mittleren Fehler stark unterschätze« [9].

Ein Grund für diese Meinungen ist darin zu suchen, daß in der Geodäsie bisher kaum Untersuchungen durchgeführt wurden, wo die durch die mathematische Statistik erschlossenen Möglichkeiten ausgenutzt worden wären [10]. Es kann ein »*experimentum crucis*« unternommen werden, mit dem es sich entscheiden läßt, ob die Wirklichkeit durch die klassische Fehlertheorie oder durch die Student-Methode besser angenähert wird. Von den verschiedenen Möglichkeiten wird im Beitrag ein Versuch mit simulierten Meßfehlern beschrieben. Die simulierten Meßfehler  $\varepsilon$  können als Meßergebnisse mit negativem Vorzeichen aus der Messung einer Größe von Wert Null ( $a$ ) aufgefaßt werden, da  $a - 1 = \varepsilon$ , wobei  $a = 0$ . Es werden eine Anzahl  $N$  solcher Werte hergestellt, wo  $N$  eine ziemlich große Zahl ist. Bei der Monte-Carlo-Methode wird die Zahl der simulierten Werte zweckmäßig zwischen  $10^3$  und  $10^4$  angenommen [1].

Im Besitz der Meß- bzw. Fehlerreihe verfährt man wie folgt:

1. Die Messungen werden in ihrer Reihenfolge zu zweien, zu dreien usw. zu zwölfen, und schließlich zu zwanzigen gemittelt ( $\bar{x}$ ).

2. Es werden für sämtliche Gruppen die mittleren Fehler  $\mu_x$  der zuverlässigsten Werte errechnet (d. h. es genügt — wie es sich beweisen läßt — den mittleren Fehler  $\mu$  einer einzigen Messung je Gruppe zu ermitteln).

3. Es wird abgezählt, wie viele  $\varepsilon < \mu$  bzw.  $\varepsilon < t\mu$ . Die erforderliche Untersuchung wäre  $\varepsilon_x < \mu_x$  bzw.  $\varepsilon_x < t\mu_x$ , doch läßt es sich ohne Schwierigkeit beweisen, daß die beiden Erfüllungen gleiche Häufigkeiten haben, wobei die Berechnung der ersteren weniger Rechenarbeit erfordert. Man erhält den Zusammenhang  $\varepsilon < t\mu$  wie folgt: Wird im Zusammenhang

$$\bar{x} - t\mu_x < a < \bar{x} + t\mu_x,$$

$\bar{x}$  von allen drei Seiten der Ungleichheit subtrahiert, erhält man

$$-t\mu_x < \varepsilon_x < t\mu_x,$$

da  $a - \bar{x} = \varepsilon_x$  den Fehler des zuverlässigsten Wertes darstellt.

Aus dieser Relation können

$$-t\mu_x < \varepsilon_x \text{ und } t\mu_x > \varepsilon_x$$

aufgeschrieben werden, oder die erste Formel mit  $-1$  multipliziert, erhält man

$$t\mu_x > -\varepsilon_x$$

also gemeinsam aufgeschrieben:

$$|\varepsilon_x| < |t\mu_x|.$$

Ferner gelten

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad \mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{n}}.$$

$$|\varepsilon_x| < |t\mu_x|$$

läßt sich also in der Form schreiben

$$\left| \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right| < \left| t \frac{\mu}{\sqrt{n}} \right|$$

und mit  $n$  vereinfacht

$$|\varepsilon| < |t\mu|.$$

Wie bereits oben nachgewiesen wurde, sind also die zwei Bedingungen identisch. Im Versuch soll also letztere untersucht werden, da dabei weniger Operationen erforderlich sind.

Der  $t$ -Wert wird bei  $P = 68,3$  angewandt, weil das das Wahrscheinlichkeitsniveau ist, dessen man sich auch bei der klassischen Methode bedient; dabei gilt  $t = 1$ , wenn  $n = \infty$ .

Man ermittelt die relativen Häufigkeiten  $G$  und  $G_i$  der Ungleichheiten.  $G$  ist die relative Häufigkeit bei der klassischen und  $G_i$  bei der Student-Methode. Die Wirklichkeit wird durch die Verteilung besser angenähert, die zu der Häufigkeit gehört, die den 68,3 Prozenten näher liegt.

Da Versuche mit Rechenanlagen kostenaufwendig sind, wurde das Verfahren erst an einem mechanischen Modell probiert. Dieses bestand aus nur 80 Messungen und stellte nur das Modell eines Großversuchs dar. Eigentlich wurden noch zwei weitere Versuche nach unterschiedlichen Grundsätzen unternommen.

Das mit dem Versuchsmodell erhaltene Ergebnis läßt mit hoher Wahrscheinlichkeit darauf schließen, daß die Student-Verteilung die Wirklichkeit besser annähert als die Normalverteilung.

Nach den Versuchsergebnissen umfaßt das Konfidenzintervall 68,8% aller Messungen anstatt 68,3%, während das Intervall  $\pm \mu$  nur 63,2% aller Messungen enthält. Aus den Ergebnissen ist auch zu erkennen, daß die 68,3 Prozente durch die Werte auch einzeln gut angenähert werden (sie schwanken um diesen Prozentsatz), im Gegensatz zur klassischen Methode, wo von 50% bis 68,3% eine monotone Zunahme wahrzunehmen ist, ein Umstand, der sich auch theoretisch nachweisen läßt.

Zwei weitere Versuche wurden nach digitaler bzw. kombiniert nach mechanischer und digitaler Methode durchgeführt. Der digitale Versuch wurde mit 4000 Messungen unternommen.

Die Simulation und die erforderlichen Berechnungen wurden im *Rechenzentrum* der *Technischen Universität Budapest* durchgeführt. Grundsätzlich war das Verfahren ähnlich dem mit dem mechanischen Modell durchgeführten, mit dem Unterschied, daß die große Anzahl der Messungen einen Qualitätsunterschied ergab. Zufolge der hohen Zahl der Versuche konnte mit voller Sicherheit entschieden werden, ob das klassische oder das *Student*-Verfahren der Wirklichkeit näher sei.

Das erzielte Ergebnis war ähnlich dem vorigen. Eigentlich wurden hier Pseudo-Messungen verwendet. Schon mit der im Vorangehenden erörterten Neumann-Methode wurden mit Hilfe einer Rechenanlage Rasdan 3 zufällige Zahlen von gleichmäßiger Verteilung generiert, aus denen nach der oben beschriebenen Bolschewschen Methode Zahlen von Normalverteilung hergestellt wurden. Aus dem Versuchsergebnis kann darauf geschlossen werden, daß man — um eine endgültige Entscheidung zu treffen — mit einer noch

größeren Versuchszahl arbeiten bzw. der Versuch etwas verändert werden müßte. Mit Hilfe einer später zu erörternden Formel läßt sich die voraussichtliche Abweichung des Versuchsergebnisses von der Wirklichkeit im voraus abschätzen. Sie ergab sich in Wirklichkeit etwas größer. Wir schlossen daraus, daß die Generierung der Zahlen von Normalverteilung nicht einwandfrei war, wahrscheinlich war der Fehler bei der Erstellung der gleichmäßigen Zahlen unterlaufen. Daher wurde beschlossen, eine mechanische Simulation anzuwenden, es werden also 160 künstliche Messungen erzeugt und diese zu zweien, zu dreien usw. zu zwölfen, zu zwanzigen kombiniert gemittelt. Die Anzahl der Kombinationen beliebig hoher Klasse von 160 Messungen ist größer als 10 000. Auch die kleinste Zahl der Kombinationen, wenn  $n = 2$ , beträgt

$$C_{160}^2 = \frac{160 \cdot 159}{2} > 10\,000.$$

Die Rechenanlage wurde so programmiert, daß sie beim Erreichen von 10 000 Kombinationen z. B. zu zweien, die Kombination zu dreien beginnt und diese wieder bis 10 000 fortsetzt usw.

Die 160 simulierten Messungen waren ideal, was wir daher wissen, weil mit der Rechenanlage die Normalität der Fehler (Nullsumme, vorgeschriebene Form usw.) sorgfältig geprüft, diese also statistischen Proben unterzogen wurden [14].

Von diesem Punkt an stimmt das Programm der Rechenanlage mit dem Programm des aus 4000 Messungen berechneten Versuchs überein. Es besteht doch ein außerordentlich großer Unterschied, da im ersten Falle lediglich 4000 Versuche simuliert wurden, während es sich hier um die Simulation von 120 000 Versuchen handelt; das ist eine um zwei Größenordnungen höhere Zahl, also ist auch die Zuverlässigkeit des Ergebnisses um eine Größenordnung höher. Der Fehler beim Versuch läßt sich aus dem Bernoulli-Satz berechnen, nachdem

$$P(|\bar{G}_t - 0,6831| > \delta') < \delta,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die untersuchte Hypothese ungültig sei, unterschreitet einen beliebig kleinen Wert  $\delta$  [1].

Die Monte-Carlo-Methode hat den großen Vorteil, daß  $\delta'$  mit Hilfe der Tschebyschewschen Ungleichheit

$$\delta' \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{\varepsilon N}}$$

im voraus abgeschätzt werden kann, wo  $p$  die Erfüllungswahrscheinlichkeit,  $\varepsilon$  die Wahrscheinlichkeit der Nichterfüllung bedeuten.  $p$  ist offenbar groß,  $\varepsilon$



klein, damit läßt sich die Beziehung auch in der Form schreiben

$$p \cong 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon \cong 1 - p.$$

Damit gilt

$$\delta' \cong \frac{1}{\sqrt{N}},$$

wo  $N$  die Versuchszahl bedeutet. Daraus kann berechnet werden, wie viele Versuche notwendig sind, damit  $\delta'$  entsprechend klein wird. Gilt die Konfidenztheorie, kann man grundsätzlich eine unbeschränkte Übereinstimmung von  $G_t$  und 68,3 erhalten, wenn die Zahl der Versuche unendlich groß ist. Das ist selbstverständlich praktisch unmöglich, eine Versuchszahl der Größenordnung  $10^5$  kann jedoch bereits die Wahl zwischen den beiden Theorien entscheiden.

Der Versuchsablauf erforderte auf einer Rechenanlage Rasdan 3 drei und einhalb Maschinenstunden, eine beträchtliche Zeit, wenn man bedenkt, daß die Anlage 15 000 Operationen je Sekunde ausführt [13]. Diese Zeitdauer entspricht rd.  $210^8$  Operationen. Das Ergebnis ist  $\bar{G}_t = 68,5\%$  anstatt der erwarteten 68,3%, die Abweichung beträgt also 0,002.

Die schätzungsmäßige Abweichung ist

$$\delta' = \frac{1}{\sqrt{120\,000}} = 0,003.$$

Die erhaltene Abweichung ist also noch günstiger (kleiner) als die erreichbare (schätzungsmäßige) Abweichung.

Bei der klassischen Methode ist  $\bar{G} = 61,7\%$  anstatt der theoretischen 68,3%.

Das Ergebnis bedeutet, daß  $\bar{G}_t = 68,3\%$  und  $\bar{G} \neq 68,3\%$ : durch den Versuch wird also die Student-Theorie bestätigt, und nachgewiesen, daß bei einer kleinen Anzahl von Messungen die klassische Genauigkeitsabschätzung im Gegensatz zur Studentschen kein richtiges Ergebnis liefert.

### Zusammenfassung

Bei einer niedrigen Zahl von Messungen ist die Berechnung des mittleren Fehlers nicht reell. Eine der Beweisführungen hierfür besteht darin, daß vom Verfasser mit Hilfe einer Rechenanlage mit simulierten Messungen Versuche unternommen wurden, wobei untersucht wurde, ob die simulierten Fehler die klassische oder die Student-Theorie befriedigen. Durch 120 000 Versuche wird die Richtigkeit der Studentschen und die Unrichtigkeit der klassischen Methode nachgewiesen.

## Schrifttum

1. SREJDER, J. A.: Die Monte-Carlo-Methoden.\* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
2. BECKENBACH, E. F.: Moderne Mathematik für Ingenieure.\* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.
3. LAUNÉ, O.: Monte-Carlo-Verfahren in der Geodäsie.\* Geodézia és Kartográfia 1965.
4. LAUNÉ, O.: Untersuchung von fiktiven Messungen nach der Monte-Carlo-Methode.\* ÉKME Tud. Közl. XII, H. 2 (1966).
5. LAUNÉ, O.: Zuverlässigkeit des mittleren Fehlers.\* Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1956.
6. LAUNÉ, O.: Ausgleichsrechnung.\* Universitätslehrstoffheft, Budapest, 1955.
7. LAUNÉ, O.: Abschätzung der Zuverlässigkeit bei kleiner Messungszahl.\* Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1953.
8. HALMOS, F.: Genauigkeitsbestimmung der Meßergebnisse.\* Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1964.
9. HAZAY, I.: Ausgleichsrechnungen.\* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
10. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Das Buch »Ausgleichsrechnungen« von Dr. I. Hazay in der ungarischen Literatur der Ausgleichsrechnung.\* Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1967.
11. METROPOLIS, N.—ULAM, S.: The Monte-Carlo method. J. Amer. Statist. Assoc. 44, 1949.
12. LAUNÉ, O.: Abschätzung des mittleren Fehlers.\* ÉKME Tud. Közl. Bd. II. 4, 1956.
13. WAGNER, Gy.: Beschreibung des Digitalrechners Rasdan 3. 2. Informationsschrift des Rechenzentrums der Technischen Universität Budapest.\* Juni 1968.
14. LAUNÉ, O.: Analyse der Meßfehler.\* Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1969.

\* In ungarischer Sprache.

Dozent OTTÓ LAUNÉ, Budapest XI., Műegyetem-rkp. 3, Ungarn