DIE A PRIORI ZUVERLÄSSIGKEIT DES ABSTECKNETZES

Von

K. Ódor

Lehrstuhl für Höhere Geodäsie,
Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 30. Mai 1969)

Vorgelegt von Prof. Dr. I. Hazay

Abstecknetz wird jenes Rechtecknetz genannt, dessen Koordinatensystem gleich dem Entwurfs- (Anlegungs-) Koordinatensystem ist (oder die Achsen der beiden Koordinatensysteme parallel sind) und dessen Netzpunkte auf Geraden liegen, die mit den Achsen parallel sind.

Auf einem Gelände, wo die zur Errichtung des Netzes nötigen Sichtmöglichkeiten vorhanden sind, oder durch Abschaffen der eventuellen Hindernisse gesichert werden können, ist eine der zweckmäßigsten Methoden der Netzerrichtung, daß im Gelände die Hauptrichtung des Baues bestimmt wird, dann die längere Seite des Rechtecknetzes als Basis abgesteckt, und ihre Länge gemessen wird. Auf diese Basis wird das Rechtecknetz auf folgende Weise aufgebaut.

Zuerst werden die sog. Hauptpunkte des Rechtecknetzes je 300—400 m abgesteckt. Dann werden die Koordinaten der abgesteckten Punkte aus den End- und Fixpunkten der Basis mittels Vorwärtseinschneiden bestimmt. Nachher werden die aus dem Vorwärtseinschnitt berechneten und auf Grund der theoretischen Koordinaten festgelegten Hauptpunkte endgültig abgesteckt.

Die weiteren Punkte zwischen den Hauptpunkten können dann entweder als Liniennetzpunkte oder als vorwärts eingeschnittene Punkte berechnet werden, wo bei letzteren die Schnittrichtungen zu einander senkrecht sind.

Für das Abstecknetz muß *a priori* eine Zuverlässigkeitszahl festgestellt werden, welche die Genauigkeit der durchzuführenden Messungen (Basismessungen, Winkelmessungen) oder sonstiger geodätischer Operationen (Vermerkung, Zentrierung) charakterisiert, damit das Netz eine gegebene, zum Abstecken notwendige, jedoch keine überflüssig große Genauigkeit erreicht.

Die Genauigkeit des Abstecknetzes wird durch die Genauigkeit folgender Operationen bestimmt:

— Genauigkeit der Bestimmung der Basis;

— Genauigkeit der Winkelmessungen für das Abstecken bzw. die Bestimmung der Punkte des Rechtecknetzes;

— Zuverlässigkeit der Zentrierung zum Abstecken, bzw. bei der Winkelmessung, d.h.

$$\mu_h = f(\mu_a, \mu_w, \mu_p) \tag{1}$$

wobei μ_h = für das Abstecknetz charakteristischer mittlerer Fehler;
μ_a = mittlerer Fehler der Basisbestimmung;
μ_w = mittlerer Fehler der Winkelmessungen;
μ_p = mittlerer Fehler der Zentrierung.

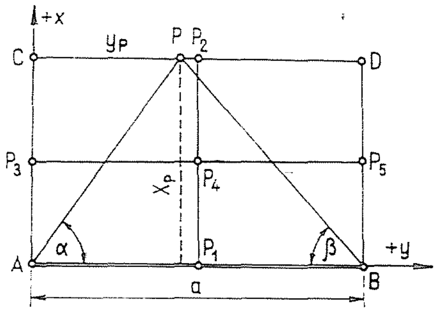

Abb. 1

Beim Aufschreiben der allgemeinen Funktion (1) wird vorausgesetzt, daß die Punkte vor den Messungen (auf Grund vorläufiger Daten) vermarkt werden, damit der sich aus der Vermarkung ergebende Fehler das Absteckmetz nicht belaste. Die vorläufige Vermarkung bedeutet hier, daß Betonpfeiler mit 5×5 cm Metallplatten auf der Oberseite an ihren endgültigen Plätzen verlegt werden. Sowohl die vorläufige, als auch die endgültige Punktstelle kann an dieser Metallplatte mit einer Ritze bezeichnet werden.

Es soll also untersucht werden, in welcher Beziehung die entwickelte Genauigkeit des Netzes von der Zuverläßigkeit der erwähnten Arbeitsphasen beeinflußt wird.

Wenn in der Abbildung 1 die Punkte A, B, C und D als Eckpunkte eines solchen Absteckmetzes betrachtet werden, in welchem die Streckenteile AP_1 und P_1B der Basis schon bestimmt sind, können die Koordinaten der sonstigen Hauptpunkte des Netzes — die mit P bezeichnet wurden, — im Anlegungskoordinatensystem laut Abb. 1 aus folgenden einfachen Beziehungen errechnet werden:

$$x_P = \frac{a}{\operatorname{ctan} \alpha + \operatorname{ctan} \beta} \tag{2}$$

$$y_P = \frac{a}{(\operatorname{ctan} \alpha + \operatorname{ctan} \beta) \tan \alpha} \,. \tag{3}$$

Da in den aufgeschriebenen Beziehungen die Meßergebnisse voneinander unabhängig sind, kann für sie das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewandt werden. Unter Verwendung der Beziehungen (2) und (3) — in Kenntnis der mittleren Fehler der Basis, oder ihrer einzelnen Strecken und der Winkelmessungen — können die mittleren Fehler der Koordinaten für jeden beliebigen vorwärts eingeschnittenen Punkt berechnet werden. Wenn die Entfernungen durch Koordinaten ausgedrückt werden, so können auch die mittleren Fehler der Entfernungen bestimmt werden.

Die partiellen Differentialquotienten der Funktionen (2) und (3) und dessen Bezeichnungen sind:

$$\frac{\partial x_p}{\partial a} = \mathrm{A} = \frac{1}{\operatorname{ctan}\alpha + \operatorname{ctan}\beta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = \mathrm{B} = \frac{a}{(\cos\alpha + \operatorname{ctan}\beta\sin\alpha)^2} \tag{5}$$

$$\frac{x_p}{\partial \beta} = \mathrm{C} = \frac{a}{(\operatorname{ctan}\alpha\sin\beta + \cos\beta)^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial y_L}{\partial a} = \mathrm{D} = \frac{1}{(\operatorname{ctan}\alpha + \operatorname{ctan}\beta)\tan\alpha} \tag{7}$$

$$\frac{\partial y_p}{\partial \alpha} = \mathrm{E} = -\frac{a}{(\cos\alpha + \operatorname{ctan}\beta\sin\alpha)^2\tan\beta} \tag{8}$$

$$\frac{y_p}{\partial \beta} = \mathrm{F} = \frac{a}{(\operatorname{ctan}\alpha + \operatorname{ctan}\beta)^2\tan\alpha\sin^2\beta}\,. \tag{9}$$

Die allgemeine Funktionsformel (F) des mittleren Fehlers eines Punktes P ist

$$\mu_F = \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \mu_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \mu_y^2 + \ldots\right\}^{1/2}$$

wenn — gemäß Funktion F — in die einzelnen mittleren Koordinatenfehler μ_x und μ_y die derivierten Werte (4)—(9) substituiert werden, erhält man

$$\mu_x = \left\{\mathrm{A}^2\mu_a^2 + (\mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)\mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{11}$$

$$\mu_y = \left\{\mathrm{D}^2\mu_a^2 + (\mathrm{E}^2 + \mathrm{F}^2)\mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{12}$$

wobei μ_a der mittlere Fehler des zur Bestimmung der Basis und μ_w derjenige des zum Vorwärtseinschneiden gemessenen Winkels ist:

1. Wenn nach Abb. 1 der Winkel α gleich β ist, so wird

$$\mu_x = \left\{\frac{\tan^2\alpha}{4}\,\mu_a^2 + \frac{a^2}{8\cos^4\alpha}\,\mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{13}$$

$$\mu_y = \left\{\frac{\mu_a^2}{4} + \frac{a^2}{8\cos^2\alpha\sin^2\alpha}\,\mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{14}$$

sein.

2. Ist $\alpha = 90°$, so ist

$$\mu_x = \left\{\tan^2\beta\;\mu_a^2 + a^2\left(\tan^4\beta + \frac{1}{\cos^4\beta}\right)^2\mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{15}$$

$$\mu_y = a\tan\beta\;\mu_w \tag{16}$$

3. Ist $\beta = 90°$, so ist

$$\mu_x = \left\{\tan^2\alpha\,\mu_a^2 + a^2\left(\tan^4\alpha + \frac{1}{\cos^4\alpha}\right)\mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{17}$$

$$\mu_y = (\mu_a^2 + a^2\tan^2\alpha\,\mu_w^2)^{1/2} \tag{18}$$

Aus Beziehungen (11)—(18) kann der mittlere Koordinatenfehler jedes beliebigen Punktes berechnet werden, der durch Vorwärtseinschneiden bestimmt wurde.

Für die Absteckarbeiten ist aber am häufigsten die Kenntnis der Genauigkeit der durch die Punkte bestimmten Entfernungen nötig, daher soll auch der mittlere Fehler einer Entfernung bestimmt werden. Sie wird in eine Funktion der unabhängigen Beobachtungen geschrieben, um daraus den mittleren Fehler der Entfernung zu errechnen.

Der mittlere Fehler (μ_{CD}) der Entfernung t_{CD} zwischen den Punkten C und D kann aus folgenden Beziehungen berechnet werden (Abb. 1):

$$\begin{aligned} t_{CD} = y_D - y_C = {} & \frac{a}{(\operatorname{ctan}\alpha_D + \operatorname{ctan}\beta_D)\tan\alpha_D} - \\ & - \frac{a}{(\operatorname{ctan}\alpha_C + \operatorname{ctan}\beta_C)\tan\alpha_C}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

In der Formel (19) haben die zum Vorwärtsschnitt gemessenen Winkel α und β die Indizen C und D bekommen, um zu bezeichnen, zu welchem Punkt sie gehören.

Der mittlere Fehler der Entfernung t_{CD} ist mit den eingeführten Bezeichnungen

$$\mu_{CD} = \left\{(D_D - D_C)^2 \mu_a^2 + (E_D - E_C)^2 \mu_w^2 + (F_D - F_C)^2 \mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{20}$$

wobei die Indizen C und D auf den partiellen Differentialquotienten y_C und y_D der Beziehung (19) hinweisen.

Beachte man, daß bei Bestimmung der Punkte C und D

$$\alpha_C = \beta_D = 90^\circ$$

d. h., daß im Wert der Derivierten D—F der Beziehung (20):

$$\sin \alpha_C = \sin \beta_D = 1; \quad \cos \alpha_C = \cos \beta_D = 0$$

$$\tan \alpha_C = \tan \beta_D = \infty \quad \text{und} \quad \operatorname{ctan} \alpha_C = \operatorname{ctan} \beta_D = 0 \quad \text{sind.}$$

Diese Winkelfunktionswerte in Beziehung (20) substituierend, erhält man:

$$\mu_{CD} = \left\{\mu_a^2 + \left(\frac{a}{\operatorname{ctan} \beta_C}\right)^2 \mu_w^2 + \left(\frac{a}{\operatorname{ctan} \alpha_D}\right)^2 \mu_w^2\right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Ähnlich wie für Beziehung (21) (Abb. 1) ist der mittlere Fehler μ_{CP_3} der Entfernung t_{CP_3}:

$$\mu_{CP_3} = \left\{(A_C - A_{P_3})^2 \mu_a^2 + (B_C - B_{P_3})^2 \mu_w^2 + (C_C - C_{P_3})^2 \mu_w^2\right\}^{1/2} \tag{22}$$

in welcher Beziehung jetzt

$$\alpha_C = \alpha_{P_3} = 90^\circ \quad \text{und}$$

$$\sin \alpha_C = \sin \alpha_{P_3} = 1, \quad \cos \alpha_C = \cos \alpha_{P_3} = 0$$

$$\tan \alpha_C = \tan \alpha_{P_3} = \infty \quad \text{und} \quad \operatorname{ctan} \alpha_C = \operatorname{ctan} \alpha_{P_3} = 0 \quad \text{und so ist}$$

$$\mu_{CP_3} = \left\{\left[\tan \beta_C - \tan \beta_{P_3}\right]^2 \mu_a^2 + \left[a(\tan^2 \beta_C - \tan^2 \beta_{P_3})\right]^2 \mu_w^2 + \right.$$
$$\left. + \left[a\left(\frac{1}{\cos^2 \beta_C} - \frac{1}{\cos^2 \beta_{P_3}}\right)\right]^2 \mu_w^2\right\}^{1/2}. \tag{23}$$

Mit Beziehungen (20) und (22) wurde der mittlere Fehler für zwei solche Entfernungen bestimmt, von denen die eine Entfernung zu Achse x, die Andere zu Achse y parallel liegt. Die abgeleiteten Beziehungen sind also gleichzeitig auch allgemeine Beziehungen, die sich dazu eignen, den mittleren Fehler der Entfernungen zu bestimmen, die parallel zur der Achse x oder y des Koordinatensystems eines Abstecknetzes sind. Es sollen nur die bezüglichen Werte a, α, β, sowie ihre mittleren Fehler substituiert werden.

Wegen der regelmäßigen Lage der Abstecknetzpunkte, die auf Geraden liegen, die zu den Koordinatenachsen parallel sind, sind die zum Vorwärtseinschneiden verwendeten Winkel α und β meistens entweder gleich oder der eine von ihnen 90°, wodurch die Beziehungen (20) und (22), abgesehen von den Ausnahmsfällen, also immer vereinfacht werden. S. z.B. auch Beziehungen (21) und (23).

Für die mittleren Fehler der Koordinaten und Entfernungen können noch zuverlässigere Werte aus den abgeleiteten Beziehungen erhalten werden, wenn zu den mittleren Fehlern der Basis und der Winkelmessungen (die nach Multiplikation mit den errechneten Koeffizienten unter dem Wurzelzeichen summiert werden) auch der für die Zuverlässigkeit der Zentrierung charakteristische mittlere Fehler addiert wird (natürlich nach den Regeln der Summierung der mittleren Fehler). Z.B. Beziehung (21), mit den mittleren Fehlern zweier Zentrierungen ergänzend μ_P wird:

$$\mu_{CD} = \left\{\mu_a^2 + \left(\frac{a}{\text{ctan}\,\beta_C}\right)^2 \mu_w^2 + \left(\frac{a}{\text{ctan}\,\beta_D}\right)^2 \mu_w^2 + 2\,\mu_P^2\right\}^{1/2}. \tag{24}$$

Die Beziehungen (11)—(24) zeigen also letzten Endes, nach welcher Funktion die Zuverlässigkeit der Punkte von verschiedener Lage und die Entfernungen des Abstecknetzes von der Zuverlässigkeit der Basismessung und der Winkelmessung beeinflußt wird.

Es soll bemerkt werden, daß die abgeleiteten Beziehungen für jenen Fall gültig sind, wo ein Punkt nur aus zwei Richtungen bestimmt wird. Es ist selbstverständlich, daß bei der Bestimmung der Absteckпetzpunkte oft mehr als zwei Richtungen verwendet werden, und das bedeutet, daß die Zuverlässigkeit solcher Punkte, bzw. der durch sie bestimmten Entfernungen größer ist, als wenn sie nur aus zwei Richtungen bestimmt wären.

Die Koordinatenfehler des aus mehr als zwei Richtungen bestimmten Punktes können jedoch nur aus ziemlich komplizierten Beziehungen berechnet werden. Es wurde aber in [5] erwiesen, daß die berechneten Werte des mittleren Fehlers in der Praxis von dem aus 3—4 Richtungen ausgewählten 2 günstigen Richtungen bestimmten mittleren Fehler nur um einen geringen Wert abweichen.

Deshalb können die zur Berechnung der a priori Werte des mittleren Fehlers abgeleiteten Beziehungen auch im Falle von mehr als zwei Richtungen verwendet werden, und ergeben einen guten Erkundungswert.

Die Richtung des Netzes durch weitere sog. Streckenpunkte zwischen den Hauptpunkten kann durch Streckenmessung (als Liniennetzpunkt), dann aus den als Liniennetzpunkte bestimmten Punkten durch instrumentelles Einsetzen erfolgen.

Der mittlere Abstandsfehler zwischen den Streckenpunkten stimmt also in erster Näherung mit dem mittleren Streckenmeßfehler überein.

Zieht man jedoch in Betracht, daß der Abschlußfehler, der ein Widerspruch zwischen den aus Vorwärtseinschnitt bestimmten Hauptpunkten berechneten Entfernungen und den unmittelbar gemessenen Werten ist, auf den einzelnen Strecken der Punktreihe so verteilt wird, daß man praktisch annehmen kann, daß der relative mittlere Abstandsfehler gleich dem relativen mittleren Abstandsfehler der Hauptpunkte ist.

Letzten Endes kann also die Entwicklung eines Absteckneztes mit gegebener Genauigkeit bzw. mittleren Fehler, auf folgende Weise durchgeführt werden:

Auf Grund der Beziehungen (11)—(24) werden die unvorteilhaftest bestimmbaren Punkte des zu entwickelnden Netzes festgestellt, d. h., wo bei gegebener Meßgenauigkeit, mit der entsprechenden Beziehung berechnet, der größte mittlere Fehler besteht.

Diese Beziehung als Grundlage betrachtend, soll die Meßgenauigkeit — Basismessung und Winkelmessungen — so festgestellt werden, daß der aus ihnen errechnete mittlere Abstandsfehler zwischen den Hauptpunkten denjenigen des Absteckentzes nicht überschreitet.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde vorausgesetzt, daß nur eine Basis gemessen wird. Der Nachteil, eine einzige Basis zu messen, ist jedoch, daß bei den aufgenommenen Meßgenauigkeiten im allgemeinen die Entfernungen in senkrechter Richtung weniger verläßlich werden als parallel zur Basis. Werden also zwei zueinander senkrechte Basen gemessen, so können die Entfernungen zwischen den Netzpunkten einfacher und mit nahezu gleicher Zuverlässigkeit bestimmt werden.

Zur Berechnung des mittleren Koordinatenfehlers der Hauptpunkte und des mittleren Fehlers der aus Koordinaten bestimmten Entfernungen können bei zwei Basismessungen die Beziehungen (11)—(24) sinngemäß verwendet werden.

Zusammenfassung

Bei Anlegung von Ingenieurbauten müssen die Genauigkeit der Absteckarbeiten und die deren Grundlage bildenden Absteckentze in Einklang mit dem Wert der Bautoleranz sein. Da aber der Wert der Toleranzen verschieden sein kann, muß auch das Absteckentz nicht immer mit gleicher Genauigkeit bestimmt werden. Die Zuverlässigkeit der Basismessung und der Winkelmessungen bestimmen durch Funktionen die Zuverlässigkeit des Absteckentzes.

Schrifttum

1. Gerschula, B. J.: Geodesija v promyschlennom stroitelstve. M., Geodesisdat, 1957.
2. Beiträge aus der Ingenieurmessung. Bd. I—III. Berlin, 1958.
3. Ljutz, A. F.: Anlegung großer Bauten. VEB Verlag Technik. Berlin, 1953.
4. Török, I.: Basisnetz für Industrieanlagen. (In ungarischer Sprache). Geod. és Kart. 5, (1962).
5. Ódor, K.: Basisnetze der ingenieurgeodetischen Arbeiten. (Doktorarbeit, in ungarischer Sprache.) Budapest, 1968.

Oberassistent Dr. Károly Ódor, Budapest XI., Műegyetem rkp. 3. Ungarn