

QUERVERTEILUNGS-EINFLUSSLINIEN VON KASTENTRÄGERBRÜCKEN MIT VERZERRBAREM QUERSCHNITT

Von

L. SZERÉMI

Lehrstuhl für Stahlbetonkonstruktionen, Technische Universität,
Budapest

(Eingegangen am 15. August 1968)

Vorgelegt von Prof. Dr. E. BÖLCSKEI

1. Einleitung

Die Anwendung von Kastenträgerkonstruktionen ist wegen ihrer vorteilhaften technischen und ökonomischen Eigenschaften in der Ingenieurpraxis sehr verbreitet und führte besonders im Brückenbau zu einer bedeutenden Entwicklung. Infolge der großen Torsionssteifigkeit der Hohlraumträger mit geschlossenem Querschnitt ist die Querverteilung außermittiger Lasten besonders günstig, wodurch sich wirtschaftliche Abmessungen ergeben. Der Entwurf bzw. die Berechnung wirtschaftlicher Konstruktionen erfordern die Entwicklung der Theorien über das Kräftespiel in Kastenträgern sowie eine Erhöhung der Genauigkeit der Berechnungsverfahren.

In der vorliegenden Arbeit soll zur Bestimmung des Kräftespieles von Kastenträgern mit verzerrbarem Querschnitt ein Näherungsverfahren dargestellt werden, das mit verhältnismäßig geringer Rechenarbeit ein das tatsächliche Kräftespiel gut annäherndes Ergebnis liefert.

2. Berechnungsannahmen

Bei der Ermittlung des Kräftespieles werden die üblichen Annahmen der Elastizitätslehre und die Beziehungen der elementaren Festigkeitslehre angewandt. Weiterhin werden hinsichtlich der Geometrie des Kastenträgers und seiner Auflageverhältnisse folgende Annahmen gemacht:

a) Es handelt sich um einen Kastenträger mit gerader Achse und unveränderlichem Querschnitt, wobei der Querschnitt eine senkrechte Symmetrieachse hat.

b) Querschnittsbreite und -höhe sind im Verhältnis zur Trägerstützweite gering, der Träger kann also hinsichtlich des Kräftespieles als Stabkonstruktion angesehen werden.

c) Der Kastenträger ruht frei auf senkrecht zu seiner Achse angeordneten linienartigen Stützen, die Biegeverdrehungen in den Stützpunkten erfolgen also unbehindert, eine Verdrillung der Stützpunktquerschnitte wird jedoch verhindert, so können die Querschnitte über den Stützen als gegen Torsionsbeanspruchung eingespannt gelten.

d) Der Kastenträger ist lediglich durch Querwände (Diaphragmen) über den Stützen ausgesteift, die Trägerquerschnitte sind also mit der Ausnahme der Querschnitte über den Stützen Drehverformungen unterworfen, d. h. sie verzerren sich.

3. Berechnungsgrundlagen

Das tatsächliche Kräftespiel der Kastenträger wird gut angenähert, wenn man als statisches Modell einen Trägerrost wählt, dessen zur Brückenachse parallele Träger außer der Biegesteifigkeit eine bedeutende Torsionssteifigkeit besitzen. Ein solches Modell wurde auch von CORNELIUS [2] bei der Berechnung von Kastenträgern mit formbeständigem Querschnitt angewandt. Da sich die Formbeständigkeit der Querschnitte lediglich unter Anwendung einer entsprechenden Zahl von Versteifungsquerwänden gewährleisten läßt, können die Querträger des statischen Modells wegen der hohen Biegesteifigkeit der Querwände als unendlich biegesteif betrachtet werden. In dieser Annahme leitete CORNELIUS seine Beziehungen zur Berechnung der Querverteilungs-Einflußlinien ab.

Das Trägerrostmodell für Kastenträger mit verzerbarem Querschnitt kann man sich als eine Konstruktion aus nebeneinander angeordneten I-Trägern vorstellen, wobei die Verbundwirkung durch die aus der Verbindung der Gurtplatten entstandene untere bzw. obere Platte gewährleistet wird. Bei diesem Modell wird also die Querträgerschar durch eine kontinuierliche, elastische Plattenverbindung ersetzt. Bei den im weiteren zu erörternden Berechnungen wurde dieses statische Modell verwendet, für welches in Verbindung mit der Berechnung von querträgerlosen Rippenbrücken von TROST [8] eine Lösung gegeben wurde. Zur Ermittlung des Kräftespiels von Kastenträgern mit verzerbarem Querschnitt wurde dieses Modell zuerst von ungarischen Autoren [3—6] herangezogen.

Da das Kräftespiel in Kastenträgern mit Hilfe eines Trägerrostmodells ermittelt werden soll, sind zuerst die Einflußlinien der Querverteilung festzustellen. Wie in der Regel bei allen Verfahren zur Berechnung von Trägerrosten, können auch im vorliegenden Falle die in der Öffnungsmitte, d. h. im Mittelquerschnitt ermittelten Querverteilungs-Einflußlinien als der Gesamtöffnungslänge entlang gültig betrachtet werden.

Der Einfachheit halber werden die Ableitungen mit Kastenträgern auf zwei Stützen vorgenommen, sodann wird das Verfahren auf die Lösung von durchlaufenden Kastenträgern verallgemeinert.

Bei der Berechnung der Querverteilungs-Einflußlinien im Mittelquerschnitt wird die im Mittelquerschnitt wandernde, Einzelkraft P zur Vereinfachung der Berechnung auf zwei aus Lasten $P/2$ bestehende symmetrische und antimetrische Lastteile zerlegt (Abb. 1), sodann werden die zu den beiden Lastfällen gehörigen Wirkungen summiert.

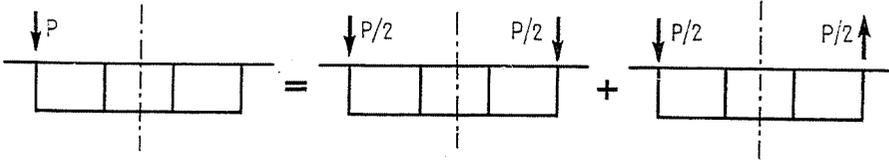


Abb. 1

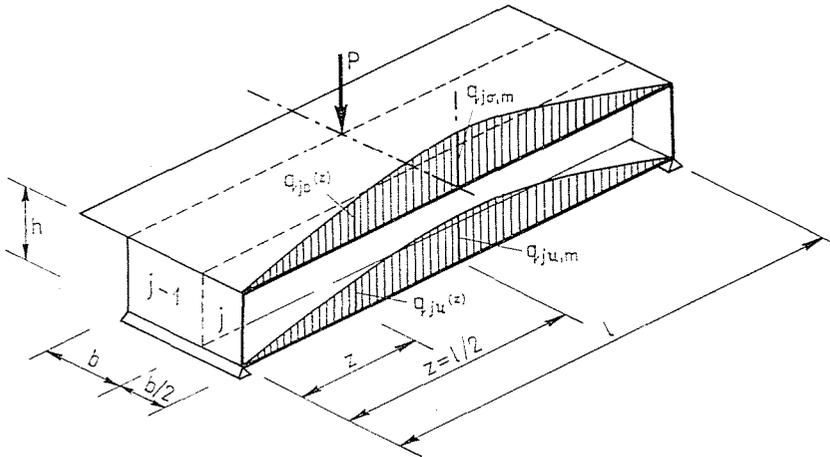


Abb. 2

Die Aufgabe wird nach der Kraftgrößenmethode gelöst. Als unbekannte Größen werden die in den einzelnen Zellen auftretenden, eine Querschnittsverformung herbeiführenden, senkrechten Querkräfte betrachtet. Die innerhalb einer Zelle entstehende Querkraft setzt sich aus zwei Teilen, aus den Querkräften in der Unter- und in der Oberplatte zusammen, mit den Kurzbezeichnungen in Abb. 2 gilt also in der j -ten Zelle:

$$q_j(z) = q_{ju}(z) + q_{jo}(z). \tag{1}$$

Bei den Berechnungen werden sowohl die äußere Last P als auch die unbekanntenen Querkräfte $q_j(z)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt.

Die in Fourier-Reihe entwickelte Form der Einzellast P ist:

$$p(z) = p_m \sum_{n=1}^{\infty} C_{(n)} \sin \frac{n \pi z}{l} \quad (2)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} p_m &= \frac{2P}{l} \\ C_{(n)} &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die in Fourier-Reihe entwickelte Form der unbekanntenen Querkraft $q_j(z)$ ist

$$q_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{j,m}(n) \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (4)$$

Der Einfachheit halber werden bei der Berechnung der Querverteilungs-Einflußlinien lediglich die ersten Glieder ($n = 1$) der Fourier-Reihen berücksichtigt, daher gelten

$$p(z) = p_m \sin \frac{\pi z}{l} \quad (5)$$

was einer sinus-halbwellenförmigen Linienlast der Höchstintensität p_m entspricht, ferner

$$q_j(z) = q_{j,m} \sin \frac{\pi z}{l} \quad (6)$$

was ebenfalls eine sinus-halbwellenförmige Querkraftverteilung mit der maximalen Ordinate $q_{j,m}$ bedeutet. Die beiden Funktionen sind also gleichförmig, unterscheiden sich voneinander lediglich durch die Konstanten; d. h. die beiden Funktionen sind affin, weil das Verhältnis der an einem beliebigen Ort z gewählten Ordinaten konstant ist:

$$\frac{q_j(z)}{p(z)} = \frac{q_{j,m}}{p_m} = X_j \quad (7)$$

Daher läßt sich die Querkraft aufgrund von (7) in Abhängigkeit der Last ausdrücken:

$$q_j(z) = X_j \cdot p(z) \quad (8)$$

Die Berechnung der Ordinaten der Querverteilungs-Einflußlinien wird eigentlich durch die Bestimmung der Verhältniszahlen X_j ermöglicht. Diese Verhältniszahlen lassen sich aus dem Bedingungsgleichungssystem der Formänderung der Kraftgrößenmethode ermitteln.

Beim Aufschreiben der Verformungsbedingungsgleichungen der Kraftgrößenmethode werden durch folgende Wirkungen hervorgerufene Formänderungen berücksichtigt:

- Längsbiegung,
- Torsion,
- Querbiegung (Rahmeneffekt).

In Kenntnis der äußeren Last sowie der Zellenquerkräfte können aufgrund des Gleichgewichts der Vertikalkräfte die Lasten je Rippe, d. h. die Ordinaten der Querverteilungs-Einflußlinien errechnet werden.

4. Der einzellige Kastenträger

Es soll die Querverteilungs-Einflußlinie in der Rippe ① der Kastenträgerbrücke auf zwei Stützen, mit dem in Abb. 3 angegebenen Querschnitt ermittelt werden. Die Ordinaten der Einflußlinie, die sog. Querverteilungszahlen erhält man, indem man die die Einzellast P ersetzende Linienlast $p(z)$ nacheinander auf die auf der Fahrbahnplatte bezeichneten Querschnitte $i = 0, 1, 2, 3, 2', 1', 0'$ stellt, wobei die auf die Rippe ① aus diesen Laststellungen entfallende Last berechnet wird. Die Außenlast $p(z)$ wird in jeder Laststellung auf einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Lastteil zerlegt, für die das Kräftespiel der Konstruktion getrennt untersucht wird.

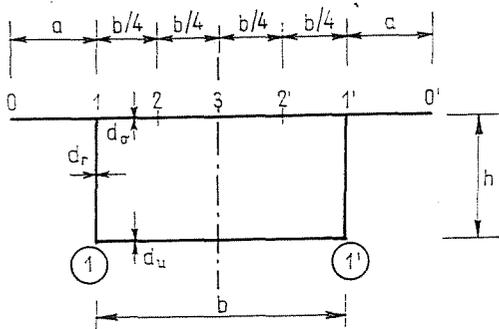


Abb. 3

Die Berechnungen werden an dem sog. Hauptssystem unternommen. Das Hauptssystem wird so hergestellt, daß man den Kastenträger in seiner ganzen Länge die senkrechte Symmetrieebene entlang durchschneidet. Dieses Durchschneiden kann jedoch nicht als vollständig betrachtet werden, da lediglich die Querkraftübertragung aufgehoben wird, in den durchschnittenen Plattenquerschnitten können also nur Verschiebungen in Richtung der Querkraft, also senkrechte relative Verschiebungen vorkommen. Die an der Schnittstelle entstehende Zellenquerkraft $q_{1,i}(z)$ wird als unbekannte Größe betrachtet.

Bei der Berechnung benutzte Kurzbezeichnungen:

l : Stützweite des Kastenträgers auf zwei Stützen,

b : theoretische Breite des Kastenquerschnitts,

a : Länge der Kragplatte,

h : theoretische Höhe des Kastenquerschnitts,

d_o : Dicke der oberen Platte (Fahrbahnplatte),

d_u : Dicke der unteren Platte,

d_r : Rippenbreite,

$J_B = 2J$: auf die horizontale Schwerpunktschwerachse des Gesamtquerschnitts bezogenes Biegeträgheitsmoment,

J_T : Torsionsträgheitsmoment des Gesamtquerschnitts,

$J = J_B/2$: Biegeträgheitsmoment je Rippe,

$J'_o = d_o^3/12$: spezifisches Biegeträgheitsmoment der oberen Platte (für Querbiegung),

$J'_u = d_u^3/12$: spezifisches Biegeträgheitsmoment der unteren Platte (für Querbiegung),

$J'_r = d_r^3/12$: spezifisches Biegeträgheitsmoment der Rippe (der senkrechten Platte) für Querbiegung,

$J_o = lJ'_o$
 $J_u = lJ'_u$
 $J_r = lJ'_r$ } : Biegeträgheitsmomente der Querschnitte der Breite l .

4.1. Der Fall einer symmetrischen Last (I)

Aus dem Lastteil, bestehend aus den symmetrisch angeordneten Linienlasten $1/2 p(z)$ der zerlegten Außenlast $p(z)$ ergibt sich in den durchschnittenen Plattenquerschnitten in keiner Laststellung eine relative Verschiebung, die Zellenquerkräfte werden also gleich Null sein, d. h.:

$$q_{1,i}^I(z) = 0. \quad (9)$$

In diesem Falle entfällt also in jeder Laststellung auf je eine Rippe eine Last der Größe $1/2 p(z)$.

4.2. Der Fall der antimetrischen Last (II)

Durch den Lastteil, bestehend aus antimetrisch angeordneten Linienlasten $1/2 p(z)$ werden in den durchschnittenen Querschnitten schon relative Verschiebungen verursacht, was zum Auftreten der Zellen-Querkräfte $q_{1,i}^{II}(z)$ führt. Im Falle einer Linienlast $p(z)$ über einem Querschnitt i läßt sich für die

Schnittstelle folgende Bedingungsgleichung der Formänderung aufschreiben

$$w_q^{II}(z) = w_{p,i}^{II}(z) \tag{10}$$

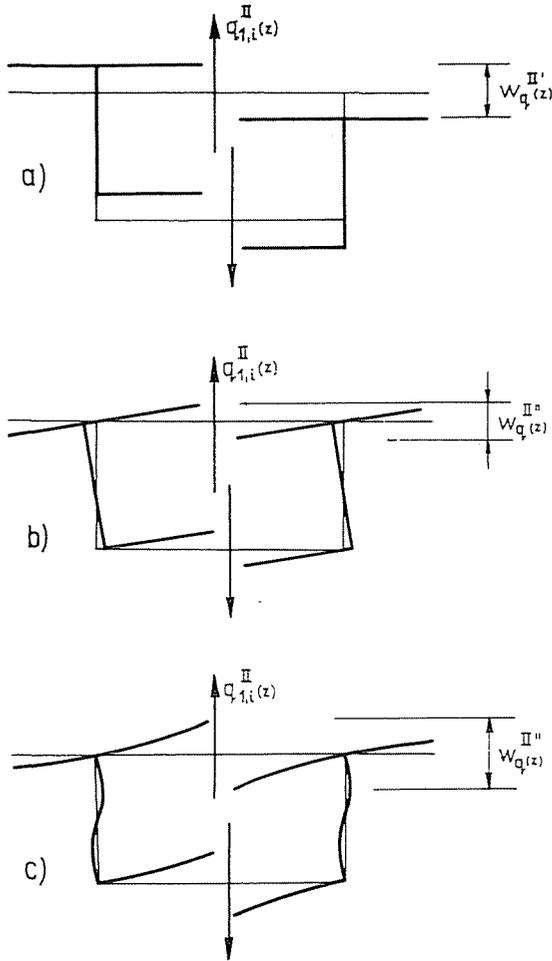


Abb. 4

wo

$w_q^{II}(z)$: die durch eine unbekannte Zellen-Querkraft $q_{1,i}^{II}(z) = X_{1,i}^{II} \cdot p(z)$ verursachte relative Verschiebung,

$w_{p,i}^{II}(z)$: die relative Verschiebung zufolge der zur Laststellung i gehörigen, antisymmetrisch angeordneten Linienlasten $1/2 p(z)$

bedeuten.

Bei der Berechnung der obigen relativen Verschiebungen wird die Formänderung des Hauptsystems — wie bereits in Abschnitt 3 erwähnt — in der Regel aus drei Formänderungsteilen zusammengesetzt, u. zw. aus Längsbiegung (w'), Torsion (w'') und Querbiegung, d. h. aus dem Rahmeneffekt (w''').

Die relative Verschiebung durch die Querkraft $q_{1,i}^{II}(z)$ ergibt sich aus der Längsbiegung (Abb. 4a) zu

$$w_q^{II'}(z) = \frac{2}{EJ} \iiint q_{1,i}^{II}(z) dz^4 = \frac{2}{EJ} \frac{l^4}{\pi^4} X_{1,i}^{II} \cdot p(z) \quad (11)$$

aus dem verteilten Torsionsmoment $m_T(z) = -b \cdot q_{1,i}^{II}(z)$ (Abb. 4b) zu:

$$w_q^{II''}(z) = \frac{b}{GJ_T} \iint m_T(z) dz^2 = \frac{b^2}{GJ_T} \frac{l^2}{\pi^2} X_{1,i}^{II} \cdot p(z) \quad (12)$$

und aus der Querbiegung (Abb. 4c) zu:

$$w_q^{II'''}(z) = \frac{Kb^3}{12 EJ'_o} q_{1,i}^{II}(z) = \frac{Kb^3}{12 EJ'_o} X_{1,i}^{II} \cdot p(z) \quad (13)$$

mit

$$K = C + \frac{h}{b} \frac{J'_o}{J'_r} (3C - 1) \quad (14)$$

und

$$C = \frac{\frac{J'_o}{J'_u} + 3 \frac{h}{b} \frac{J'_o}{J'_r}}{1 + \frac{J'_o}{J'_u} + 6 \frac{h}{b} \frac{J'_o}{J'_r}} \quad (15)$$

Werden die relativen Verschiebungen summiert, erhält man:

$$w_q^{II}(z) = \left(\frac{2}{EJ} \frac{l^4}{\pi^4} + \frac{a^2}{GJ_T} \frac{l^2}{\pi^2} + \frac{Kb^3}{12 EJ'_o} \right) X_{1,i}^{II} p(z). \quad (16)$$

Die durch die Linienlast $p(z)$ veranlaßten relativen Verschiebungen sind für die einzelnen Laststellungen getrennt zu errechnen. Um es kurz zu fassen, wird der Verlauf der Berechnung lediglich für die zum Querschnitt i gehörige Laststellung ($i = 1$) dargelegt, für die weiteren Laststellungen werden die Ergebnisse ohne Ableitung angegeben.

Steht die Kraft $p(z)$ über dem Querschnitt 1, d. h. über der Rippe, so wird durch den antimetrischen Lastteil lediglich eine Längsbiegung veranlaßt (Abb. 5), d. h. $w_{p,1}^{II'} = w_{p,1}^{II''} = 0$, und somit:

$$w_{p,1}^{II}(z) = w_{p,1}^{II'}(z) = \frac{1}{EJ} \iiint p(z) dz^3 = \frac{1}{EJ} \frac{l^4}{\pi^4} p(z). \quad (17)$$

Die relativen Verschiebungen in die Bedingungsgleichung (10) eingesetzt, läßt sich eine Vereinfachung mit der Lastfunktion $p(z)$ vornehmen und die Bedingungsgleichung in der bei der Kraftgrößenmethode üblichen Form anschreiben:

$$a_{11}^{II} \cdot X_{1,1}^{II} = a_{10,i}^{II} \quad (18)$$

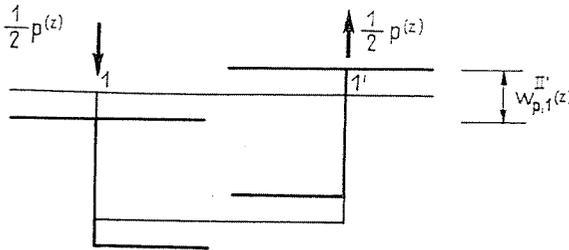


Abb. 5

wo a_{11}^{II} die Vorzahl, $a_{10,i}^{II}$ das zur Laststellung i gehörige Belastungsglied ist. Aufgrund von (18) gehört zum Fall $i = 1$ die Lösung:

$$X_{1,1}^{II} = \frac{1}{2 + \pi^2 \frac{EJ}{GJ_T} \left(\frac{b}{l}\right)^2 + K \frac{\pi^4}{12} \frac{J}{lJ'_o} \left(\frac{b}{l}\right)^3} \quad (19)$$

Werden die Parameter

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \frac{J}{J_o} \left(\frac{b}{l}\right)^3 & \psi &= \frac{J_r}{J_c} \frac{b}{h} = \frac{J'_r}{J'_o} \frac{b}{h} \\ \nu &= \frac{EJ_B}{GJ_T} \left(\frac{b}{l}\right)^2 & z &= \frac{J_o}{J_u} = \frac{J'_o}{J'_u} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

eingeführt, kann die unbekannte Verhältniszahl in einfacherer Form geschrieben werden:

$$X_{1,1}^{II} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \nu + \frac{\pi^4}{24} K \vartheta \right)} \quad (21)$$

wo

$$K = \frac{3 + 2\psi(1+z) + z\psi^2}{\psi[6 + \psi(1+z)]} \quad (22)$$

ist.

Die in den Zellen entstehende Querkraft läßt sich aufgrund von Beziehung (8) berechnen:

$$q_{1,1}^{II}(z) = X_{1,1}^{II} \cdot p(z). \quad (23)$$

4.3. Die Querverteilungszahlen

Bei der Ermittlung der auf die einzelnen Rippen entfallenden Lasten werden die durch die die Einzellast P ersetzende Linienlast $p(z)$ verursachten Wirkungen als Summe der symmetrischen und antisymmetrischen Lastteile erstellt. So kann die auf Rippe (1) entfallende Last für den Fall einer Kraft über Rippe (1) aufgrund des Gleichgewichts der Vertikalkräfte angeschrieben werden:

$$r_{1,1}(z) = \frac{1}{2} p(z) + \frac{1}{2} p(z) - q_{1,1}^{II}(z) = (1 - X_{1,1}^{II}) p(z) = \eta_{11} \cdot p(z) \quad (24)$$

mit

$$\eta_{11} = 1 - X_{1,1}^{II} \quad (25)$$

der zur Laststellung 1 der Rippe (1) gehörigen *Querverteilungszahl*.

Auf ähnliche Weise erhält man die aus der Laststellung 1 auf Rippe (1)' entfallende Last:

$$r_{1',1}(z) = \frac{1}{2} p(z) - \frac{1}{2} p(z) + q_{1,1}^{II}(z) = X_{1,1}^{II} \cdot p(z) = \eta_{1'1} \cdot p(z) \quad (26)$$

wo

$$\eta_{1'1} = X_{1,1}^{II} \quad (27)$$

die zur Laststellung 1 der Rippe (1)' gehörige Querverteilungszahl ist. Aus Symmetriegründen gilt:

$$\eta_{11'} = \eta_{1'1} = X_{1,1}^{II}. \quad (28)$$

Die noch fehlenden Querverteilungszahlen der Einflußlinie für die Rippe (1) (Abb. 6) werden im weiteren ohne Ableitung angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{10} &= \eta_{11} + 2 A \varrho X_{1,1}^{II} \\ \eta_{10'} &= \eta_{11'} - 2 A \varrho X_{1,1}^{II} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{12} &= \frac{1}{32} [27 - (22 + 6 A) X_{1,1}^{II}] \\ \eta_{12'} &= \frac{1}{32} [5 + (22 + 6 A) X_{1,1}^{II}] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\eta_{13} = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

Die in diesen Formeln vorkommenden Konstanten sind:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\pi^2}{4} \nu + \frac{\pi^4}{24} B \vartheta \\ B &= \frac{3 + \psi(2\kappa - 1)}{\psi[6 + \psi(1 + \kappa)]} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

während

$$\varrho = \frac{a}{b} \quad (33)$$

einen weiteren Parameter darstellt.

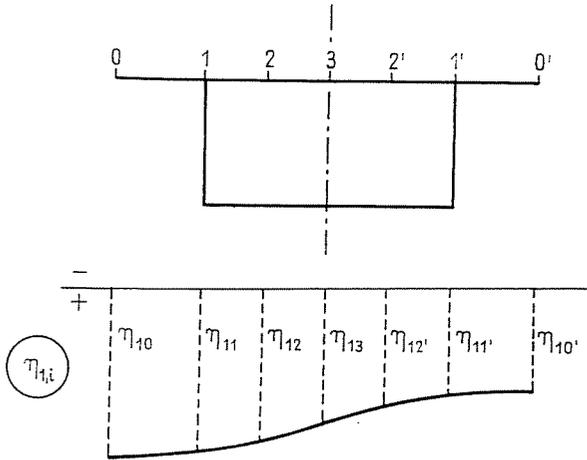


Abb. 6

Durch die abgeleiteten Zusammenhänge werden naturgemäß im Grenzfall die Querverteilungszahlen für Kastenträger mit formbeständigem Querschnitt (durch Diaphragmen versteift) angegeben. Die Bedingung der Formbeständigkeit besteht darin, daß die Kastenwände auf Querverbiegung unendlich biegesteif sein müssen, d. h. $J_u = J_o = J_r = \infty$. Daraus folgt, daß $\vartheta = 0$ ist, wodurch sich Beziehung (21) in folgender Weise vereinfacht:

$$X_{1,1}^{II} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \nu \right)} \quad (34)$$

In diesem Falle ist die Einflußlinie der Querverteilung eine Gerade, es genügt also, zwei Ordinaten zu berechnen.

5. Der Kastenträger mit zwei Zellen

Im weiteren sind die Querverteilungs-Einflußlinien für die Rippen ① und ② des zweizelligen Brückenträgers mit Kastenquerschnitt nach Abb. 7 zu bestimmen. Die Ordinaten der Einflußlinien werden in den Querschnitten $i = 0, 1, 2, 1', 0'$ berechnet. Bei der Berechnung sollen die für den einzelligen Kastenträger angewandten Grundsätze verfolgt werden. Das Hauptsystem erhält man, indem der Kastenträger in beiden Zellenmitten eine Vertikalebene entlang in seiner ganzen Länge durchgeschnitten wird, wodurch die Übertragung der Querkkräfte aufgehoben wird. So werden als statisch überzählige Größen die in den Unter- und Oberplatten der Zellen auftretenden Querkkräfte betrachtet. Die Vereinfachungsmöglichkeiten, die sich aus Symmetrie und Antimetrie ergeben, werden naturgemäß auch in diesem Falle ausgenutzt.

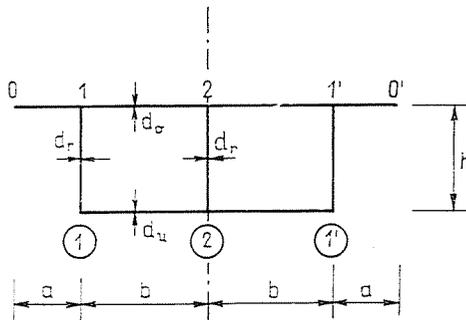


Abb. 7

Die bei der Berechnung angewandten Kurzbezeichnungen und Parameter stimmen in der Regel mit den in Abschnitt 4 angegebenen überein, mit Ausnahme von:

- $J_B = 2J^* + J$: das auf die horizontale Schwerpunktsachse bezogene Biegeträgheitsmoment des Gesamtquerschnitts, wo
- J^* : der auf die äußere Rippe entfallende Teil des Biegeträgheitsmoments,
- J : der auf die Mittelrippe entfallende Teil des Biegeträgheitsmoments ist.

Es wird ein neuer Parameter

$$\tau = \frac{J^*}{J} \quad (35)$$

eingeführt.

5.1. Der Fall einer symmetrischen Last (I)

Bei einer symmetrischen Lastenanordnung sind auch die Querkräfte symmetrisch verteilt (Abb. 8). Zuzufolge der Symmetrie ist also lediglich mit einer Unbekannten zu rechnen, u. zw. mit der Querkraft

$$q_{1,i}^I(z) = X_{1,i}^I \cdot p(z) \tag{36}$$

wobei die Konstante $X_{1,i}^I$ die eigentliche Unbekannte darstellt. Zur Ermittlung letzterer dient die Bedingungsgleichung, die nach dem Vorbild der Gleichung (18) angeschrieben werden kann:

$$A_{11}^I \cdot X_{1,i}^I = A_{10,i}^I \tag{37}$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A_{11}^I &= EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot a_{11} \\ A_{10,i}^I &= EJ \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \cdot a_{10,i} \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

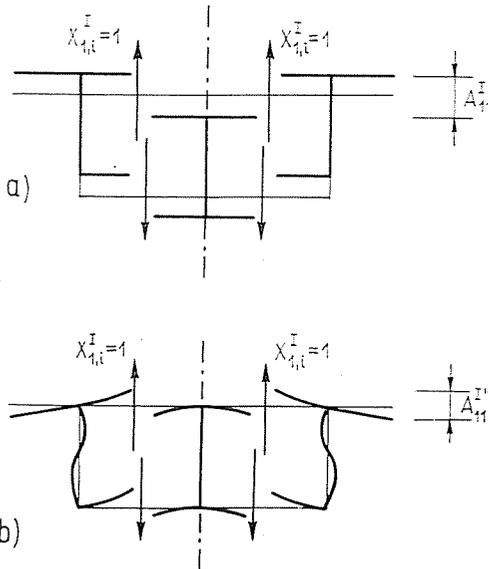


Abb. 8

Das bedeutet, daß bei der Berechnung der Vorzahlen sowie der Belastungsglieder aus Gründen der Zweckmäßigkeit eine $EJ(\pi/l)^4$ -fache Vergrößerung durchgeführt wird. So lassen sich nämlich die Zusammenhänge unmittelbar mit Hilfe der Parameter aufschreiben.

Die vergrößerte Vorzahl lautet unter Berücksichtigung der Formänderungen in Abb. 8:

$$A_{11}^I = A_{11}^{I'} + A_{11}^{I'''} = 2 + \frac{1}{\tau} + \frac{\pi^4}{3} R_1 \vartheta \quad (39)$$

mit

$$R_1 = \frac{z}{N_1} \left[1 + (1 + z) \psi + \frac{3}{4} z \psi^2 \right] \quad (40)$$

ferner

$$N_1 = 1 + z + (1 + 11z + z^2) \psi + 3z(1 + z) \psi^2. \quad (41)$$

Für die vergrößerten Belastungsglieder gelten entsprechend den Formänderungen zufolge der Laststellungen in Abb. 9:

$$\left. \begin{aligned} A_{10,1}^I &= A_{10,1}^{I'} = \frac{1}{2\tau} \\ A_{10,2}^I &= A_{10,2}^{I'} = -1 \\ A_{10,0}^I &= A_{10,0}^{I'} + A_{10,0}^{I'''} = \frac{1}{2\tau} - \varrho \frac{\pi^4}{4} K_1 \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

mit

$$K_1 = \frac{z}{N_1} \left[1 + \left(z - \frac{1}{2} \right) \psi \right]. \quad (43)$$

Die zu verschiedenen Laststellungen gehörigen Lösungen von Gleichung (37) sind:

$$\left. \begin{aligned} X_{1,1}^I &= \frac{1}{2 \left(1 + 2\tau + \frac{\pi^4}{3} R_1 \tau \vartheta \right)} \\ X_{1,2}^I &= - \frac{2\tau}{2 \left(1 + 2\tau + \frac{\pi^4}{3} R_1 \tau \vartheta \right)} \\ X_{1,0}^I &= \left[1 - \varrho \left(\frac{\pi^4}{2} K_1 \tau \vartheta \right) \right] X_{1,1}^I. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

5.2. Der Fall einer antimetrischen Last (II)

Bei einer antimetrischen Lastenanordnung treten auch die Querkräfte antimetrisch auf (Abb. 10), daher hat man auch in diesem Falle lediglich eine Unbekannte, nämlich

$$q_{1,i}^{II}(z) = X_{1,i}^{II} \cdot p(z). \quad (45)$$

Die Bedingungsgleichung für die Bestimmung der Konstante $X_{1,i}^{II}$ lautet:

$$A_{11}^{II} \cdot X_{1,i}^{II} = A_{10,i}^{II} \quad (46)$$

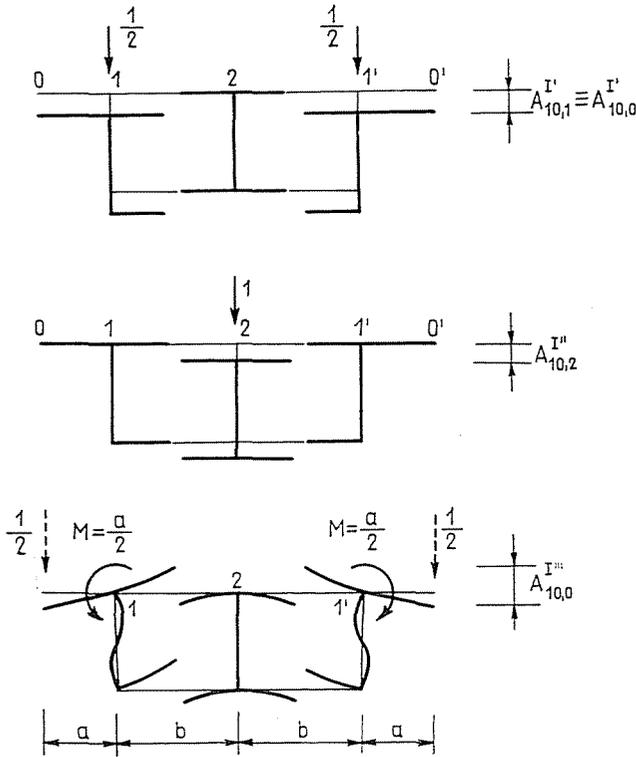


Abb. 9

Die vergrößerte Vorzahl nimmt aufgrund der in Abb. 10 angedeuteten Formänderungen die Form an:

$$A_{11}^{II} = A_{11}^{II'} + A_{11}^{II''} + A_{11}^{II'''} = \frac{1}{\tau} + \frac{2\pi^2}{1+2\tau} \nu + \frac{\pi^4}{36} R_2 \vartheta \quad (47)$$

mit

$$R_2 = \frac{1}{N_2} [12 + 24(1+\nu)\psi + 8(1+5\nu+\nu^2)\psi^2 + 12\nu(1+\nu)\psi^3 + 3\nu^2\psi^4] \quad (48)$$

ferner

$$N_2 = \psi [6 + 9(1+\nu)\psi + (1+11\nu+\nu^2)\psi^2 + \nu(1+\nu)\psi^3] \quad (49)$$

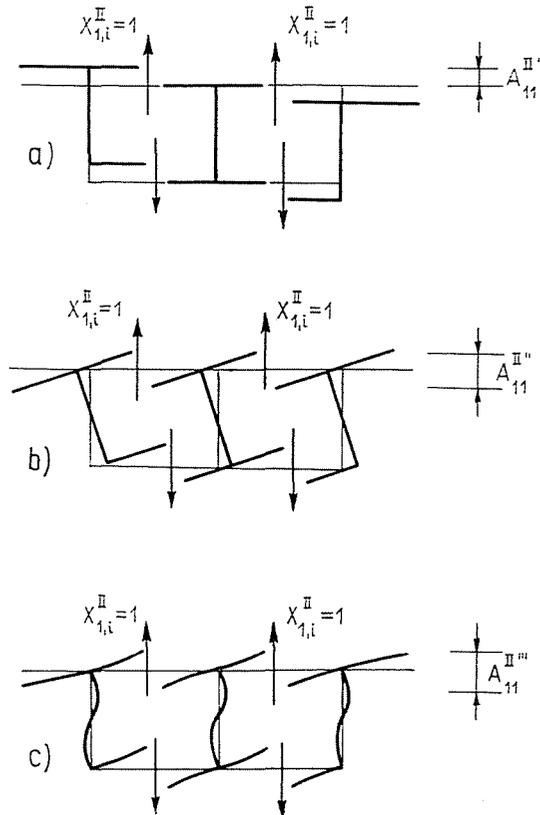


Abb. 10

Die vergrößerten Belastungsglieder lauten unter Berücksichtigung der Formänderungen in Abb. 11:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{10,1}^{II} &= A_{10,1}^{II'} = \frac{1}{2\tau} \\
 A_{10,2}^{II} &= 0 \\
 A_{10,0}^{II} &= A_{10,0}^{II'} + A_{10,0}^{II''} + A_{10,0}^{II'''} = \\
 &= \frac{1}{2\tau} \varrho \left(\frac{\pi^2}{1+2\tau} \nu + \frac{\pi^4}{12} K_2 \vartheta \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

mit

$$K_2 = \frac{1}{N_2} \left[2 + (1+4\kappa)\psi + \frac{2}{3} (4\kappa + 2\kappa^2 - 1)\psi^2 + \kappa \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \psi^3 \right]. \quad (51)$$

Die zu verschiedenen Laststellungen gehörigen Lösungen der Gleichung (46) sind:

$$\left. \begin{aligned} X_{1,1}^{\text{II}} &= \frac{1}{2 \left(1 + 2\pi^2 \frac{\tau}{1+2\tau} \nu + \frac{\pi^4}{36} R_2 \tau \vartheta \right)} \\ X_{1,2}^{\text{II}} &= 0 \\ X_{1,0}^{\text{II}} &= \left[1 - \varrho \left(2\pi^2 \frac{\tau}{1+2\tau} \nu + \frac{\pi^4}{6} K_2 \tau \vartheta \right) \right] X_{1,1}^{\text{II}} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

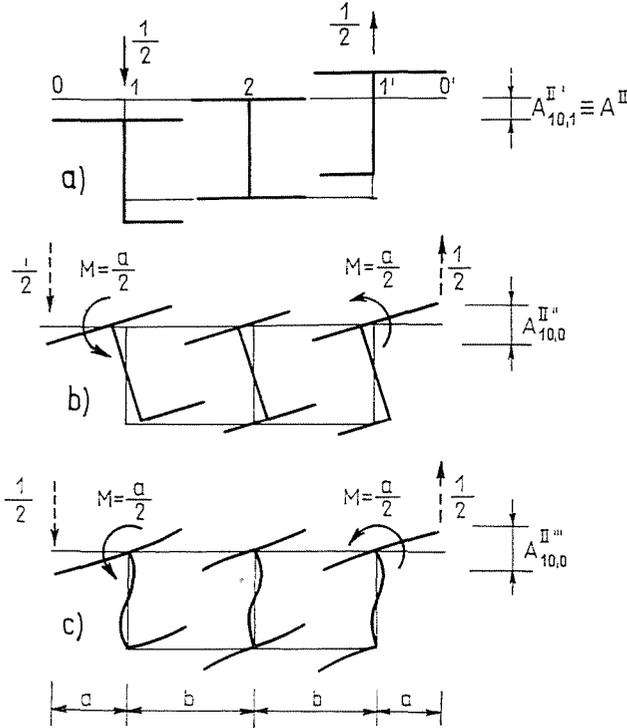


Abb. 11

5.3. Die Querverteilungszahlen

Aufgrund des vertikalen Kräftegleichgewichts der Hauptsystemelemente können die Querverteilungszahlen in der Form geschrieben werden

$$\left. \begin{aligned} \eta_{11} &= 1 - (X_{1,1}^{\text{I}} + X_{1,1}^{\text{II}}) = 1 - \frac{1}{2} (B_1 + B_2) \\ \eta_{11'} &= \eta_{1'1} = X_{1,1}^{\text{II}} - X_{1,1}^{\text{I}} = \frac{1}{2} (B_2 - B_1) \\ \eta_{12} &= \eta_{1'2} = -X_2^{\text{I}} = \tau B_1 \\ \eta_{10} &= 1 - (X_{1,0}^{\text{I}} + X_{1,0}^{\text{II}}) = \eta_{11} + \varrho (B_1 D_1 + B_2 D_2) \\ \eta_{10'} &= \eta_{1'0} = X_{1,0}^{\text{II}} - X_{1,0}^{\text{I}} = \eta_{11'} - \varrho (B_2 D_2 - B_1 D_1) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{22} &= 1 + 2 X_{1,2}^I = 1 - 2 \tau B_1 \\ \eta_{21} &= \eta_{21}' = 2 X_{1,1}^I = B_1 \\ \eta_{20} &= \eta_{20}' = 2 X_{1,0}^I = \eta_{21} - 2 \varrho B_1 D_1 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

wo folgende Kurzbezeichnungen verwendet werden:

$$\left. \begin{aligned} X_{1,1}^I &= \frac{1}{2} B_1 \\ X_{1,2}^I &= -\tau B_1 \\ X_{1,1}^{II} &= \frac{1}{2} B_2 \end{aligned} \right\} \quad (55) \quad \left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi^4}{3} R_1 \tau \vartheta \\ C_2 &= \frac{\pi^4}{36} R_2 \tau \vartheta \\ C_3 &= 2 \pi^2 \frac{\tau}{1 + 2 \tau} \nu \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{1 + 2 \tau + C_1} \\ B_2 &= \frac{1}{1 + C_2 + C_3} \end{aligned} \right\} \quad (56) \quad \left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{\pi^4}{4} K_1 \tau \vartheta \\ D_2 &= \pi^2 \frac{\tau}{1 + 2 \tau} \nu + \frac{\pi^4}{12} K_2 \tau \nu \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

6. Mehrzellige Kastenträger

Bei der Berechnung von drei- und mehrzelligen Kastenträgern wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Zellen die gleichen Abmessungen, ferner daß Unter- und Oberplatte die gleiche Dicke haben, d. h. $d_u = d_o = d_p$. Die zur Längsbiegung gehörigen Trägheitsmomente (J) in den Zwischenrippen sind gleich, mit Ausnahme der Trägheitsmomente (J^*) der beiden äußeren Rippen, die von den vorigen abweichend sein können. Aus rechentechnischen Rücksichten werden die Kastenträger mit einer geraden bzw. ungeraden Zellenzahl getrennt behandelt.

6.1. Der Fall einer geraden Zellenzahl

Besteht der Querschnitt aus einer geraden Zahl von Zellen, so fällt die vertikale Symmetrieachse mit der Achsenlinie der Mittelrippe zusammen (Abb. 12).

Bei der Berechnung werden, neben den in den vorangehenden Abschnitten genannten, folgende Kurzbezeichnungen verwendet:

N : Zahl der Zellen,

$n = N/2$: die statischen Unbekannten, d. h. die Zahl der Querkräfte,

$i = 1, 2, \dots, n, n + 1$: Zeichen der Laststellungen,

$j = 1, 2, \dots, n$: Zeichen der Zellen,

$k = 1, 2, \dots, n, n + 1$: Zeichen der Rippen.

Auf der rechten Seite der Symmetrieachse werden diese Zeichen in symmetrischer Anordnung verwendet und mit einem Akzent versehen (i', j', k')

d_p : Dicke der Unter- bzw. Oberplatte;

$J'_p = d_p^3/12$: spezifisches Biegeträgheitsmoment der Unter- bzw. Oberplatte;

$J_p = l \cdot J'_p$: Biegeträgheitsmoment eines Plattenquerschnitts der Breite l und der Höhe d_p (Querbiegung);

$J_B = 2J^* + (2n - 1)J$: Biegeträgheitsmoment im Gesamtquerschnitt;

J^* : Biegeträgheitsmoment der äußeren Rippen;

J : Biegeträgheitsmoment der Zwischenrippen.

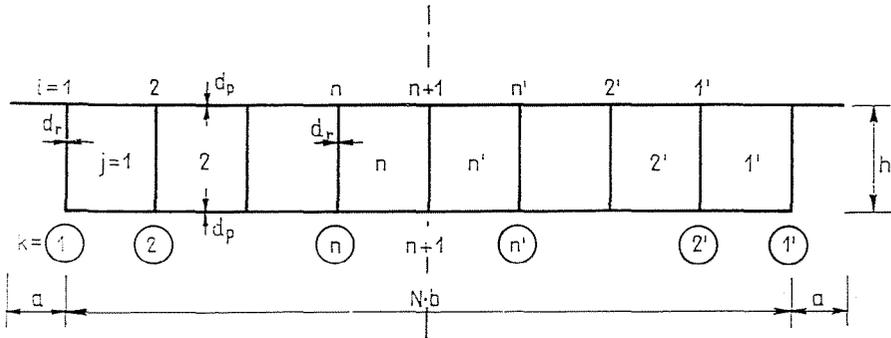


Abb. 12

Bei der Berechnung angewandte Parameter:

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta &= \frac{J}{J_p} \left(\frac{b}{l} \right)^3 \\
 \nu &= \frac{EJ_B}{GJ_T} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \\
 \psi &= \frac{J_r}{J_p} \frac{b}{h} = \frac{b}{h} \left(\frac{d_r}{d_p} \right)^3 \\
 \tau &= \frac{J^*}{J}
 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Der Verlauf der Berechnung ist grundsätzlich derselbe, wie in den vorangehenden Abschnitten, darum wird auf denselben nicht weiter eingegangen. Als Unbekannte werden auch weiterhin die Querkräfte in den einzelnen Zellen betrachtet, für die Ermittlung der n Unbekannten ist also ein Bedingungsgleichungssystem bestehend aus n Gleichungen, mit n Unbekannten

aufzuschreiben, bei dem der Einfachheit halber die Matrizen­symbolik angewandt wurde.

6.11. *Symmetrische Last (I)*. Für eine symmetrische Lastenanordnung läßt sich das folgende Bedingungsgleichungssystem anschreiben:

$$\mathbf{A}^I \cdot \mathbf{X}^I = \frac{1}{2} \mathbf{R}^I. \quad (60)$$

Die Matrix der $(EJ \pi^4/l^4)$ -fach vergrößerten Vorzahlen ist:

$$\mathbf{A}^I = \mathbf{A}^{I'} + \mathbf{A}^{I''} \quad (61)$$

wobei die Matrix $\mathbf{A}^{I'}$ die Vorzahlkomponenten aus der Längsbiegung, die Matrix $\mathbf{A}^{I''}$ jene aus der Querbiegung enthält. Diese können ausführlicher in der Form geschrieben werden:

$$\mathbf{A}^{I'}_{(n,n)} = \mathbf{C} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* \quad (62)$$

wo \mathbf{C} eine kontinuierante Matrix n -ter Ordnung, mit den Elementen $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$, $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = -1$ ist, \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_n Spaltenmatrizen mit n Elementen darstellen, deren erstes bzw. letztes Element 1, die übrigen gleich Null sind, während \mathbf{e}_1^* und \mathbf{e}_n^* Zeilenmatrizen bedeuten, deren erstes und letztes Element ebenfalls 1, die übrigen gleich Null sind.

$$\mathbf{A}^{I''}_{(n,n)} = \frac{\pi^4}{24} \vartheta (\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^I). \quad (63)$$

Hier ist \mathbf{E} eine Einheitsmatrix n -ter Ordnung, ferner

$$\mathbf{B}^I_{(n,n)} = [b_{jm}^I] \quad (64)$$

mit

$$b_{jm}^I = z_{jm}^I + z_{j+1,m}^I \quad (65)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

und

$$b_{nm}^I = z_{nm}^I \quad (66)$$

$$m = 1, 2, \dots, n$$

Die oben vorkommenden z Werte lassen sich aus der Matrixgleichung

$$\mathbf{F}^I \cdot \mathbf{Z}^I = \mathbf{T}^I \quad (67)$$

errechnen, wo

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{C} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + 6 \psi \mathbf{E} \quad (68)$$

(n,n)

ist und \mathbf{T}^I eine quadratische Matrix n -ter Ordnung darstellt, wo in der Hauptdiagonale und in der unteren ersten Diagonale 1-er stehen, sämtliche übrigen Elemente gleich Null sind, d. h. daß $t_{ij} = 1$, wenn $i = j$ bzw. $i - j = 1$, sonst gleich Null ist.

In der Formel (60) ist die Matrix der vergrößerten Belastungsglieder:

$$\mathbf{R}^I = \mathbf{S}^I + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* \quad (69)$$

(n,n+1)

wo \mathbf{S}^I eine Matrix mit $n(n + 1)$ darstellt, für die $s_{ij} = 1$ ist, wenn $i = j$ gilt, $s_{ij} = -1$ ist, wenn $j - i = 1$ gilt und alle sonstigen Elemente gleich Null sind.

6.12. Die antimetrische Last (II). Zu einer antimetrischen Lastenanordnung gehört das Bedingungsgleichungssystem

$$\mathbf{A}^{II} \cdot \mathbf{X}^{II} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{II} \quad (70)$$

Die Matrix der vergrößerten Vorzahlen besteht im vorliegenden Falle aus drei Teilen, bei einer antimetrischen Last tritt nämlich neben Längs- und Querbiegung auch Torsion auf. Somit gilt

$$\mathbf{A}^{II} = \mathbf{A}^{II'} + \mathbf{A}^{II''} + \mathbf{A}^{II'''} \quad (71)$$

oder ausführlicher:

$$\mathbf{A}^{II'} = \mathbf{C} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* \quad (72)$$

(n,n)

$$\mathbf{A}^{II''} = \frac{2 \pi^2}{2(n + \tau) - 1} \nu \mathbf{D} \quad (73)$$

(n,n)

wobei \mathbf{D} eine quadratische Matrix n -ter Ordnung darstellt, wo sämtliche Elemente gleich 1 sind.

$$\mathbf{A}^{II'''} = \frac{\pi^4}{24} \vartheta (\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^{II}) \quad (74)$$

(n,n)

mit

$$\mathbf{B}^{II} = [b_{jm}^{II}] \quad (75)$$

(n,n)

wo

$$b_{jm}^{II} = z_{jm}^{II} + z_{j-1,m}^{II} \quad (76)$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

sind.

Die z Größen in (76) werden durch die Matrixgleichung

$$\mathbf{F}^{\text{II}} \cdot \mathbf{Z}^{\text{II}} = \mathbf{T}^{\text{II}} \quad (77)$$

geliefert, wo

$$\mathbf{F}^{\text{II}}_{(n+1, n+1)} = \mathbf{C}_{(n+1, n+1)} - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_{n+1}^* + 6\psi \left(\mathbf{E}_{(n+1, n+1)} - \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_{n+1}^* \right) \quad (78)$$

und \mathbf{T}^{II} eine Matrix mit $(n+1) \cdot n$ ist, von deren Elementen $t_{ij} = 1$ ist, wenn $i = 1$ gilt, $t_{ij} = 1$ ist, wenn $j - i = 1$ gilt und alle übrigen Elemente gleich Null sind.

Die Matrix der vergrößerten Belastungsglieder in Gleichung (70) lautet:

$$\mathbf{R}^{\text{II}}_{(n, n)} = \mathbf{S}^{\text{II}}_{(n, n)} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^*_{(n, n)} \quad (79)$$

wobei \mathbf{S}^{II} eine quadratische Matrix n -ter Ordnung darstellt, von deren Elementen $s_{ij} = 1$ ist, wenn $i = j$ gilt, $s_{ij} = -1$ ist, wenn $j - i = 1$ gilt, und sämtliche weiteren Elemente gleich Null sind.

6.13. *Berechnung der Querverteilungszahlen.* Für die aus der Überlagerung von symmetrischen und antimetrischen Lastteilen berechenbaren, endgültigen Querkräfte in den Zellen links von der Symmetrieachse ($j = 1, 2, \dots, n$) gilt:

$$\mathbf{Q}_1 = [q_{ji}^{(1)}]_{(n, n+1)} \quad (80)$$

mit

$$q_{ji}^{(1)} = X_{ji}^1 + X_{ji}^{\text{II}} \quad (81)$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ferner

$$q_{j, n+1}^{(1)} = 2 X_{j, n+1}^1 \quad (82)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Für die in den Zellen ($j' = 1', 2', \dots, n'$) rechts der Symmetrieachse entstehenden, endgültigen Querkräfte gilt

$$\mathbf{Q}_2 = [q_{j'i'}^{(2)}]_{(n, n+1)} \quad (83)$$

mit

$$q_{j'i'}^{(2)} = X_{j'i'}^1 - X_{j'i'}^{\text{II}} \quad (84)$$

$$j = j', \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j' = 1', 2', \dots, n'$$

ferner

$$q_{j', n+1}^{(2)} = 2 X_{j', n+1}^1 \quad (85)$$

$$j = j', \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j' = 1', 2', \dots, n'$$

Die Querverteilungszahlen lassen sich aus folgender Beziehung errechnen:

$$\underset{(2n+1, n+1)}{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{ki} \\ \eta_{k'i} \end{bmatrix} \quad (86)$$

mit

$$\underset{(n+1, n+1)}{\mathbf{H}_1} = [h_{ki}^{(1)}] \quad (87)$$

ferner

$$h_{1i}^{(1)} = -q_{1i} \quad (88)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1$$

$$h_{ki}^{(1)} = q_{j-1,i}^{(1)} - q_{ji}^{(1)} \quad (89)$$

$$k = j = 2, 3, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

$$h_{n+1,i}^{(1)} = q_{ni}^{(1)} + q_{n'i}^{(2)} \quad (90)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1$$

und

$$\underset{(n, n+1)}{\mathbf{H}_2} = [h_{k'i}^{(2)}] \quad (91)$$

mit

$$h_{1'i}^{(2)} = -q_{1'i}^{(2)} \quad (92)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1$$

$$h_{k'i}^{(2)} = q_{j'-1,i}^{(2)} - q_{j'i}^{(2)} \quad (93)$$

$$k' = j' = 2', 3', \dots, n'; \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

Die Querverteilungszahlen, die aus der Formel (86) berechnet werden, werden in üblicher Weise durch η_{ki} bezeichnet, das die aus der Einzellast am Ort i auf die Rippe \textcircled{k} entfallende Last bedeutet.

Durch die Formel (86) werden die zu den Werten $k = 1, 2, \dots, n, n + 1, k' = 1', 2', \dots, n'$ und $i = 1, 2, \dots, n, n + 1$ gehörigen Querverteilungszahlen angegeben. Die für die Berechnung der Querverteilungs-Einflußlinien noch fehlenden Querverteilungszahlen η_{ki} , werden mit Hilfe der Beziehung

$$\eta_{ki} = \eta_{k'i} \quad (94)$$

die sich aus der Symmetrie des Querschnittes ergibt, errechnet.

6.2. Der Fall einer ungeraden Zellenzahl

Bei einer ungeraden Zellenzahl wird die Mittelzelle durch die vertikale Symmetrieachse geschnitten (Abb. 13). Die Veränderungen in der Berechnung werden durch die unterschiedliche Lage der Symmetrieachse im Vergleich zu

einem Querschnitt mit gerader Zellenzahl verursacht. Die Zahl der statischen Unbekannten beträgt in diesem Falle

$$n = \frac{N + 1}{2}$$

wo N die Zellenzahl bedeutet. Das Biegeträgheitsmoment im Gesamtquerschnitt beträgt

$$J_B = 2 [J^* + (n - 1)J].$$

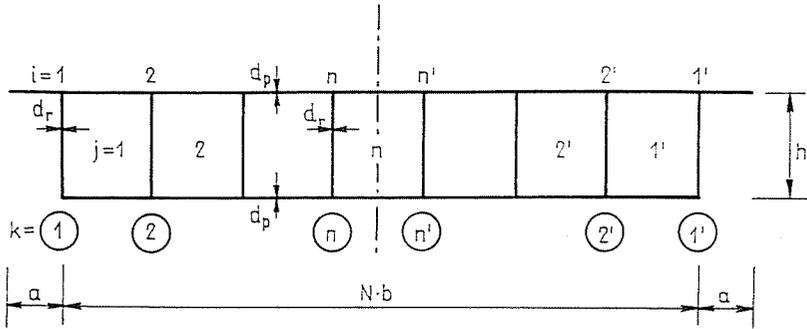


Abb. 13

6.21. Die symmetrische Last (I). Das Bedingungsgleichungssystem lautet:

$$\mathbf{A}^I \cdot \mathbf{X}^I = \frac{1}{2} \mathbf{R}^I. \quad (95)$$

Die Matrix der vergrößerten Vorzahlen ist

$$\mathbf{A}^I = \mathbf{A}^{I'} + \mathbf{A}^{I''} \quad (96)$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\mathbf{A}_{(n-1, n-1)}^I = \mathbf{C} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* \quad (97)$$

wobei \mathbf{C} eine symmetrische kontinuierante Matrix $(n - 1)$ -ter Ordnung ist, von deren Elementen $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$, $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-2} = -1$ ist und alle übrigen Elemente gleich Null sind, ferner wo

$$\mathbf{A}_{(n-1, n-1)}^{I''} = \frac{\tau^4}{24} \vartheta (\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^I) \quad (98)$$

ist, wobei \mathbf{E} eine Einheitsmatrix $(n - 1)$ -ter Ordnung darstellt, und

$$\mathbf{B}^I = [b_{jm}^I] = [z_{jm}^I + z_{j+1,m}^I] \quad (99)$$

$$j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1$$

gelten.

Die z Werte werden aus folgender Matrixgleichung ermittelt:

$$\mathbf{F}^I \cdot \mathbf{Z}^I = \mathbf{T}^I \quad (100)$$

wo

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{C} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* + 6 \psi \mathbf{E} \quad (101)$$

ist und \mathbf{T}^I eine Matrix mit $n(n - 1)$ darstellt, von deren Elementen $t_{ij} = 1$ ist, wenn $i = j$ und $i - j = 1$ gelten, und sonst gleich Null ist.

Die Matrix der vergrößerten Belastungsglieder lautet

$$\mathbf{R}^I = \mathbf{S}^I + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* \quad (102)$$

wobei \mathbf{S}^I eine Matrix mit $(n - 1) \cdot n$ ist, von deren Elementen $s_{ij} = 1$ ist, wenn $i = j$ gilt, $s_{ij} = -1$, wenn $j - i = 1$ gilt, und sonst gleich Null ist.

6.22. Die antimetrische Last (II). Das Bedingungsgleichungssystem lautet:

$$\mathbf{A}^{II} \cdot \mathbf{X}^{II} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{II}. \quad (103)$$

Die Matrix der vergrößerten Vorzahlen ist:

$$\mathbf{A}^{II} = \mathbf{A}^{II'} + \mathbf{A}^{II''} + \mathbf{A}^{II'''}. \quad (104)$$

In ausführlicherer Form:

$$\mathbf{A}^{II'} = \mathbf{C} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{n-1}^* \quad (105)$$

$$\mathbf{A}^{II''} = \frac{\pi^2}{n + \tau - 1} \gamma \left(\mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \quad (106)$$

wobei \mathbf{K} eine quadratische Matrix n -ter Ordnung darstellt, wo sämtliche Elemente der letzten Spalte gleich 1, alle übrigen gleich Null sind.

$$\mathbf{A}^{II'''} = \frac{\pi^4}{24} \vartheta \left(\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^{II} \right) \quad (107)$$

mit

$$\mathbf{B}^{\text{II}} = [b_{jm}^{\text{II}}] \quad (108)$$

$$b_{jm}^{\text{II}} = z_{jm}^{\text{II}} + z_{j+1,m}^{\text{II}} \quad (109)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$b_{nm}^{\text{II}} = 2 z_{nm}^{\text{II}} \quad (110)$$

$$m = 1, 2, \dots, n$$

Die z Glieder in den vorstehenden Formeln werden durch die Matrixgleichung

$$\mathbf{F}^{\text{II}} \cdot \mathbf{Z}^{\text{II}} = \mathbf{T}^{\text{II}} \quad (111)$$

geliefert, wo

$$\mathbf{F}^{\text{II}} = \mathbf{C} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* + 6 \psi \mathbf{E} \quad (112)$$

und \mathbf{T}^{II} eine quadratische Matrix n -ter Ordnung ist, von deren Elementen $t_{ij} = 1$ ist, wenn $i = j$ bzw. $j - i = 1$ gilt, und alle übrigen Elemente gleich Null sind.

Für die Matrix der vergrößerten Belastungsglieder in Gleichung (103) gilt

$$\mathbf{R}^{\text{II}} = \mathbf{S}^{\text{II}} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* \quad (113)$$

wobei \mathbf{S}^{II} eine quadratische Matrix n -ter Ordnung darstellt, von deren Elementen $s_{ij} = 1$ ist, wenn $i = j$ gilt, $s_{ij} = -1$ ist, wenn $j - i = 1$ gilt, und alle sonstigen Elemente gleich Null sind.

6.23. *Berechnung der Querverteilungszahlen.* Die endgültigen Querkräfte in den Zellen links von der Symmetrieachse ($j = 1, 2, \dots, n$) sind:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{q}_{ji}^{(1)} \quad (114)$$

mit

$$\mathbf{q}_{ji}^{(1)} = X_{ji}^1 + X_{ji}^{\text{II}} \quad (115)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

und

$$\mathbf{q}_{ni}^{(1)} = X_{ni}^{\text{II}} \quad (116)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Für die in den Querschnitten rechts von der Symmetrieachse [$j' = 1', 2', \dots, (n-1)'$] entstehenden endgültigen Querkräfte gilt:

$$\mathbf{Q}_2 = [q_{j'i'}^{(2)}] \quad (117)$$

mit

$$q_{j'i}^{(2)} = X_{ji}^I - X_{ji}^{II} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} j = j' & & j = 1, 2, \dots, n - 1 \\ i = 1, 2, \dots, n & & j' = 1', 2', \dots, (n - 1)' \end{aligned}$$

$$q_{n'i}^{(2)} = -q_{n'i}^{(1)} \quad (119)$$

Die Querverteilungszahlen sind:

$$\mathbf{H}_{(2n,n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{ki} \\ \eta_{k'i} \end{bmatrix} \quad (120)$$

mit

$$\mathbf{H}_1 = [h_{ki}^{(1)}]_{(n,n)} \quad (121)$$

und

$$h_{1i}^{(1)} = -q_{1i}^{(1)} \quad (122)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$h_{ki}^{(1)} = q_{j-1,i}^{(1)} - q_{ji}^{(1)} \quad (123)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = j = 2, 3, \dots, n$$

ferner

$$\mathbf{H}_2 = [h_{k'i}^{(2)}]_{(n,n)} \quad (124)$$

mit

$$h_{1'i}^{(2)} = -q_{1'i}^{(2)} \quad (125)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$h_{k'i}^{(2)} = q_{j'-1,i}^{(2)} - q_{j'i}^{(2)} \quad (126)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k' = j' = 2', 3', \dots, n'$$

In Kenntnis der Querverteilungszahlen werden die Querverteilungseinflußlinien nach Abschnitt 6.13 ermittelt.

6.3. Zahlenbeispiel

Beispielshalber sollen die Querverteilungseinflußlinien eines dreizelligen Kastenträgers auf zwei Stützen ermittelt werden (Abb. 14).

Ausgangsdaten:

Anzahl der Zellen: $N = 3$, also eine ungerade Zahl, Zahl der statischen Unbekannten:

$$n = \frac{N + 1}{2} = 2,$$

mit folgenden Parametern:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0,04 & \psi &= 8 \\ r &= 0,01 & \tau &= 0,8 \end{aligned}$$

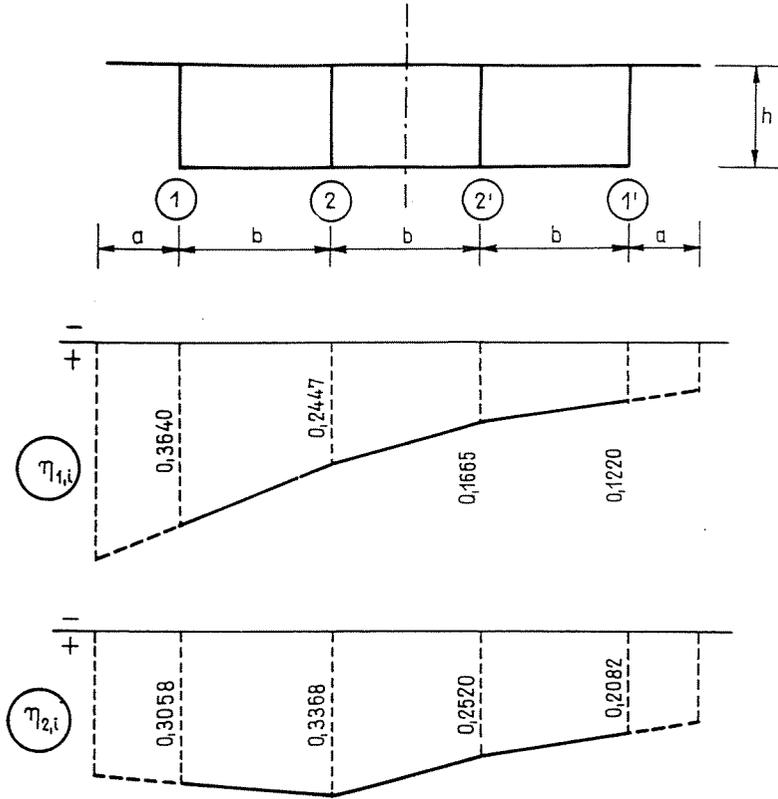


Abb. 14

6.31. Symmetrische Last

$$\mathbf{C} = [2] = 2$$

$(n-1, n-1)$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^* = [1] = 1$$

$(n-1, n-1)$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{C} + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* = 2 + \frac{1}{0,8} - 1 = 2,25$$

$(n-1, n-1)$

$$\mathbf{E} = [1] = 1$$

$(n-1, n-1)$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(n, n) (n, n)

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(n, n) (n, n)

$$\mathbf{F}' = \mathbf{C} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* + 6 \psi \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 49 & -1 \\ -1 & 51 \end{bmatrix}$$

(n, n)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^I &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{Z}^I &= \begin{bmatrix} 0,0208 \\ 0,0200 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}^I &= [b_{jm}^I] = [Z_{11}^I + Z_{21}^I] = 0,0208 + 0,0200 = 0,0408 \\ \mathbf{A}^{I'''} &= \frac{\pi^4}{24} \vartheta (\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^I) = 4,0587 \cdot 0,04(1 + 3 \cdot 0,0408) = 0,1822 \\ \mathbf{A}^I &= \mathbf{A}^{I'} + \mathbf{A}^{I'''} = 2,2500 + 0,1822 = 2,4322 \\ \mathbf{S}^I &= [1 \quad -1] & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* &= [1 \quad 0] \\ \mathbf{R}^I &= \mathbf{S}^I + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* = \\ &= [1 \quad -1] + \left(\frac{1}{0,8} - 1\right) [1 \quad 0] = [1,25 \quad -1] \\ \mathbf{X}^I &= \frac{1}{2,4322} \cdot \frac{1}{2} [1,25 \quad -1] = [0,2570 \quad -0,2056] \end{aligned}$$

6.32. Antimetrische Last

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{II'} &= \mathbf{C} + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_n \mathbf{e}_{n-1}^* = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 0,25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,25 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^{II''} &= \frac{\pi^2}{n + \tau - 1} \nu \left(\mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{K}\right) = \\ &= \frac{9,8696}{2 + 0,8 - 1} \cdot 0,01 \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0548 & 0,0274 \\ 0,0548 & 0,0274 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}^{II} &= \mathbf{C} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* + 6 \psi \mathbf{E} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 48 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & -1 \\ -1 & 49 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}^{II} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z}^{II} &= \begin{bmatrix} 0,02042 & 0,00042 \\ 0,00042 & 0,02042 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02084 & 0,00042 \\ 0,02084 & 0,02042 \end{bmatrix} \\ b_{11}^{II} &= z_{11}^{II} + z_{21}^{II} = 0,02084 + 0,02084 = 0,04168 \\ b_{12}^{II} &= z_{12}^{II} + z_{22}^{II} = 0,00042 + 0,02042 = 0,02084 \\ b_{21}^{II} &= 2 \cdot z_{21}^{II} = 2 \cdot 0,02084 = 0,04168 \\ b_{22}^{II} &= 2 \cdot z_{22}^{II} = 2 \cdot 0,02042 = 0,04084 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^{\text{II}} = [b_{jm}^{\text{II}}] = \begin{bmatrix} 0,04168 & 0,02084 \\ 0,04168 & 0,04084 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\text{II}'''} = \frac{\pi^4}{24} \vartheta (\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^{\text{II}}) = 4,0587 \cdot 0,04 (\mathbf{E} + 3 \mathbf{B}^{\text{II}}) = \begin{bmatrix} 0,1826 & 0,0102 \\ 0,0203 & 0,1822 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\text{II}} = \mathbf{A}^{\text{II}'} + \mathbf{A}^{\text{II}''} + \mathbf{A}^{\text{II}'''} = \begin{bmatrix} 2,4874 & -0,9624 \\ -1,9249 & 2,2096 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{\text{II}} = \mathbf{S}^{\text{II}} + \left(\frac{1}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0,25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,25 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0,3790 & -0,0391 \\ 0,3302 & 0,4185 \end{bmatrix}$$

6.33. Die Querverteilungszahlen

$$q_{11}^{(1)} = X_{11}^{\text{I}} + X_{11}^{\text{II}} = 0,2570 + 0,3790 = 0,6360$$

$$q_{12}^{(1)} = X_{12}^{\text{I}} + X_{12}^{\text{II}} = -0,2056 - 0,0391 = -0,2447$$

$$q_{21}^{(1)} = X_{21}^{\text{II}} = 0,3302$$

$$q_{22}^{(1)} = X_{22}^{\text{II}} = 0,4185$$

$$\mathbf{Q}_1 = [q_{ji}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0,6360 & -0,2447 \\ 0,3302 & 0,4185 \end{bmatrix}$$

$$q_{1'1}^{(2)} = X_{11}^{\text{I}} - X_{11}^{\text{II}} = 0,2570 - 0,3790 = -0,1220$$

$$q_{1'2}^{(2)} = X_{12}^{\text{I}} - X_{12}^{\text{II}} = 0,2056 + 0,0391 = 0,2447$$

$$q_{2'1}^{(2)} = -q_{21}^{(1)} = -0,3302$$

$$q_{2'2}^{(2)} = -q_{22}^{(1)} = -0,4185$$

$$\mathbf{Q}_2 = [q_{ji}^{(2)}] = \begin{bmatrix} -0,1220 & 0,2447 \\ -0,3302 & -0,4185 \end{bmatrix}$$

$$h_{11}^{(1)} = -q_{11}^{(1)} = -0,6360$$

$$h_{12}^{(1)} = -q_{12}^{(1)} = 0,2447$$

$$h_{21}^{(1)} = q_{11}^{(1)} - q_{21}^{(1)} = 0,6360 - 0,3302 = 0,3058$$

$$h_{22}^{(1)} = q_{12}^{(1)} - q_{22}^{(1)} = -0,2447 - 0,4185 = -0,6632$$

$$\mathbf{H}_1 = [h_{ki}^{(1)}] = \begin{bmatrix} -0,6360 & 0,2447 \\ 0,3058 & -0,6632 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} + \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0,3640 & 0,2447 \\ 0,3058 & 0,3368 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 h_{1'1}^{(2)} &= -q_{1'1}^{(2)} = 0,1220 \\
 h_{1'2}^{(2)} &= -q_{1'2}^{(2)} = 0,1665 \\
 h_{2'1}^{(2)} &= q_{1'1}^{(2)} - q_{2'1}^{(2)} = -0,1220 + 0,3302 = 0,2082 \\
 h_{2'2}^{(2)} &= q_{1'2}^{(2)} - q_{2'2}^{(2)} = -0,1665 + 0,4185 = 0,2520 \\
 \mathbf{H}_2 &= [h_{ki}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0,1220 & 0,1665 \\ 0,2082 & 0,2520 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{ki} \\ \eta_{k'i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3640 & 0,2447 \\ 0,3058 & 0,3368 \\ 0,1220 & 0,1665 \\ 0,2082 & 0,2520 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (1') \\ (2') \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie ist

$$\eta_{k'l'} = \eta_{k'i}$$

daher sind die zur Ermittlung der Querverteilungs-Einflußlinien noch erforderlichen Querverteilungszahlen:

$$\begin{aligned}
 \eta_{11'} &= \eta_{1'1} = 0,1220 \\
 \eta_{12'} &= \eta_{1'2} = 0,1665 \\
 \eta_{21'} &= \eta_{2'1} = 0,2082 \\
 \eta_{22'} &= \eta_{2'2} = 0,2520
 \end{aligned}$$

Die Querverteilungs-Einflußlinien sind in Abb. 14 dargestellt.

7. Durchlaufende Kastenträger

Die dargelegten Verfahren zur Berechnung von Kastenträgern auf zwei Stützen sind sinngemäß auch für die Näherungsrechnung von durchlaufenden Konstruktionen anzuwenden. Es wird die in den Trägerrosttheorien übliche Näherung verwendet, bei der die für den durchlaufenden Träger kennzeichnenden Durchbiegungsverhältnisse durch ein reduziertes Biegeträgheitsmoment berücksichtigt werden. Bei der Berechnung der für eine *i*-te Öffnung des Durchlaufträgers gültigen Querverteilungs-Einflußlinien werden die reduzierten Biegeträgheitsmomente aufgrund des Prinzips der gleichen Durchbiegungen bestimmt.

Die zu berücksichtigenden reduzierten Biegeträgheitsmomente sind:

$$\left. \begin{aligned}
 J_{Bi,\text{red}} &= c_i J_B \\
 J_{i,\text{red}} &= c_i J \\
 J_{i,\text{red}}^* &= c_i J^*
 \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Der zur *i*-ten Öffnung gehörige Reduktionsfaktor ist:

$$c_i = \frac{l_i^3}{48 E f_i} \quad (128)$$

wo

l_i : die Stützweite des Durchlaufträgers in der i -ten Öffnung;
 f_i : die Durchbiegung des Mittelquerschnitts in der i -ten Öffnung des Durchlaufträgers unter Einwirkung einer hier angreifenden Einheits-Einzellast

bedeuten.

Eine Reduktion des Torsionsträgheitsmoments ist nicht erforderlich, weil die Abstützungsverhältnisse hinsichtlich der Torsionsmomente bei Durchlaufträgern dieselben sind, wie bei Trägern auf zwei Stützen.

Zusammenfassung

Im Beitrag wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung von Kastenträgerbrücken mit verzerbarem Querschnitt dargelegt. Das komplizierte Kräftespiel des Kastenträgers wird durch ein Trägerrost-Modell angenähert, wodurch die Lösung des Problems auf die Ermittlung von Querverteilungs-Einflußlinien vereinfacht wird. Es werden für die Querverteilungszahlen von Kastenträgern mit einer und zwei Zellen geschlossene Formeln abgeleitet, ferner wird ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Querverteilungs-Einflußlinien von mehrzelligen Kastenträgern entwickelt.

Schrifttum

1. BÖLCSKEI, E.: Beton-, Stahlbeton- und Spannbetonbrücken. Tankönyvkiadó, Budapest 1968.
2. CORNELIUS: Über den Einfluß der Torsionssteifigkeit auf die Verdrehung von Tragwerken. MAN Forschungsheft 1951.
3. GOSCHY, B.—BALÁZS, GY.: Torsion der Kastenträger. Mélyépítéstudományi Szemle 9, 426 (1965).
4. GOSCHY, B.: Auf Verdrehung beanspruchte Kastenträger. Acier, Stahl, Steel No. 2, 82 (1967).
5. PALOTÁS—BALÁZS—GOSCHY—SZERÉMI: Untersuchung des Kräftespiels von Brückenträgern mit Kastenquerschnitt. Budapest, 1964 (Studie, bearbeitet im Auftrag des Ministeriums für Verkehrs- und Postwesen).
6. PALOTÁS—BALÁZS—GOSCHY—SZERÉMI: Berechnung der Querverteilungs-Einflußlinien von Brückenträgern mit Kastenquerschnitt. Budapest 1965 (Studie, bearbeitet im Auftrag des Ministeriums für Verkehrs- und Postwesen).
7. SZALAI, J.—KNÉBEL, J.: Berechnung von Kastenträger-Konstruktionen. Budapest 1966 (Veröffentlichung des Lehrstuhls für Stahlbetonkonstruktionen an der Technischen Universität für Bau- und Verkehrswesen Budapest).
8. TROST, H.: Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken. Werner-Verlag, Düsseldorf 1961.

Oberassistent Dr. László SZERÉMI, Budapest XI. Sztoczek u. 2. Ungarn